

О.І. Литвинов, Я.М. Михайлович,
А.В. Бойко, М.Г. Березовий

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник

У ДВОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА I СТАТИКА. КІНЕМАТИКА

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів
вищих технічних навчальних закладів*

Київ
«Агроосвіта»
2013

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Т36

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів (лист від 28.10.2010 №1/11-9970)

Рецензенти:

Бендера І.М. – д. пед. н., професор, к. т. н., директор Інституту механізації та електрифікації сільського господарства (Подільський державний аграрно-технічний університет);

Девін В.В. – к. т. н., доцент, завкафедри загальнотехнічних дисциплін і фізики (Подільський державний аграрно-технічний університет);

Ляшенко Б.А. – д. т. н., професор, Лауреат Державної премії з науки і техніки України (Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України);

Бородачов М.М. – д. т. н., професор кафедри механіки (Національний авіаційний університет).

Т36

Теоретична механіка. Ч. І. Статика. Кінематика /

[Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г.] – К. : Агроосвіта, 2013. – 576 с.

ISBN 978-966-2007-29-9

Підручник складається із двох частин. У першій частині: «Теоретична механіка. Ч. І. Статика. Кінематика» викладено два перші розділи теоретичної механіки: статика і кінематика. Матеріали видання відповідають новій типовій програмі навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для вищих технічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації. У матеріалах підручника висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних та розрахунково-графічних робіт. Значне місце відведено розв'язуванню практичних інженерно-технічних задач.

Видання рекомендовано студентам денної, заочної і дистанційної форм навчання вищих навчальних закладів технічного профілю, а також може бути корисним аспірантам, магістрам, інженерно-технічним працівникам.

УДК 531(075.8)

ББК 22.21я73

ISBN 978-966-2007-29-9

© О.І. Литвинов, Я.М. Михайлович,
А.В. Бойко, М.Г. Березовий, 2013

ЗМІСТ

Передмова	11
Вступ. Предмет теоретичної механіки.	
Структура курсу.....	14
Короткий історичний нарис розвитку механіки	20
Розділ I. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	30
1.1. Предмет і задачі статички.	
В'язі, реакції в'язей	30
1.1.1. Предмет статички. Основні поняття.	30
1.1.2. Задачі статички. Основні визначення	32
1.1.3. Аксиоми статички.....	34
1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей.....	39
1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів	46
Запитання для самоконтролю.....	49
1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної. Умови рівноваги тіла	50
1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної. Векторний спосіб додавання сил	50
1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі.....	52
1.2.3. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил.....	53
1.2.4. Проекція сили на вісь і на площину	56
1.2.5. Визначення сили за її проекціями.....	59
1.2.6. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь.....	60
1.2.7. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил	61
1.2.8. Умови рівноваги системи збіжних сил	62
1.2.9. Методика розв'язування задач статички.	

Приклади	63
Запитання для самоконтролю	72
1.3. Теорія моментів і пар сил на площині	72
1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки).....	72
1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор.....	75
1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил	79
1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил	81
1.3.5. Пара сил. Момент пари сил	84
Властивості пари сил	86
Теорема про еквівалентність пар сил	89
Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині	91
Запитання для самоконтролю	92
1.4. Плоска система сил. Зведення сил і умови рівноваги тіл	93
1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині. Лема про паралельне перенесення лінії дії сили	93
1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички	94
1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил	98
1.4.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи паралельних сил	100
1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил	101
Запитання для самоконтролю	107
Задачі для самостійного опрацювання.....	108

1.5. Рівновага системи декількох тіл	111
1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження	111
1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі	113
1.5.3. Рівновага системи декількох тіл	114
1.5.4. Методика і приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл	115
1.5.5. Розрахунок складних технічних систем.....	122
Рівновага систем твердих тіл (ланок) на прикладах механізмів і машин	122
Запитання для самоконтролю	201
1.6. Розрахунок плоских ферм	202
1.6.1. Характеристика ферм і порядок розрахунку...	202
1.6.2. Метод вирізування вузлів	204
1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину)	210
Запитання для самоконтролю	212
1.7. Тертя ковзання і тертя кочення	213
1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання.....	213
1.7.2. Кут і конус тертя ковзання.....	216
1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині	220
1.7.4. Тертя кочення	223
1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні	225
Запитання для самоконтролю	230
1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі.....	230
1.8.1. Система сил у просторі	230
1.8.2. Момент сили відносно осі.....	231
1.8.3. Залежність між моментами сил відносно	

центра і відносно осі, що перетинає цей центр ..	234
1.8.4. Формули для обчислення моментів сил відносно координатних осей	236
Запитання для самоконтролю	238
1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор і головний момент просторової системи сил	238
1.9.1. Пари сил у просторі.....	238
1.9.2. Теорема про перенесення пари у паралельну площину.....	239
1.9.3. Умови еквівалентності пар у просторі.....	241
1.9.4. Додавання просторової системи пар	241
1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі ...	242
1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи	243
1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил.....	245
1.9.8. Окремі випадки зведення просторової системи довільних сил до центра	247
Запитання для самоконтролю	250
1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил ...	251
1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі.....	251
1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил	252
1.10.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі	253
1.10.4. Методика розв'язування задач і приклади для просторової системи довільних сил	255
Запитання для самоконтролю	262
1.11. Центр паралельних сил і центр ваги	262
1.11.1. Центр паралельних сил	262

1.11.2. Координати центра паралельних сил	264
1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії.....	266
1.11.4. Визначення координат центра ваги тіла в інтегральній формі.....	271
Запитання для самоконтролю.....	272
1.11.5. Способи визначення координат центра ваги тіла.....	273
1.11.6. Центри ваги деяких однорідних тіл	278
Запитання для самоконтролю.....	283
Розділ II. КІНЕМАТИКА	284
2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки	284
2.1.1. Предмет кінематики	284
2.1.2. Основні положення кінематики точки.....	287
2.1.3. Способи задання руху точки. Векторний спосіб	288
2.1.4. Координатний спосіб задання руху точки .	293
Запитання для самоконтролю.....	299
2.1.5. Натуральний спосіб задання руху точки	299
2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами.....	302
2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат	302
2.1.8. Кривина кривої.....	304
2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат	306
2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.....	311
Задачі для самостійного опрацювання.....	319
Запитання для самоконтролю.....	319
2.2. Кінематика твердого тіла.....	320
2.2.1. Поступальний рух твердого тіла.....	320

2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху	323
Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла.....	325
Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі	327
Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла.....	330
Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла ...	334
Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла. Формула Ейлера	335
Векторний вираз лінійного прискорення точки обертового тіла	340
Передача обертального руху	343
Методика і приклади розв'язання задач	344
Задачі для самостійного опрацювання.....	345
Запитання для самоконтролю	346
2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла.....	347
Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи.....	349
Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла	350
Визначення швидкостей точок плоскої фігури.....	352
Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла на лінію, що їх з'єднує	354
Визначення прискорень точок плоскої фігури.....	355
Запитання для самоконтролю	358
2.2.4. Графоаналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла	358
Теорема про кінцеве переміщення плоскої фігури.....	358

Миттевий центр швидкостей	360
Окремі випадки визначення положення миттевого центра швидкостей	361
Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттевого центра швидкостей	364
Миттевий центр прискорень	369
Плани швидкостей і прискорень	371
Методика побудови планів швидкостей і прискорень	375
Задачі для самостійного опрацювання	385
Запитання для самоконтролю	386
2.3. Обертання твердого тіла відносно нерухомої точки (сферичний рух).	387
2.3.1. Визначення положення тіла. Кути Ейлера.	387
2.3.2. Теорема Ейлера-д'Аламбера	391
2.3.3. Кінематичні характеристики сферичного руху тіла	393
2.3.4. Швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі. Кінематичні рівняння Ейлера	395
2.3.5. Рух вільного твердого тіла	399
Запитання для самоконтролю	402
2.4. Складний рух матеріальної точки	403
2.4.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки	403
2.4.2. Теорема про додавання швидкостей точки	404
2.4.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень точки	407
Запитання для самоконтролю	410
2.4.4. Модуль і напрям прискорення Коріоліса ..	411
2.4.5. Методика розв'язання задач і приклад на складний рух точки	415

Запитання для самоконтролю	421
2.5. Складний рух твердого тіла	422
2.5.1. Додавання поступальних рухів тіла	423
2.5.2. Додавання обертань тіла відносно паралельних осей	424
2.5.3. Пара обертань	428
2.5.4. Додавання обертань відносно осей, що перетинаються.....	430
2.5.5. Додавання поступального і обертального рухів	433
Запитання для самоконтролю	438
До практичних занять з теоретичної механіки	440
Додатки.....	483
Додаток 1. Завдання для розрахунково-графічної роботи «Визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми»	483
Додаток 2. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил.....	502
Додаток 3. Варіанти індивідуального завдання для самостійної роботи «Плоска система довільних сил»	525
Додаток 4. Варіанти індивідуального завдання для самостійної роботи «Центр ваги плоского тіла»	542
Додаток 5. Довідкові матеріали.....	556
Література.....	570
Предметно-іменний покажчик	572

ПЕРЕДМОВА

Автори пропонують свій варіант підручника з курсу теоретичної механіки, спираючись на багаторічний досвід викладання цього предмету на кафедрі механіки і теорії механізмів і машин Національного університету біоресурсів і природокористування України. Матеріал підручника відповідає новій програмі курсу з теоретичної механіки для вищих технічних навчальних закладів. Автори намагалися поєднати ємність матеріалу з лаконічністю викладення.

Матеріал підручника відповідає сучасним вимогам до курсу теоретичної механіки для вищих навчальних закладів і викладений таким чином, що може бути корисним як для студентів денної, заочної і дистанційної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і для студентів, які навчаються за скороченими програмами. Частина матеріалу призначена для самостійного опрацювання. Підручник може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів технічного профілю III-IV рівнів акредитації.

Поряд із доступністю і чіткістю викладення матеріалу особливу увагу в підручнику приділено тлумаченню основних понять і положень теоретичної механіки та їхнього зв'язку з реальною дійсністю та виробничо-технічною практикою.

Запитання для самоконтролю, що наводяться після кожної глави, сприятимуть після їх опрацювання засвоєнню курсу теоретичної механіки та застосуванню її методів в інженерній практиці.

За змістом підручник має чотири основні розділи теоретичної механіки – статичу, кінематику, динаміку та основи аналітичної механіки. У матеріалах підручника висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні

питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає студентам у самостійній роботі, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних та розрахунково-графічних робіт. Значне місце відведено розв'язанню практичних інженерно-технічних задач, у тому числі і в галузі машинобудування, тут наводяться оригінальні авторські розрахунки у цих питаннях.

Матеріали теоретичної механіки досить повно висвітлені у вітчизняній літературі і на високому науковому рівні. Проте, підручників українською мовою, які могли б задовольнити всю гаму спеціальностей технічного профілю, недостатньо. Крім того, сучасні тенденції розвитку вищої освіти в країні викликають необхідність більш спрямованого орієнтування курсу на творчу самостійну роботу студентів і наближення його до майбутньої спеціальності. У підручнику поряд з теоретичним матеріалом наведено багато прикладів з типових задач, надається методика їх розв'язування різними способами, що повинно сприяти розвитку у студентів творчого мислення і навичок моделювання реальних технічних об'єктів.

Підручник складається з чотирьох основних розділів теоретичної механіки.

Перші два розділи розміщуються в першому томі: «Теоретична механіка. Частина I. Статика. Кінематика».

Два інших розділи розміщуються в другому томі: «Теоретична механіка. Частина II. Динаміка. Основи аналітичної механіки».

У розділі «Статика» у традиційному стилі викладено основні поняття механіки, аксіоми і теореми статички, розглянуто рівновагу тіл і систем тіл під дією різних систем сил, наведено умови їхньої рівноваги. Наведено методику і приклади розв'язування задач статички твердого тіла. Після кожної глави розміщено запитання для самоконтролю у процесі навчання. У відповідних місцях підручника стисло нагадуються і пояснюються деякі відомості з векторної алгебри і векторного аналізу, що необхідно для викладення тих чи інших положень теоретичної механіки.

У другому розділі підручника міститься матеріал теоретичної механіки «Кінематика», який складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія руху. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, тому що в останній потрібні кінематичні залежності і закони руху, а, з іншого, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

Для ефективного розв'язування задач автори намагаються створити навчальний комплекс, який складається із підручника, збірника спеціалізованих задач для групи спеціальностей, методичних посібників із завданнями для розрахунково-графічних робіт, методичних розробок і завдань для самостійної роботи студентів. Комплекс може бути корисний не тільки студентам вищих навчальних технічних закладів, але й інженерам, і викладачам.

Внесок авторів у підготовку рукопису підручника:

I розділ – Литвинов О.І. і Михайлович Я.М.

II розділ – Литвинов О.І. і Березовий М.Г.

III, IV розділи – Литвинов О.І., параграф 3.1.3. – Литвинов О.І. і Бойко А.В. Загальна редакція рукопису здійснена Литвиновим О.І.

Автори висловлюють щире вдячність співробітникам кафедри механіки і теорії механізмів і машин Національного університету біоресурсів і природокористування України за цінні поради під час підготовки матеріалів книги.

Особливої подяки, на думку авторів, заслуговує колектив редакційно-видавничого відділу Науково-методичного центру аграрної освіти.

ВСТУП

ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.

СТРУКТУРА КУРСУ

Теоретична механіка – це природнича фундаментальна наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і матеріальних систем.

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну у просторі протягом часу положень одних матеріальних тіл і матеріальних систем відносно іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу і, фактично, науковою базою майже всіх галузей сучасної техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на чотири основні розділи: статику, кінематику, динаміку і аналітичну механіку.

Статика вивчає умови рівноваги тіла під дією різних систем сил, умови спільної дії останніх на тіло або систему тіл, а також розробляє методи перетворення складних систем сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без урахування їх мас і незалежно від діючих сил.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією прикладених сил, які цей рух спричинюють.

Аналітична механіка вивчає найбільш загальні аналітичні методи розв'язання задач механіки складних вільних і невільних матеріальних систем з різними типами умов в'язі.

Предметом теоретичної або загальної механіки є матеріальні тіла у вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розміщення. Теоретична механіка вивчає спільні закономірності механічного руху матеріа-

льних тіл і механічних силових взаємодій між ними, а також взаємодій тіл з фізичними силовими полями. Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Тому теоретична механіка належить до фундаментальних природознавчих наук. Водночас, на відміну від низки загально-інженерних дисциплін (теорія механізмів і машин, опір матеріалів, будівельна механіка, деталі машин тощо) теоретична механіка вивчає найбільш загальні властивості руху і взаємодії тіл як абстрактних моделей.

У загальнонауковому контексті механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл і середовищ. Це, наприклад, аеромеханіка, небесна механіка, теорія коливань, електродинаміка, біомеханіка. Остання вивчає рух і взаємодію біологічних об'єктів. Теоретичні положення механіки допомагають зрозуміти життєві явища, а також передбачати їхні закономірності, бо критерієм істинності наших знань є практика.

Теоретична механіка широко застосовує у своїх теоремах методи математики і формальної логіки, методи подібності і абстракції. Предметом її досліджень є не самі матеріальні об'єкти, а їхні еквівалентні моделі: матеріальна точка, тверде тіло, матеріальна система. Як відомо, розвиток науки, у тому числі і природознавчої, йде від живого спостереження до абстрактного мислення, а від останнього – до практики. Це є справжній шлях пізнання істини.

Теоретична механіка має велике значення у підготовці інженерів усіх галузей народного господарства, є науковим фундаментом для вивчення таких загально-інженерних дисциплін, як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і роботів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеродинаміка, гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які правильно відображають об'єктивні реалії механічних

процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології. Таким чином, задача механіки – відкриття, пізнання і наступне практичне застосування кількісних і якісних закономірностей механічного руху, який має місце в природі і здійснюється людиною в його практичній діяльності. Механіка збагачує людей новими методами розкриття таємниць природи, справжнього змісту її різноманітних явищ і технічної практики.

Всесвіт – це матерія, яка закономірно і взаємозв'язано рухається у просторі протягом часу. Знаючи про такі зв'язки між матеріальними об'єктами світу, перший російський академік М.В. Ломоносов писав: «Для изучения явлений природы необходимо выспрашивать у осторожной и догадливой геометрии, советоваться с точною и замысловатою механикой, выведывать через проницательную оптику». Сучасна наука має незрівнянно ширший арсенал засобів дослідження явищ природи.

Матерія вічно перебуває у неперервному русі і безперервно розвивається. Рух є основним атрибутом матерії і формою її існування. Світ є безмежним у просторі і нескінченним у часі формами існування матерії. Притаманний матерії рух є способом збереження матерії, переконливим доказом нерозривності матерії і руху, матерії і енергії, взаємозв'язку і взаємного переходу різних форм матерії. Відмінність форм руху матерії становить об'єктивну базу для окремих відповідних галузей науки, що вивчають окремі закономірності природи. Закономірності найпростішої механічної форми руху матерії вивчає механіка, проте, вона має відношення до всіх явищ природи і творень техніки, до всього природознавства, тому що механічний рух тією чи іншою мірою супроводжує всі інші форми руху матерії.

Теоретична або загальна механіка пронизує всі механічні процеси у мікро- і макросвіті, необхідна під час вивчення поведінки плазми у магнітному полі і становить значну частину науки про Землю, без неї неможливе проектування і будівництво.

Без знання механіки неможливо провести розрахунки технологічних процесів у машинобудуванні, металургії, легкій промисловості тощо. Теоретична механіка – це частина загальної механіки, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху макроскопічних тіл.

Оскільки наукові уявлення про простір і час розвиваються у зв'язку з розвитком понять про матерію, рух і взаємодію, то з відносних уявлень про всесвіт наука поступово наближається до абсолютної істини. Наблизитись до абсолютної істини в принципі можливо, якщо наша технічна цивілізація зможе не руйнувати своїми «могутніми силами» наданий їй у тимчасове користування найдорожчий для нас «простір і час».

На думку І. Ньютона, засновника класичної механіки, простір існує сам собою, незалежно від речей, і є необмеженою порожниною, абсолютним вакуумом, що має три виміри: довжину, ширину і висоту. Простір вважається нерухомим і незмінним, абсолютно проникним, який не впливає на рух тіл і сам не зазнає впливу з боку тіл, що його наповнюють. А час – це тривалість, яка існує незалежно від подій, що відбуваються, і спливає безперервно і рівномірно від минулого до майбутнього. Різні моменти часу відрізняються один від одного лише подіями, що відбуваються в ці моменти.

Методом ідеалізації Ньютон запропонував упорядкувати уявлення про простір і час як деякі вмістища тіл, які не залежать від цих тіл і їхнього руху. За сучасними уявленнями цей *абсолютний евклідов тривимірний* однорідний і ізотропний *простір* і *абсолютний* арифметизований *час* лише наближено відображають реальні властивості природи, але, як відомо за багатовіковим досвідом, для руху тіл зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла, ця ідеалізація дає достатню для широкої практики точність, хоча є першим наближенням до реального простору і часу.

Традиційно склалося, що за характером задач теоретична механіка поділяється на статичу, кінематику, динаміку і аналіти-

чну механіку. Такий поділ значно полегшує вивчення механічного руху тіл і дозволяє пов'язати вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами інженерно-технічних спеціальностей.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською класичною механікою на відміну від інших напрямів у механіці, як, наприклад, релятивістська механіка. Класична механіка спирається на систему аксіом, які накопичені у галузі механіки історичною практикою. Сформулюємо коротко закони Ньютона, які є фундаментом класичної механіки.

Перший закон Галілея – Ньютона

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і пряминолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не змінить цей стан.

Цей закон, який називають законом інерції, встановлює головну властивість реальних фізичних тіл: зберігати свій рух або спокій, якщо тіла перебувають у цих станах. Ця внутрішня властивість тіл називається інертністю, кількісною мірою якої є маса. Під ізольованою матеріальною точкою розуміють вільне тіло, таке, що дія на нього з боку інших тіл є взаємозрівноваженою. Рух тіл за таким законом називається рухом по інерції. Якщо тіло відхиляється від цього руху, то воно дістає прискорення.

Закон передбачає інерціальну Галілеєву систему відліку, відносно якої цей закон виконується. За найбільш точну інерціальну систему використовують геліоцентричну систему координат з початком у центрі мас сонячної системи. Ця точка розміщується зовсім недалеко від центра самого сонця.

Другий закон Ньютона

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює прикладеній силі і спрямована вздовж вектора сили.

Під кількістю руху матеріальної точки, за визначенням Ньютона, розуміється векторна величина, яка дорівнює добутку

інертної маси точки на швидкість. У класичній механіці маса вважається сталою скалярною величиною, не залежною від кінематичних характеристик руху самої точки. Поняття маси, вперше введене І. Ньютоном, передбачає незалежність її від природи прикладених сил. Маса є незмінною в земних умовах, в той час як сила ваги тіл змінюється залежно від паралелі.

Другий закон, що встановлює зв'язок між силою і прискоренням точки у випадку для незмінної маси точки, є **основним законом динаміки матеріальної точки**.

Третій закон Ньютона

Кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія. Сили взаємодії двох матеріальних точок дорівнюють одна одній, напрямлені у протилежні сторони і мають спільну лінію дії.

Третій закон стосується системи матеріальних точок. Поширення законів Ньютона на систему матеріальних точок і тіл, на які діє система довільних сил, пристосування їх до неінерціальних систем відліку й становить головний зміст курсу теоретичної механіки. У курсі поєднуються методи поширення дії законів Ньютона з таким математичним апаратом, як алгебраїчні і диференціальні рівняння, що дає можливість застосовувати аналітичні методи і комп'ютерні технології.

Четвертий закон Ньютона

Прискорення, яке отримує точка під одночасною дією декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які отримувала б точка під дією кожної сили окремо.

Четвертий закон називається законом незалежності дії сил або принципом суперпозиції.

КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ НАРИС РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ

Історично механіка як відомості про найпростіші машини і механізми починається з глибокої давнини. Важіль, клин, похила площина, коток, які надавали значний вииграш у силі, використовувались у Стародавньому Єгипті і Вавилоні. Проте, на наш погляд, справжні умови будівництва єгипетських пірамід і вавилонської вежі значною мірою приховані часом.

Перші трактати з механіки, що збереглися, де розглядався устрій найпростіших машин, ґрунтуючись на досвіді застосування різних механічних пристроїв, з'явилися у Стародавній Греції. У грецькій філософії існували різні механічні концепції. За однією з них матерії властивий саморух, без якого вона не може існувати, а природа нічого не містить, крім матерії, яка рухається у порожньому просторі. Послідовними представниками цієї концепції були атомістики Геракліт, Демокріт, Епікур, Лукрецій.

Термін «механіка» у буквальному перекладі з грецької означає «хитромудрість». Цей термін вперше був вжитий у III в. до н.е. учнем видатного давньогрецького філософа Аристотеля, вихователя Олександра Македонського, в момент спостереження за роботою важеля, коли здавалося, що «мале долає велике». В працях Аристотеля (384 – 322 рр. до н.е.) «Механічні проблеми», «Фізика», «Про виникнення і знищення», «Метафізика» міститься не тільки багато цінного, але і багато неправильного. Механіку Аристотеля було побудовано не на дослідах, а на абстрактних міркуваннях і висновках його філософії: осмислити все суще і подати у найбільш простій і гармонічній формі.

Нехтування дослідом, який, на думку давніх греків, є справою рабів, призвело до отримання Аристотелем результатів, які не підтверджуються практикою. Він вважав, що в околі земної

поверхні важкі тіла падають швидше, а легкі – повільніше, навіть, якщо нехтувати опором повітря. Механічний рух Аристотель поділяв на прямолінійний і криволінійний, останній з яких є більш «досконалим», а найдосконалішими кривими є кола, вздовж яких рухаються створені Богом планети сонячної системи. Теологічні моменти у фізичному вченні Аристотеля були роздуті середньовічною схоластикою і догматизовані церковними декретами, будь-які заперечення проти них проголошувалися ерессю.

Історики сходяться на тому, що зародження наукових основ механіки пов'язане з ім'ям видатного механіка і математика усіх часів Архімедом (287 – 212 рр. до н.е.). Він перетворив механіку в точну науку, зробивши відкриття в математиці, гідростатиці, створив теорію рівноваги важеля і вчення про центр ваги тіл, збагатив античну техніку значною кількістю чудових винаходів.

У наступні півтори тисячі років розвиток механіки було зупинено. Дешева людська праця і низький рівень техніки не створювали умов для розквіту цієї науки. Приватне господарство було розраховано лише на персональні потреби.

Тільки з XII ст. відкрилися перші університети Європи, але готували вони переважно служителів духівництва і правників. Навіть у Парижі викладати геометрію було дозволено у 1355 р., до того ж – лише на свята. Основою наук вважалися праці Аристотеля, з яких було вилучено живий зміст. Теоретичну традицію античного наукового спадку було втрачено остаточно і під механікою розуміли тільки будівельне й інженерне мистецтво.

Утім з часом, у середині другого тисячоліття н. е., починають набирати темпи торговельні відносини, а з ними й промисловість. Перед механікою постали проблеми в галузі техніки, пароплавства, у військовій справі. Для ефективної експлуатації шахт і копалин необхідно було піднімати руду з великої глибини, будувати вентиляційні пристрої, відкачувати воду. Артилерія потребувала від механіки розв'язання таких питань, як міцність гармати за найменшої ваги, залежність опору повітря від швидкості снаряда, визначення

траєкторії руху снаряда в повітрі і порожнині.

Епоха величезних відкриттів, бурхливий розвиток теоретичної традиції починається після середньовічного застою з перших десятиліть XVI ст. у галузі механіки і суміжних галузях (машинознавство, гідраліка, астрономія, математика). Значний внесок у механіку зробили такі видатні вчені, як Кузанський, Леонардо да Вінчі, Стевін, Тарталья, Бенедетті, Кардано, Кеплер та ін.

Один із попередників Коперника Микола Кузанський висунув ідеї про відносний рух і обертання Землі, а в галузі динаміки він зробив перші кроки до поняття інерціального руху.

Вияткове значення для науки мало відкриття видатним вченим Миколою Коперником (1473–1543) геліоцентричної системи світу. На відміну від геоцентричної системи Птолемея (II ст. н.е.), яку було догматизовано католицькою церквою, М. Коперник вважав, що Земля і всі інші планети рухаються круговими орбітами навколо Сонця. Результати сорокарічної праці було узагальнено Коперником у книзі «Про обертання небесних сфер», з появи якої починається поступове звільнення природознавства від теології.

Німецький астроном Йоганн Кеплер (1571–1630), обчисливши результати наполегливих спостережень датського астронома Тіхо Браге, відкрив закони руху планет, завершивши створення кінематики сонячної системи, і довівши, що планети рухаються еліпсами, в одному із фокусів яких перебуває Сонце. Це був початок небесної механіки і революція у світогляді людей.

Славнозвісний художник і геніальний вчений, механік та інженер Леонардо да Вінчі (1452 – 1519) досліджував тертя в машинах, рух тіла на похилій площині, працював над проблемами теорії механізмів, увів нове поняття в механіці – момент сили, намагався будувати літальні апарати. Він вважав, що рівновага блока з нерухомою віссю можлива тільки за умови, що сума моментів сил відносно точки підвісу блока дорівнює нулю.

Послідовним представником геометричної статистики був Сімон Стевін (1548–1620), голландський математик і механік,

який зіграв завершальну роль у розвитку геометричного напрямку елементарної статyki і гідростатyki, ґрунтуючись на основних постулатах Архімеда. Він встановив закон складання і розкладання сил, довів теорему про три непаралельні сили, побудував силовий трикутник.

У праці «Нова наука» Нікколо Тарталья (1499–1557) зробив першу пробу математизації питань балістики і перші кроки до розуміння єдності аристотелівських «природного» і «наси́льницького» рухів.

З ім'ям Джеронімо Кардано (1501–1576) зв'язують подальшу розробку кінематичного напрямку у статистиці, зі створенням карданної передачі і карданного підвісу.

Учень Тарталі Джованні Бенедетті (1530–1590) завдав вирішального удару по аристотелівській теорії щодо двох його фундаментальних положень: досконалого «природного» руху не існує; у природі змінного «природного» і «наси́льницького» рухів немає принципової різниці.

Сучасник Кеплера Галілео Галілей (1564–1642), геніальний вчений, підтримавши систему світу Коперніка, поставив під сумнів двотисячолітній авторитет Аристотеля.

Галілей не хотів мириться з поглядами Аристотеля, він застосовував наукові методи замість звичайних у той час схоластичних міркувань.

Завдяки працям Галілея розвиток механіки безпосередньо пов'язується із запитами тогочасної техніки, і ці праці мали фундаментальне значення для розвитку динаміки. Він вперше сформулював принцип відносності класичної механіки, встановив закон інерції і закони вільного падіння матеріальних тіл. Галілей увів поняття про швидкість і прискорення і довів, що траєкторією руху снаряда, кинутого у порожнині під деяким кутом до горизонту, є парабола. Таким чином, він є засновником не тільки загальної механіки, але й зовнішньої балістики, науки про рух снаряда у повітрі. Галілей експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, закон пропорційності між вагою тіла і його

масою, досліджував рух математичного маятника.

Галілея вважають засновником експериментальних методів дослідження в механіці. Саме методом ретельних дослідів він встановив закон ізохронності коливання маятника, закони руху точки на похилій площині, а також закони падіння тіл.

Французький філософ, математик, фізик Рене Декарт (1596–1650) вперше впроваджує у механіці поняття кількості руху тіла, відомої в наш час як першої основної міри механічного руху, і відкриває закон збереження кількості руху. У працях Декарта вперше досліджується питання про додавання довільного числа рухів матеріальної точки.

Видатний голландський учений Хрiстiан Гюйгенс (1629–1695) довів низку теорем про відцентрову силу, теорію удару, повну теорію фізичного маятника, визначивши центр хитань. Він вперше впровадив у механіку поняття осьового моменту інерції. Гюйгенс створив конструкції маятникових годинників і винайшов регулятор ходу кишенькових годинників. Недарма І. Ньютон, посилаючись на твори Гюйгенса, називав його «Щонайвищий Гюйгенс».

Роберт Гук (1635–1703), англійський природознавець, відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією. Цей закон і у наш час застосовується під час розрахунків конструкцій на жорсткість, міцність і стійкість.

Німецький математик, філософ і механік Вільгельм Лейбніц (1646–1716) вперше ввів термін «динаміка», впровадив у механіку поняття «живої сили» (кінетичної енергії), відомої в наш час як другої основної міри механічного руху, і встановив закон збереження «живих сил», що є першим формулюванням закону збереження енергії.

Видатний англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1642–1727) є справжнім засновником класичної механіки. Він створив гармонічну систему механіки: чітко сформулював її основні закони, що відомі в сучасній літературі як перший, другий

і третій закони Ньютона; ввів поняття маси і узагальнив поняття сили; розв'язав цілу низку проблем у механіці. Більшість відкриттів Ньютон зробив замолоду: на початку 1665 р. він відкрив свій біном, у травні – метод дотичних, у листопаді – диференціальне числення; у січні 1666 р. – теорію кольорів, у травні – інтегральне числення, у серпні – відкрив Закон всесвітнього тяжіння.

Користуючись законом всесвітнього тяжіння, Ньютон розв'язав низку задач теоретичної і небесної механіки. Головний твір Ньютона, в якому подано чітке і систематичне викладення класичної механіки, називається «Математичні початки натуральної філософії». Він написаний латинською мовою і вперше виданий у 1687 р. На російську мову його переклав в 1936 р. академік О.М. Крилов, який зробив численні примітки.

Ньютон сформулював основний закон динаміки у диференціальній формі, що дало можливість розглянути численні задачі, де рух визначається змінними силами. Після цих праць задачі Галілея перетворилися в прості окремі випадки. Ньютон сформулював закон паралелограма сил і закон додавання рухів, вперше звернув увагу на різницю між поняттями інертної маси і гравітаційної маси. Разом з видатним німецьким ученим Вільгельмом Лейбніцем (1646–1716) Ньютон є фундатором диференціального й інтегрального числення.

Швидкий розвиток набула механіка в XVIII столітті. Багато відкриттів у механіці і математиці зробив видатний учений Леонард Ейлер (1707–1783), академік Санкт-Петербурзької академії наук, швейцарець за походженням, який справив значний вплив на розвиток фізико-математичних наук у XVIII столітті.

Ейлер уперше аналітично виклав механіку, довів одну з основних теорем динаміки – теорему про зміну кінетичного моменту; побудував теорію моментів інерції; ввів поняття потенціального силового поля. Заслуги Ейлера в небесній механіці, прикладній механіці, механіці суцільних середовищ, теорії стійкості надзвичайно великі.

Перший трактат Ейлера мав назву «Механіка або наука

про рух в аналітичному викладенні», в якому він дав математичне формулювання другого закону Ньютона в диференціальній формі, розглядаючи пропорційність сили до приросту швидкості, розвив теорію вільного і невільного рухів матеріальної точки в натуральних координатах. У праці «Теорія руху твердих тіл» Ейлер розробив кінематику і динаміку твердого тіла, подаючи в загальному вигляді диференціальні рівняння руху твердого тіла. Титанічна творча сила Ейлера є неперевершеною в історії науки.

Працями Ньютона і Ейлера було майже завершено побудову наукової теорії механічних явищ. У галузі механіки матеріальної точки було вирішено всі принципові проблеми і подальший інтерес учених зосередився на питаннях механіки системи матеріальних точок. Наступний розвиток механіки був зосереджений у напрямі пошуку найбільш зручного математичного апарата для отримання і розв'язку диференціальних рівнянь опису руху матеріальних систем.

Сучасник Ейлера перший російський академік М.В. Ломоносов (1711–1765), геніальний учений, мав великий вплив на розвиток всієї науки і, зокрема, на розвиток механіки як основи природознавства. Йому належить відкриття загального закону природи – закону збереження матерії та руху, з якого всі інші закони збереження механіки випливають як окремі випадки.

Нестворюваність і незнищуваність матерії і руху, здатність матерії до перетворень, органічний зв'язок матерії з рухом є, згідно із законом Ломоносова, доказом єдності світу і загальності руху.

Французький математик і механік Жан Лерон д'Аламбер (1717–1783) видав у 1743 р свій видатний твір «Трактат із динаміки», в якому довів, як звести рівняння руху матеріальної системи до задачі динамічної рівноваги, відкривши важливий принцип теоретичної механіки.

Протягом XVIII ст. було успішно розв'язано багато проблем теоретичної механіки і на порядку денному постала задача

створення загального методу аналітичного розв'язання всіх механічних проблем. Такий метод відшукав Жозеф Луї Лагранж (1736–1813). Його видатна праця «Аналітична механіка» (1788) викладена без жодного креслення на базі відкритого ним методу узагальнених координат. Лагранж не обмежується застосуванням принципу можливих переміщень для задач статички, а поєднує останній з принципом д'Аламбера і отримує в загальному вигляді диференціальні рівняння руху матеріальної системи, які носять його ім'я, застосовуючи їх для розв'язання важливої задачі про малі коливання механічних систем. Російський переклад цієї книги було здійснено у 1950 р.

Паралельно з аналітичними методами розвивались геометричні методи механіки. Отже, видатний французький геометр Луї Пуансо (1777–1859) вперше в 1803 р. виклав статику у науковій праці «Елементи статички» в такій формі, в якій вона і тепер викладається у вищих навчальних технічних закладах. Пуансо впроваджує в механіку поняття пари сил, розробляє теорію пар і застосовує цю теорію для розв'язання в загальному випадку задачі про зведення до найпростішого виду будь-яких систем довільних сил, прикладених до твердого тіла, і для знаходження умов рівноваги твердого тіла. Багато відкриттів і геометричних інтерпретацій законів механіки зробив Л. Пуансо в кінематиці і динаміці. До них належить праця з вивчення геометричним методом руху тіла навколо нерухомої точки. Він завершує оформлення геометричного напрямку в статистиці, початок якої пов'язаний з ім'ям Архімеда.

Подальшого розвитку аналітична механіка набула у працях П.С. Лапласа (1749–1827), К.Г. Якобі (1804–1851), В.Р. Гамільтона (1805–1865), Г.Р. Герца (1857–1894) тощо.

Видатним представником аналітичного напрямку в теоретичній механіці був наш славетний земляк академік М.В. Остроградський (1801–1861), автор багатьох праць з аналітичної механіки, математики і математичної фізики. Він узагальнив принцип можливих переміщень для односторонніх

в'язей і вперше застосував його в загальній теорії удару, а також у загальній формі встановив один з основних принципів механіки – принцип найменшої дії. Його учень І.А. Вишнеградський є засновником теорії автоматичного регулювання.

Багато праць у галузі механіки машин і механізмів має видатний математик і механік академік П.Л. Чебишев (1821–1894) – засновник російської школи теорії механізмів.

Видатних результатів у різних галузях механіки досягнув геніальний учений М.Є. Жуковський (1847–1921), засновник авіаційних наук: експериментальна аеродинаміка, динаміка літака (стійкість і керуваність), розрахунок літака на міцність. Його твори збагатили всі розділи теоретичної механіки: рух маятника, теорія дзиги, обчислення планетних орбіт, теорія диференціальних рівнянь, хитання кораблів на океанських хвилях, рух твердого тіла з порожнинами, заповненими рідиною, гідравлічний таран, коливання паровоза на ресорах, будівельна механіка, динаміка автомобіля тощо. Професор М.Є. Жуковський протягом 50 років був мозковим центром, навколо якого групувались інженери, розв'язуючи різні теоретичні і прикладні проблеми механіки.

Видатним учнем М.Є. Жуковського був С.О. Чаплигін, який виконав нові дослідження з механіки рідини та газу, створив теорію крила (крила з передкрилком і крила з щитком) і заснував сучасні наукові основи гідроаеромеханіки.

Видатне значення для теоретичної механіки мають твори російського математика О.М. Ляпунова (1857–1918). Найбільш значуща його праця – створення теорії стійкості руху. Вона має велике технічне застосування і багато хто серед російських, українських та іноземних учених продовжують її розвивати.

Серед великих вчених і педагогів слід відзначити І.В. Мещерського (1859–1935), творця динаміки тіл змінної маси. Цей розділ науки він створив ще в 1897 р., але застосування затрималося до часів розвитку ракетобудування. Тепер механіка тіла змінної маси є основою теорії реактивних двигунів і динаміки ракет. На його праці «Сборник задач по теоретической меха-

нике» досі вчать всі інженери країн СНД, він витримав уже понад сорок видань. Доречі, є «решебник» з цього збірника, зроблений німецькими ученими.

Видатною у всіх відношеннях є постать геніального вченого академіка О.М. Крилова (1863–1945). Він є автором праць з теорії корабля, теорії пружності, балістики, теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. О.М. Крилов є фундатором російської школи механіків-кораблестроїв, який започаткував дослідження і створення теорії плавучості і остійності корабля, хитами корабля. О.М. Крилов – видатний учений, інженер, винахідник і педагог-методист вищої школи.

Засновником динаміки космічного польоту був видатний учений К.Е. Цюлковський (1857 – 1935). Праці К.Е. Цюлковського мали великий вплив на подальший розвиток досліджень з ракетодинаміки. Вони відкрили шлях ґрунтовним дослідженням Ф.А. Цандлера (1887 – 1933) і Ю.В. Кондратюка (1897 – 1942). Найбільш видатним продовжувачем ідей К.Е. Цюлковського був С.П. Корольов (1906 – 1966), геніальний вчений і конструктор у галузі ракетної і космічної техніки, керівник перших космічних польотів людини.

Теоретична механіка продовжує швидко розвиватись і тепер. Перед сучасними вченими постають великі задачі: засвоєння космосу, автоматика і телемеханіка, робототехніка і сучасна технологія, машинобудування тощо. У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки і технології – робототехніка, основою якого стала теоретична механіка та теорія механізмів і машин. Особливістю робототехніки є те, що вона об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напрямку зробили: К.В. Фролов, Е.І. Воробйов, А.Г. Овакімов, Р. Уікер, М. Вулкобратович, М.З. Згуровський та інші.

Бурхливо розвинулась у минулому столітті механіка нелінійних коливань. Великий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським ученим: М.М. Боголюбову, Ю.О. Митропольському, М.М. Крилову та іншим.

РОЗДІЛ I

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Предмет і задачі статички.

В'язі, реакції в'язей

1.1.1. Предмет статички. Основні поняття

Теоретична механіка як наука, вивчаючи певну форму руху матерії, розглядає не реальну природу з усім її різноманіттям, а ідеальні об'єкти – моделі: матеріальну точку, матеріальну систему, абсолютно тверде тіло.

Згадаємо про ці основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з елементарного курсу фізики. Найпоширенішою моделлю, яка відображає протяжність, тобто, геометричну форму матеріального тіла і розподіл маси у деякому геометричному об'ємі, є абсолютно тверде тіло.

Абсолютно тверде тіло – це матеріальне тіло, в якому в процесі взаємодії з іншими тілами відстані між двома довільними точками не змінюються, тобто, деформації тіла під дією сил вважаються малими і можуть не враховуватися.

Розглядаючи матеріальні тіла як абсолютно тверді, можна значно спростити дослідження умов взаємодії цих тіл, а також умов збереження свого початкового механічного стану. Ця модель є достатньо досконалою лише для вивчення окремого випадку руху тіла – стану спокою, оскільки рух окремих точок тіла у загальному випадку не однаковий. Тому доводиться починати дослідження руху з найбільш простої моделі – матеріальної точки.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло певної маси, розмірами і формою якого, вивчаючи його рух, можна знехтувати в умовах певної задачі.

Чи можливо розглядати заданий об'єкт як матеріальну точку, визначається не розмірами цього об'єкта, а ступенем ідеалізації і властивостями руху. Так, рух планет сонячної системи відносно і навколо Сонця можна розглядати як рух взаємопов'язаних точок, що доведено багаторічною практикою астрономів.

Система матеріальних точок (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємозумовлені.

Матеріальні системи або механічні системи, можуть бути змінними і незмінними. У змінній системі відстані між точками в процесі руху або спокою можуть змінюватися.

У незмінній системі взаємне розміщення точок під час її руху або спокою зберігається. Оскільки кожне матеріальне тіло є системою матеріальних точок, то абсолютно тверде тіло є незмінною системою точок, які безперервно заповнюють деяку частину простору.

Вивчення руху рідини, газів, повітряних потоків, а також механічного руху тіл, який суттєво залежить від їхньої деформації, ґрунтується на такій абстракції, як *суцільне середовище*. Найпростішим прикладом суцільного середовища є модель абсолютно твердого тіла. Більш загальний образ суцільного середовища об'єднує пружні, рідинні, газові та інші тіла. Серед таких моделей можна відзначити *абсолютно пружне тіло, пластичне тіло, ідеальну рідину, в'язку рідину*.

1.1.2. Задачі статички. Основні визначення

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки – статистику, сформулюємо задачі статички:

- визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;
- розробка методів перетворення довільних векторних систем сил з метою їх спрощення і заміни найменшою кількістю силових факторів.

В основу цього розділу механіки покладено аксіоми статички, які розглянемо далі. А зараз зупинимося на основних поняттях статички, серед яких одним із головних є поняття сили, а також – на деяких визначеннях.

Дослідами доведено, якщо рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відхиляється від рівномірного і прямолінійного руху, то ця точка взаємодіє з навколишніми тілами

Сила, прикладена до конкретного тіла, – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, інтенсивність і напрям взаємодії.

З цього класичного визначення сили і з спостережень випливає, що *сила* є величиною векторною, а тому має *три* визначальних *параметри*: чисельне значення або *величина* сили (модуль), *напрямок* дії у просторі і *точку прикладання*. Дія сили на точку залежить від напрямку сили і від чисельного значення сили.

Напрямок сили визначається тим напрямком, за яким починає рухатися точка, що була у стані спокою, якщо до неї прикладається сила. Чисельне значення сили (модуль сили) є величиною, що дорівнює добутку маси точки на модуль прискорення, яке надає тілу ця сила (закон Ньютона).

Взаємодія означає *залежність руху* однієї частки матерії *від руху* і наявності *інших часток* матерії. Це перше, що виступає перед нами, коли ми розглядаємо рухому матерію загалом. Фізичні властивості простору і часу, пов'язані з фізичними по-

лями, не враховуються в початкових уявленнях класичної механіки про простір і час у тій формі, в якій вона реалізується в реальному світі. Класична механіка не розглядає фізичних причин впливу матерії на рух і тому вводить ще одну ідеалізацію – *силу взаємодію*. Заслугою І. Ньютона є те, що він поклав в основу механіки кількісні закони дії сил незалежно від їхньої фізичної природи. Лише механічний ефект взаємодії між матеріальними тілами пов'язаний зі зміною кінематичного стану тіл.

На розрахункових силових схемах *силу зображують у вигляді вектора* довільної довжини (крім випадків графічної статистики, де силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу \vec{F} , зображену вектором \overline{AB} і прикладену у точці A , яка діє вздовж лінії дії сили MN .

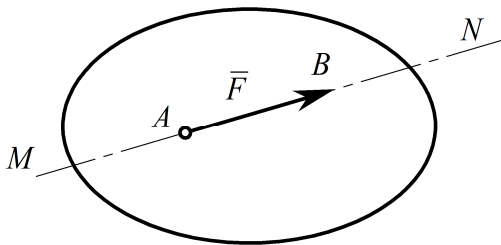


Рис. 1.1

У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиницею вимірювання сили є ньютон (H) або кілоньютон (κH). Один ньютон – це така величина сили, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 мс^{-2} .

Зосереджені сили – це сили, що *прикладаються* до тіла у будь-якій окремій його *точці*. Сили, що діють на всі точки цієї частини поверхні або об'єму тіла, називаються *розподіленими*.

Поняття зосередженої сили є умовним: практично неможливо прикласти силу в одній точці. Зосереджені сили є, фактично, рівнодійними деяких систем розподілених сил. Напри-

клад, сила ваги твердого тіла прикладається у центрі ваги рівнодійною сил ваги окремих частинок тіла.

Система сил – це *сукупність декількох сил*, які діють на це тіло або матеріальну систему одночасно. Окремі сили системи сил – *складові* цієї системи.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які в разі заміни на таку саму іншу *не порушують* кінематичного *стану тіла*. Еквівалентність систем означає, що ці системи викликають однаковий кінематичний стан тіла. Якщо система сил еквівалентна нулю, то така система називається *зрівноваженою системою сил*.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, *дія якої еквівалентна* дії заданої *системи сил* $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

$$\vec{R} \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

Зрівноважувальна сила – це сила, яка за величиною *дорівнює рівнодійній силі*, розміщена з нею на одній прямій, але *протилежна за напрямом*.

1.1.3. Аксиоми статyki

В основу статyki покладено аксиоми, тобто, деякі твердження, що приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практичною діяльністю, дослідами і спостереженнями. В аксіомах статyki про сили відображено властивості сил, що діють на тверде тіло.

Перша аксіома (про дві сили)

Абсолютно тверде *тіло перебуває в рівновазі* під дією двох сил, якщо вектори цих сил *рівні за модулем* (числовим значенням), спрямовані на одній прямій у протилежних напрямках.

Це аксіома про дві сили, які є найпростішою системою зрівноваженої системи сил. На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які мають одна-

кові модулі $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, розміщені на одній прямій MN і мають протилежні напрями. Точки прикладання сил можуть збігатися. Таким чином, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформованого твердого тіла вона не завжди справедлива.

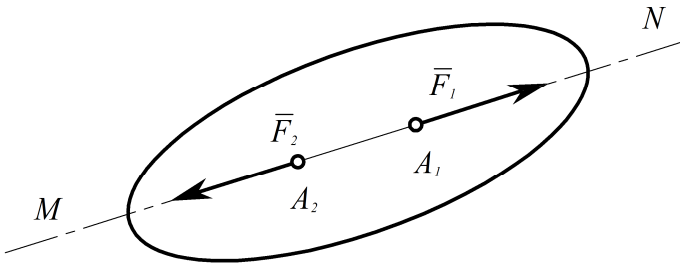


Рис. 1.2

Друга аксіома (про виключення сил).

Первісний стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Систему зрівноважених сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) показано на рис. 1.2.

Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил. Аксіома надає можливість побудови еквівалентних систем сил, вводячи поняття *векторного нуля* як простішої системи двох рівних за величиною і протилежних за напрямом сил, якою користуються під час доведення теорем.

Наслідок

Дія сили на тіло не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили в межах цього тіла.

Наслідок з двох перших аксіом інформує, що *вектор сили є ковзним вектором*, тобто точка його прикладання може бути перенесена в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили без порушення рівноваги. Доведемо це твердження.

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили \vec{F}_1 , який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві рівні за модулем сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 , такі, що $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$, а $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$. Згідно з першою аксіомою ці сили зрівноважені, а згідно з другою – їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по-іншому: як силу \vec{F}_2 , яка дорівнює силі \vec{F}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\vec{F}_1, \vec{F}_3) , яку можна відкинути. Наслідок доведений.

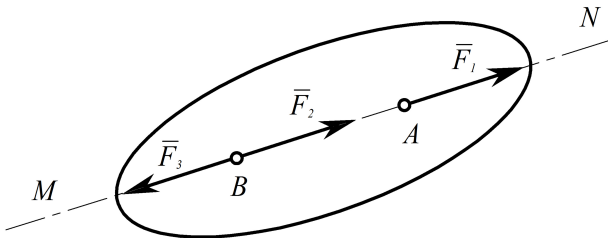


Рис. 1.3

Третя аксіома (про паралелограм сил).

Рівнодійна двох непаралельних сил, прикладених до тіла в одній точці, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах і прикладена в точці їх перетину.

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) у точці A прикладені дві непаралельні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$ цих сил.

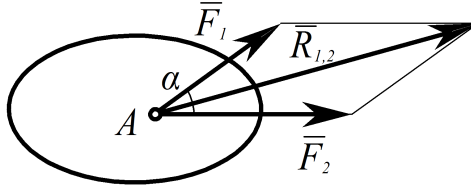


Рис. 1.4

Таким чином, третя аксіома статички дає можливість геометрично, векторно додати дві сили, що прикладені в одній точці, тобто, визначає модуль, точку прикладання і напрям рівнодійної як векторної суми двох сил

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Заміна двох сил однією рівнодійною силою за правилом паралелограма називають *векторним додаванням сил*.

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто, модуль рівнодійної, визначається за допомогою теореми косинусів

$$R_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладено в одній точці і розміщено під прямим кутом, а також, якщо вони збігаються за напрямом або спрямовані у протилежні боки.

Більш зручним способом визначення модуля і напрямку рівнодійної сили відносно до прямокутних осей координат для кількості сил більше за дві є аналітичний метод проекцій, який розглядається далі.

Четверта аксіома (про дію і протидію).

Ця аксіома носить назву аксіоми про рівність дії і протидії і є одним із основних законів механіки. Ньютон сформулював її так: «будь-якій силі дії є рівна, але протилежна сила протидії». У статистиці цю аксіому застосовують для твердих тіл, які контактують шляхом стикання або на відстані за допомогою силових полів.

Сили взаємодії, з якими два тіла діють одне на одне, дорівнюють за модулем, спрямовані вздовж спільної прямої у протилежні сторони.

Слід зазначити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, вони не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл або до різних точок одного і того самого тіла, що взаємодіють одна з одною. Під дією цих сил вільні тіла рухатимуться, віддаляючись чи наближаючись одне до одного.

П'ята аксіома (принцип затвердіння).

Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не порушиться, якщо, не змінюючи форми, розмірів і положення цього тіла у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Ця аксіома має назву принципу затвердіння і дає змогу розв'язувати задачі статички гнучких тіл (нитка, трос, пас, канат, ланцюг тощо) методами статички твердого тіла.

Із аксіоми випливає, що умови рівноваги твердого тіла є необхідними і для рівноваги деформованого тіла, але ці умови не достатні для рівноваги деформованого тіла.

Сформульовані у цьому параграфі аксіоми є тією основою, на якій будується вся статика сил, що прикладені до твердого тіла. Аксіоми статички характеризують властивості сил, прикладених до тіла. Але вони не враховують матеріальних вла-

стивостей тіла, пов'язаних з наявністю маси чи її розподілом, що суттєво впливає під час руху тіла. У повному обсязі згадане врахування міститься в законах динаміки.

1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні і невольні. *Тіло або матеріальна система вважаються вільними*, якщо вони мають можливість під дією прикладених сил рухатись у просторі в будь-якому напрямі. Це означає, що на рух тіла або системи не накладені обмеження, тобто, вони не контактують з іншими тілами або фізичними полями.

Тіло, свобода переміщення якого у просторі обмежується іншими тілами або умовами, вважається *невільним*.

Тіла, фізичні поля або умови, які обмежують рух цього тіла і зберігаються за будь-яких сил, прикладених до твердого тіла, називаються в'язями.

Якщо тіло невольне, то вважають, що на нього накладені в'язі. *Силова, механічна дія в'язі на це тверде тіло має назву сили реакції в'язі* (в подальшому «реакція»). Це виходить з того, що ефект дії в'язі такий самий, як і дія сили, внаслідок чого дії в'язей можна замінити відповідними силами, які і називаються *реакціями в'язей*. Слід зауважити, що за законом дії і протидії і тіло діє на в'язь із силою, яка дорівнює реакції, але їй протилежна.

Реакції в'язей за своєю природою відрізняються від інших сил, які діють на тіла і які прийнято називати *активними*. Ця різниця полягає у тому, що реакція в'язі не завжди визначається самою в'яззю, її модуль, а іноді і напрям залежить ще і від інших сил, що діють на систему.

Активні ж сили, діючи на систему у стані спокою, можуть надати їй той чи інший рух. Реакції в'язей цієї властивістю не володіють, внаслідок чого їх називають *пасивними силами*.

Напрямок сили реакції в'язі збігається з тим напрямком, за яким в'язь перешкоджає переміщенню тіла (якщо таких напрямків декілька, то напрям реакції визначається залежно від характеру активних сил). У загальному вигляді встановити напрям вектора реакції на підставі лише геометричних властивостей поверхонь тіл і опор неможливо. Тому потрібно розглядати деякі окремі випадки в'язей, що частіше зустрічаються на практиці і під час розв'язування задач. У статичі розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих і гнучких тіл. Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі, які зустрічаються під час розв'язання задач механіки. Кожна з цих в'язей має свою назву, умовне графічне зображення і свої реакції.

1. *Ідеально гладенька поверхня* (рис. 1.5а) перешкоджає поступальному переміщенню тіла у середину поверхні за нормаллю до неї, на самій же поверхні тіло може ковзати. Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до поверхні в точці дотику, вздовж нормалі у бік від поверхні до тіла. *Гладенька поверхня накладає одну в'язь*: вона унеможливує рух за нормаллю до поверхні, тому реакція спрямована проти напрямку втраченого переміщення внаслідок накладання в'язі. Якщо гладенька поверхня сферична (рис. 1.5б), то реакція \bar{R}_A прямує крізь центри сфер O і O_1 вздовж нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

2. *Точкова опора* (рис. 1.5в). Якщо гладенька площина виступає у лінію або точку, то реакції в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B спрямовані вздовж перпендикуляра до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в цій точці.

3. *Шарнірно-нерухома опора* або нерухомий циліндричний шарнір (підшипник) (рис. 1.5г) перешкоджає переміщенню тіла у площині, що є перпендикулярною до осі шарніра. Реакція

шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і задалегідь невідома за напрямом.

Невідомий вектор реакції у разі аналітичного визначення уявляється двома складовими вздовж осей координат \bar{R}_x і \bar{R}_y . Зрозуміло, що ця опора накладає дві в'язі: перешкоджає вертикальному і горизонтальному переміщенням, а тому і потребує двох складових реакції у заданій площині.

4. *Шарнірно-рухома опора* або коток (рис. 1.5д). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, якою рухається коток або перпендикулярно до площини встановлення шарніра.

5. *Жорстке закріплення* (глухе защемлення) перешкоджає поступальному лінійному переміщенню за будь-яким напрямом і повороту тіла відносно будь-якої осі у загальному випадку.

Реакція цієї в'язі для плоскої системи (рис. 1.5е) уявляється двома складовими вектора сили \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} і реактивної пари сил з моментом M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: вона перешкоджає вертикальному і горизонтальному лінійним переміщенням і повороту навколо осі, перпендикулярній площині рисунка.

6. *Ідеальний стрижень* – це жорсткий однорідний невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлено точкові шарніри, розмірами яких можна знехтувати (рис. 1.5ж).

Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж прямої, що з'єднує центри кінцевих шарнірів стрижня і прикладена у центрі шарніра за напрямом: від вузлів (точок A і B), якщо стрижень розтягнутий, і до вузлів, якщо стрижень стиснутий.

7. *Ідеальна нитка* – це невагома нерозтяжна нитка, в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5з).

Ця в'язь є *однобічною* і працює тільки в умовах розтягу.

Реакція цієї в'язі \bar{T} заважає поступальному переміщенню тіла від точки підвісу, тому вона спрямована вздовж нитки від

тіла і прикладена у точці A закріплення нитки. У пасовій передачі (рис. 1.5з) натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 є реакціями гнучкої в'язі.

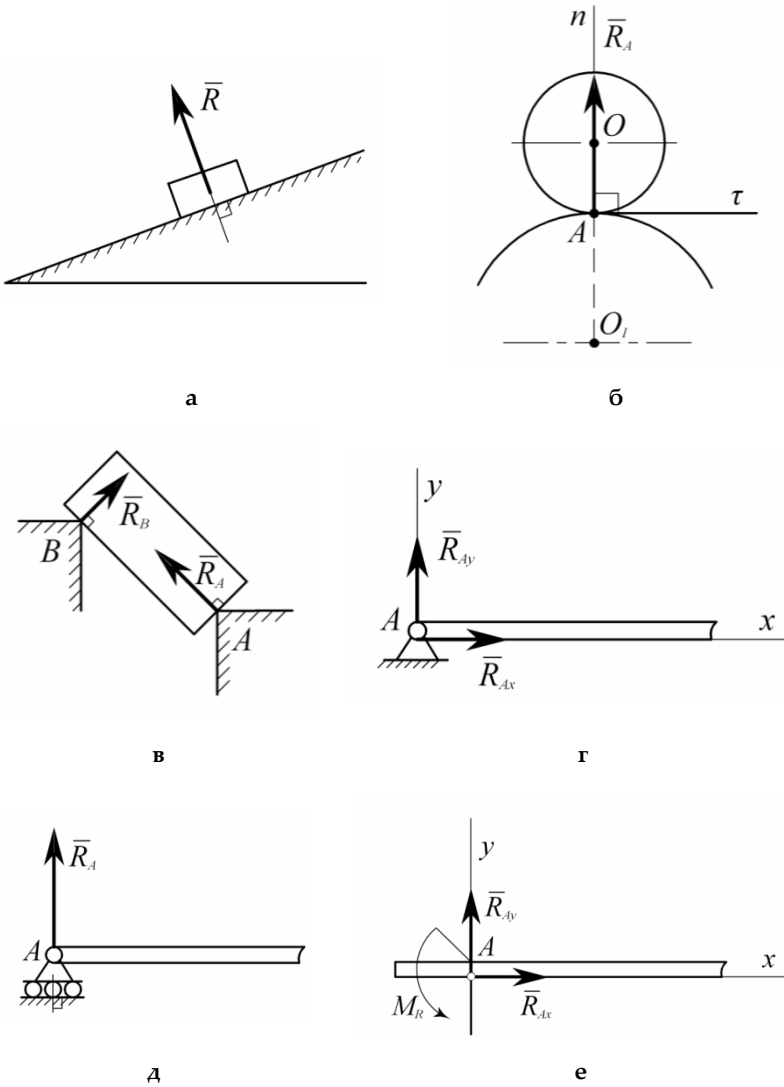
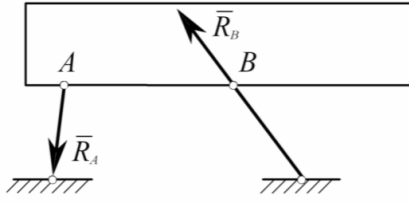
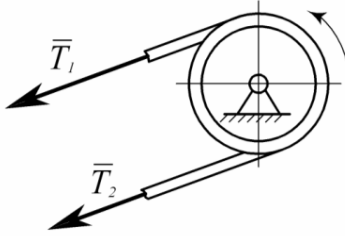


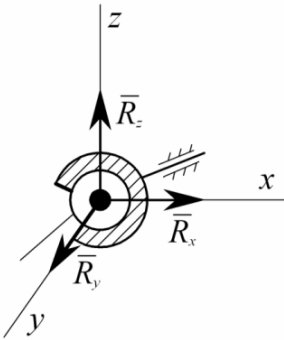
Рис. 1.5



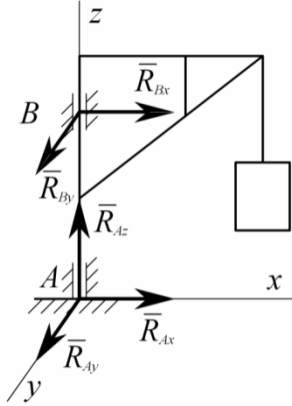
ж



з



и



к

Закінчення рис. 1.5

8. **Просторовий сферичний шарнір** або його окремий випадок – *підп'ятник* (рис. 1.5и, к).

Ця в'язь забезпечує нерухомість центра сфери або опорного центра підп'ятника, тому у випадку ідеально гладких поверхонь вектори реакцій прикладені у згаданих центрах, але напрям цих векторів невідомий.

Відповідні реакції цих в'язей зображуються трьома складовими $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$, спрямованими вздовж осей прямокутної просторової системи декартових координат xuz з початком у центрі сферичного шарніра або центрі підп'ятника.

9. **Криволінійний стрижень** (рис. 1.6). Наприклад, тіло зв'язано з опорою в точці A криволінійним стрижнем.

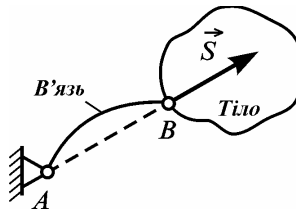


Рис. 1.6

Конструкцію цієї невагомій в'язі, яка може бути криволінійною з двома зовнішніми точковими шарнірами на кінцях, можна розглядати як стрижень, напрям реакції якого \vec{S} проходить вздовж прямої, що з'єднує точкові шарніри A і B .

10. **Просторове жорстке закріплення.** На відміну від плоскої системи (рис. 1.5е) у випадку просторової задачі (рис. 1.7) вектор реакції жорсткого закріплення (защемлення) \bar{R}_A подають трьома складовими відносно просторової системи координат, а вектор-момент реактивної пари \bar{M}_p – трьома відповідними складовими на ті самі осі.

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A, \quad \vec{M}_p = \vec{M}_{px} + \vec{M}_{py} + \vec{M}_{pz}.$$

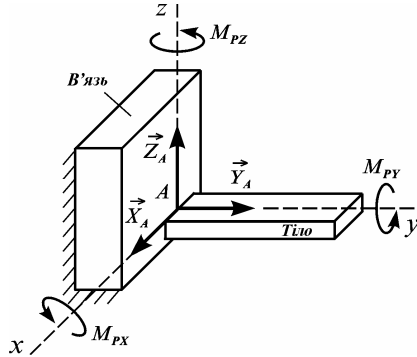


Рис. 1.7

Зауважимо, що ідеальною називають в'язь, лінія дії реакції якої відома (гладенька поверхня, невагомий мотузок і стрижень, коток тощо). У зв'язку з розгляданням поняття в'язей вводиться шоста і сьома аксіоми статyki, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей і аксіоми про накладення нових в'язей.

Шоста аксіома (про звільнення від в'язей).

Первісна **рівновага** невільного матеріального тіла **не порушиться**, якщо **відкинути** фізичні **в'язі**, накладені на тіло, і **замінити** їх дію **силами реакцій в'язей**.

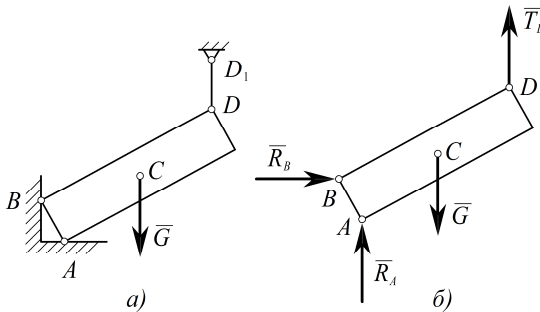


Рис. 1.8

Проілюструємо аксіому на прикладі (рис. 1.8а). Згідно з цією аксіомою дане невільне тіло (наприклад, брус вагою \bar{G}), що перебуває під дією прикладеної до нього активної сили (сила ваги \bar{G} , яка прикладена в центрі ваги точки C) і накладених в'язей (горизонтальна площина в точці A , вертикальна стінка в точці B і вертикальний трос у точці D) можна розглядати як вільне, якщо відкинути накладені в'язі (опори, троси, тобто, фізичні конструкції) і прикласти реакції цих відкинутих в'язей, рисунок 1.8б (реакції опор \bar{R}_A, \bar{R}_B і натяг тросу \bar{T}), а потім вже застосовувати до тіла закони і методи теоретичної механіки.

Сьома аксіома (про накладання нових в'язей)

Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.

1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів

За характером розміщення всі системи сил, прикладені до одного тіла або системи тіл, можна поділити на плоскі і просторові системи сил. Плоска система сил відрізняється тим, що вектори всіх сил розміщені тільки в одній заданій площині. У просторовій системі сил вектори сил розміщуються як завгодно у просторі.

Крім того, кожна з цих систем сил може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил. Зробимо такі визначення:

– *система збіжних сил* (пучок сил) на площині або у просторі, прикладена до твердого тіла, характеризується тим, що *лінії дії* усіх сил *перетинаються в одній точці* (центрі пучка);

– *система паралельних сил* на площині або у просторі: *лінії дії* всіх сил паралельні;

– *система довільних сил* на площині і система довільних

сил у просторі: *лінії дії сил розміщені як завгодно* на площині або у просторі.

Отже, можна констатувати, що маємо *шиість* різних *систем сил*, беручи до уваги як плоску, так і просторову системи сил, під дією яких тіло може перебувати у стані рівноваги або рухатись за певним законом.

За характером дії сил, незважаючи їх фізичне походження, у теоретичній механіці існує ще два способи класифікації сил.

Згідно з першим способом, розрізняють сили активні або задані і реакції в'язей.

Активними називають сили, які викликають як прискорення точок системи, так і реакції в'язей.

Другий спосіб полягає у поділі всіх сил на зовнішні і внутрішні сили щодо системи.

Зовнішніми називають сили, з якими точки, що входять до матеріальної системи, взаємодіють з тілами, які системі не належать.

Внутрішніми називають сили взаємодії між точками однієї системи.

Наведені класифікації сил існують незалежно одна від одної. Так, наприклад, у невільній системі реакції в'язей є внутрішніми силами. Внутрішні сили взаємодії двох зарядів, якщо їх розглядати разом, – активні сили.

Внутрішні сили задовольняють третій закон І. Ньютона незалежно від стану матеріальної системи:

Взаємодія двох матеріальних точок, що входять до системи, завжди відбувається з однаковими за величиною і протилежно напрямленими силами, які мають спільну лінію дії.

Помилкою буде ототожнювати це з аксіомою про абсолютно тверде тіло, бо вона справджується лише для стану рівноваги одного абсолютно твердого тіла. Отже, *внутрішні сили утво-*

рюють систему сил, еквівалентну нулю.

На підставі означень такі сили не можуть змінити кінематичний стан абсолютно твердого тіла, тому їх не можна визначити з рівнянь руху або рівноваги твердого тіла. Але визначення внутрішніх сил дуже важливе, особливо в механіці деформованих тіл.

У цьому випадку застосовують метод перерізів, за допомогою якого задача визначення внутрішніх сил зводиться до визначення зовнішніх сил.

Припустимо, що треба визначити внутрішні сили в шарнірі A , який з'єднує два тіла AB і AC , що знаходяться під дією зовнішніх сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ (рис. 1.9а).

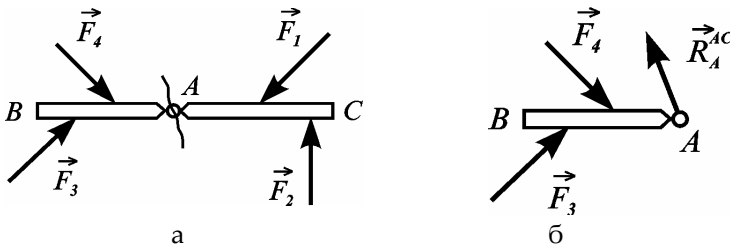


Рис. 1.9

Проведемо переріз крізь шарнір A і розглядатимемо, наприклад, тіло AC як в'язь відносно тіла BA . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, прикладемо в точці A силу реакції \vec{R}_A^{AC} відкинутого тіла AC як механічну дію відкинутого тіла на шарнір A .

Тепер внутрішня сила реакції згаданого шарніра (рис. 1.9а) стає зовнішньою силою відносно тіла BA (рис. 1.9б) і може бути визначена звичайними методами для даної системи сил (у цьому разі – це плоска система довільних сил).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статики.
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка і абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу.
5. Що таке система сил? Які системи сил Ви знаєте?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил? Як формулюються аксіоми статики?
7. Якими є поняття про простір і час у класичній механіці?
8. Що таке матеріальна система?
9. За якими умовами сила може розглядатись як ковзний вектор?
10. Як формулюється теорема про паралелограм сил?
11. Як розуміти вільне і невільне матеріальні тіла?
12. Що таке механічні в'язі і які типи в'язей Ви знаєте?
13. Що таке реакції в'язей і як вони спрямовуються?
14. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у площині?
15. Які реакції утворюють підп'ятник і сферичний шарнір?
16. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у просторі?
17. Як спрямувати силу реакції криволінійного стрижня?
18. Чим відрізняються внутрішні сили від зовнішніх і які властивості мають перші?
19. Що таке метод перетину і як внутрішні сили перетворити у зовнішні?
20. За якими силами відбувається взаємодія двох матеріальних точок?

1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної. Умови рівноваги тіла

1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної. Векторний спосіб додавання сил

Якщо вектори всіх сил, прикладені до твердого тіла, розміщені в одній площині або у просторі і лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву *системи збіжних сил* (пучок сил).

Для ілюстрації вищезгаданого покажемо на рис. 1.10 довільне тіло, до якого прикладений просторовий пучок системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються у центрі пучка точці A .

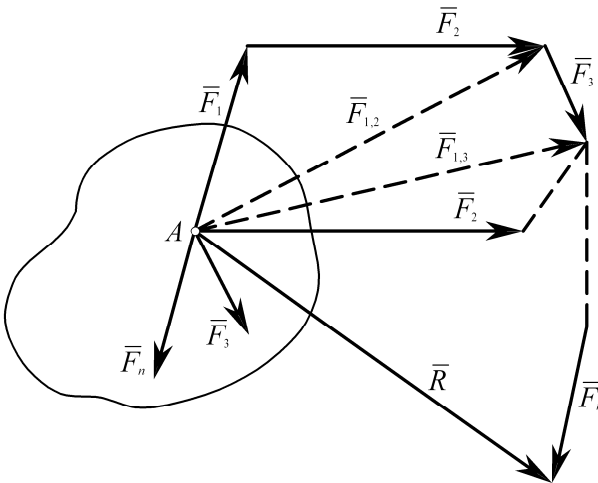


Рис. 1.10

Спробуємо провести еквівалентне перетворення просторової системи збіжних сил, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$, зображеної на

рис. 1.10, у більш просту систему.

Візьмемо (умовно) дві перші сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 і на підставі третьої аксіоми статички про паралелограм сил знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$, для чого на векторах цих сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , як на сторонах, побудуємо паралелограм¹, діагональ якого, прикладена у точці A , і є їхньою рівнодійною $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Далі векторно додамо дві наступні сили $\vec{R}_{1,2}$ і \vec{F}_3 і на векторах цих сил, як на сторонах, побудуємо другий паралелограм, діагональ якого дорівнює

$$\vec{R}_{1,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продовжуємо цей процес до останньої сили \vec{F}_n . Ще побудуємо паралелограм і остання діагональ буде рівнодійною \vec{R} системи заданих збіжних сил, оскільки під час перетворень системи використовувалися засоби, які не призводять до зміни кінематичного стану твердого тіла.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови трикутників, то можна побачити, що до кінця вектора сили \vec{F}_1 було приєднано вектор сили \vec{F}_2 (тобто в кінець вектора \vec{F}_1 перенесено паралельно вектор \vec{F}_2) і так далі. Зрозуміло, що тут не потрібні проміжні рівнодійні $\vec{R}_{1,2} \dots$

Так, на підставі третьої аксіоми можна прийти до **правила многокутника сил** або **силового многокутника**.

Отже, векторний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови **силового многокутника** для визначення рівнодійної. Він будується шляхом паралельного перенесення у деякому масштабі векторів сил, де початок вектора наступної сили приєднується до кінця вектора попередньої сили.

Тоді вектор рівнодійної з'єднує початок вектора першої сили з кінцем вектора останньої сили (рис. 1.10), тобто, **вектор**

¹ Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто трикутник сил.

рівнодійної є замикальною стороною силового многокутника. Підсумок процесу додавання пучка збіжних сил у векторній формі можна записати алгебраїчно

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n \quad (1.3)$$

Рівнодійну сил визначили як векторну суму сил, а дію системи збіжних тіл звели до дії однієї сили, рівнодійної, яку визначили геометричним або векторним додаванням сил.

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до сторін многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Для просторової системи збіжних сил силовий многокутник є *просторовою фігурою*, а для плоскої системи – *плоскою фігурою*.

Для плоскої системи рівнодійну можна визначити графічно шляхом побудови у вибраному для сил масштабі замикальної сторони силового многокутника.

Для просторової системи збіжних сил потрібно було б будувати силовий многокутник у просторі із жорстких стрижнів або проектувати його на прямокутний декартов тригранник.

Отже, система збіжних сил у загальному випадку зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, яка зображується замикальною стороною силового многокутника, побудованого на силах системи, і прикладена в центрі пучка.

1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла, згідно з першою аксіомою, не може бути мови. Розглядаючи систему збіжних сил, зведену до рівнодійної, яка не дорівнює нулю, можна сказати, що і в цьому разі тіло не може бути у рівновазі.

*Для рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил, прикладеної до цього тіла, необхідно і достатньо, щоб **рівнодійна** цієї системи сил дорівнювала нулю.*

$$\bar{R} = F_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0. \quad (1.4)$$

Отже, *рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, якщо силовий многокутник цієї системи буде замкненим*, тобто, якщо початок вектора першої сили збігається з кінцем вектора останньої сили (див. рис. 1.10: якщо рівнодійна дорівнює нулю, то кінець останнього вектора \bar{F}_n збігатиметься з точкою A , а замикальна сторона \bar{R} перетвориться в точку). Ця умова рівноваги називається векторною або графічною умовою рівноваги (у векторній або графічній формах).

Необхідність умови рівноваги впливає з того, що дана система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, проте, очевидно, що під дією однієї сили тверде тіло може перебувати у стані рівноваги тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулю.

Достатність цієї умови рівноваги: оскільки система сил має рівнодійну, що дорівнює нулю, то діюча на тверде тіло система сил є зрівноваженою або еквівалентною нулю, тому вона не може змінити кінематичного стану цього тіла. Якщо тіло перебувало у стані рівноваги до моменту дії сил, то воно залишиться у цьому стані і під дією цієї системи сил.

1.2.3. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил

Якщо тверде тіло під дією системи трьох непаралельних сил, розміщених в одній площині, перебуває в стані рівноваги, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Уявимо тіло (рис. 1.11), до якого в точках A, B, C прикладені сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, вектори яких розташовані в одній площині.

Розглянемо спочатку дві сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

На підставі наслідку з першої і другої аксіом статички точку прикладання сили можна перенести вздовж лінії їх дії в іншу точку, наприклад, у точку O .

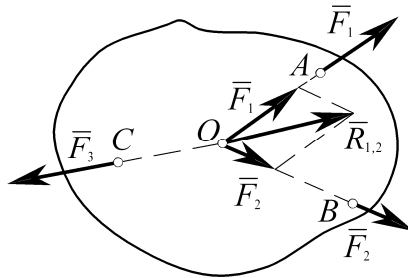


Рис. 1.11

Далі, якщо маємо в точці O дві прикладені сили, то на підставі третьої аксіомы статички про паралелограм сил їх можна замінити однією силою рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$.

Побудуємо (рис. 1.11) на вказаних векторах сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 паралелограм і покажемо рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$.

Тепер тіло перебуває під дією тільки двох сил \vec{F}_1 і $\vec{R}_{1,2}$, і на підставі першої аксіомы про дві сили воно буде в рівновазі лише тоді, якщо вектори цих сил розміщені на одній спільній прямій, тобто, на прямій CO .

Звідси зрозуміло, що і вектор сили \vec{F}_3 буде перетинати точку O . Теорему доведено.

Приклад застосування теореми.

Балка AB перебуває у стані рівноваги під дією прикладених до нього сил. В точці A вона закріплена шарнірно-нерухомою опорою, а в точці D має точкову опору на виступі (рис. 1.12).

На цю балку діють такі три сили: сила ваги балки \bar{P} , прикладена у центрі ваги C , а точніше посередині балки, тому що вона моделюється лінією, реакція виступу \bar{N}_D , що перпендикулярна до осі балки, і невідома за напрямом реакція \bar{R}_A шарніра A .

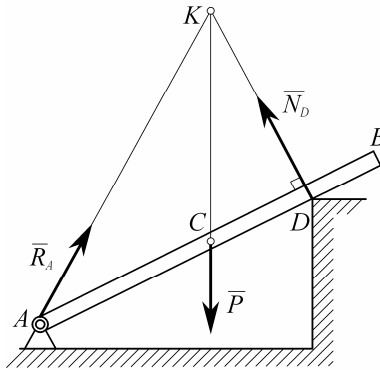


Рис. 1.12

Оскільки брус перебуває в рівновазі, то згідно з цією теоремою лінії дії цих трьох сил повинні перетинатися в одній точці, яку неважко знайти, тому що напрями векторів перших двох сил відомі і їхній перетин – в точці K . Тоді і лінія дії невідомої реакції \bar{R}_A буде спрямована вздовж прямої AK .

Теорема про три сили дозволила визначити один невідомий параметр: напрям вектора реакції шарніра \bar{R}_A . Залишається визначити модулі вказаних реакцій із умов рівноваги бруса під дією системи збіжних сил.

1.2.4. Проекція сили на вісь і на площину

Уявимо силу \vec{P} , вектор якої довільно розміщений у площині креслення (рис. 1.13). Виберемо у цій площині вісь, наприклад вісь x , і спроектуємо вказану силу \vec{P} на цю вісь.

Позначимо спочатку кінці вектора сили \vec{P} літерами A, B і опустимо з них на вісь x перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю x (позначимо їх відповідними малими літерами a і b) утворили на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили \vec{P} на вісь x . За величиною цей відрізок, що можна побачити із трикутника $\triangle ABC$, дорівнює добутку модуля сили $|\vec{P}|$ на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

$$P_x = (ab) = (AC) = (AB) \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha. \quad (1.5)$$

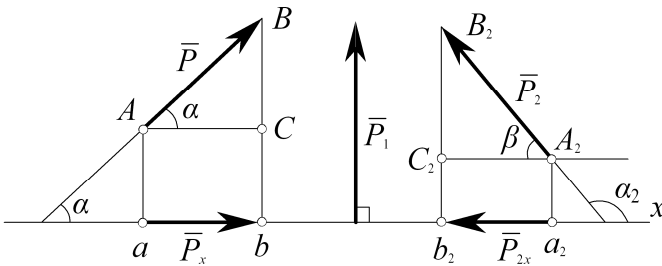


Рис. 1.13

За знаком проекція сили на вісь додатна, якщо кут α (кут між вектором сили і віссю) є гострим. Цілом зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекція сили \vec{P}_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Легко зрозуміти, якщо кут між вектором сили і віссю дорівнює нулю, то цей вектор проектується в натуральну величину.

Якщо кут α_2 буде тупий, то проекція сили \vec{P}_2 на вісь x матиме від'ємний знак. Значення проекції у такому випадку:

$$P_{2x} = (a_2 b_2) = (A_2 C_2) = P_2 \cdot \cos \alpha_2 .$$

Але практично більш зручно використовувати не тупий кут α_2 , а гострий доповняльний кут β між вектором сили \vec{P}_2 і напрямом осі x . Знак проекції легко при цьому визначається зі схеми

$$P_{2x} = - P_2 \cdot \cos \beta .$$

Отже, проекція сили на вісь – це спрямований відрізок на осі між перпендикулярами, опущеними з кінців вектора сили на задану вісь.

Проекція вектора сили на вісь – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили і додатним напрямом осі.

Далі знайдемо проекцію вектора сили на площину і на осі координат.

Візьмемо силу \vec{F} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.14). Виберемо у просторі прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, початок відліку якої (точка O) суміщений з точкою прикладення вектора сили \vec{F} .

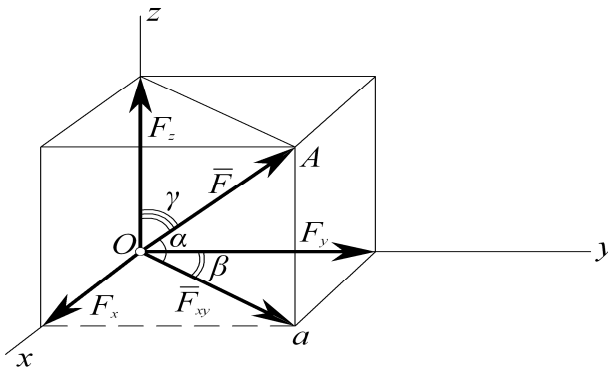


Рис. 1.14

Визначимо проекцію вектора сили \vec{F} на площину xOy . Для цього опустимо з точки A (кінець вектора сили) перпендикуляр на вказану площину, який перетне останню в точці a .

На заданій площині xOy утворено вектор \vec{Oa} , який і є проекцією \vec{F}_{xy} вектора сили на площину.

За модулем ця проекція дорівнює:

$$F_{xy} = F \cos \alpha, \quad (1.6)$$

де α – кут між напрямом вектора сили \vec{F} та площиною xOy .

Слід зазначити:

проекція вектора сили на площину є вектором, який розміщений між проекціями початку і кінця вектора сили на цю площину.

Спроекуємо вектор сили \vec{F} на координатні осі x і y за відомим правилом:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos(90^\circ - \beta) = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.7)$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.8)$$

Аналізуючи вирази (1.7) і (1.8), можна помітити, що для здобуття проекції сили на координатну вісь необхідно провести подвійне проєктування: спочатку знайти проекцію вектора сили на площину, в якій розміщені ці осі, а вже потім – на самі осі.

Що стосується третьої осі z , то є можливість спроекувати вектор сили \vec{F} на цю вісь безпосередньо за відомим правилом (1.5):

$$F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (1.9)$$

де γ – кут між вектором сили \vec{F} і віссю z .

1.2.5. Визначення сили за її проєкціями

Допустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну систему декартових координат Oxy , задані дві проєкції сили – F_x і F_y (рис. 1.14). Треба за даними проєкціями обчислити модуль вектора самої сили \overline{F}_{xy} , а також його напрям.

На заданих проєкціях, як на сторонах, будемо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проєкцій, і є шуканим вектором сили \overline{F}_{xy} . Модуль вектора сили \overline{F}_{xy} можна визначити з виразу:

$$F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.10)$$

Кути між вектором сили \overline{F}_{xy} і осями x , y можна визначити за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha = \cos(x, \wedge \overline{F}) = \frac{F_x}{F_{xy}}, \quad \cos \beta = \cos(y, \wedge \overline{F}) = \frac{F_y}{F_{xy}}. \quad (1.11)$$

Знаючи напрямні косинуси, є можливість знайти величини кутів за допомогою функції арккосинуса.

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 1.14) можна побудувати паралелепіпед на проєкціях як на сторонах, а модуль сили \overline{F} визначити як діагональ цього паралелепіпеда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили визначається за напрямними косинусами його кутів з відповідними осями координат x , y , z :

$$\cos(x, \wedge \overline{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(y, \wedge \overline{F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(z, \wedge \overline{F}) = \frac{F_z}{F}.$$

Далі, за функціями арккосинусів визначають величини самих кутів.

1.2.6. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь на вісь

Для можливості аналітичного додавання сил доведемо теорему:

проекція підсумкового вектора або рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій векторів складових сил на ту саму вісь.

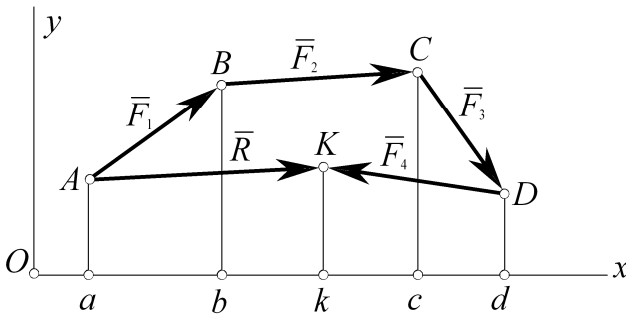


Рис. 1.15

Маємо систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$, яка зведена до рівнодійної \vec{R} за допомогою силового многокутника (рис. 1.15). Введемо на площині прямокутну систему декартових координат Oxy і спроекуємо на вісь x всі сили. Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину перпендикулярів з віссю, що позначені відповідними малими літерами a, b, c, d, k , утворили на осі x спрямовані відрізки, які і є проєкціями всіх сил на цю вісь:

$$|ab| = F_{1x}; \quad |bc| = F_{2x}; \quad |cd| = F_{3x}; \quad |-dk| = F_{4x}. \quad (1.12)$$

Додамо алгебраїчно всі проєкції і підрахуємо, чому ця су-

ма дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.13)$$

Але відрізок ak і є проекцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Цей підрахунок стосувався чотирьох сил, але, поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.14)$$

1.2.7. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

На підставі теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь (1.14) маємо:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.15)$$

Аналогічно проекція рівнодійної сили на вісь y і z дорівнює:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1.16)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.17)$$

Модуль рівнодійної:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} і осями координат x , y , z визначимо через функції напрямних косинусів кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\begin{aligned} \cos(x, \hat{\bar{R}}) &= \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \\ \cos(z, \hat{\bar{R}}) &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.2.8. Умови рівноваги системи збіжних сил

Систему збіжних сил можна звести до однієї рівнодійної сили. Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи дорівнювала нулю (вираз 1.4). А якщо рівнодійна сила дорівнює нулю, то і її проекції на осі x , y , z теж дорівнюють нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій складових сил (вирази 1.14 – 1.17), то умови рівноваги просторової системи збіжних сил мають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією просторової системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на кожну із трьох координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку плоскої системи збіжних сил одну із осей координат, частіше Oz , вибирають перпендикулярною до площини дії сил. Тоді третя умова із системи умов (1.19) перетворюється у тотожність. Відкидаючи її, отримуємо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Для рівноваги твердого тіла під дією прикладеної до нього плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на кожну із двох координатних осей, розміщених у цій площині, дорівнювали нулю.

1.2.9. Методика розв'язування задач статички.

Приклади

Задачі статички, що потребують розв'язування, можуть бути одного з двох типів. У задачах першого типу відомі активні сили, що діють на тіло, і необхідно знайти, в якому положенні або за яких співвідношень між діючими силами задане тіло може перебувати у стані рівноваги. У задачах другого типу попередньо відомо, що задане тіло перебуває у стані рівноваги, а необхідно визначити, чому при цьому дорівнюють деякі діючі сили і реакції опор. Реакції в'язей завжди є величинами, попередньо невідомими у всіх задачах статички. Алгоритм розв'язування задач статички твердого тіла такий.

1. З'ясувати, рівновагу якого твердого тіла або точки потрібно розглянути.

Для розв'язання задачі розглядається рівновага тіла, до якого прикладені задані і шукані сили. Якщо ж на тіло діє система збіжних сил, то необхідно визначити точку, в якій перетинаються лінії дії сил і реакцій. Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані сили – на друге або ці сили діють одночасно на декілька тіл, то може бути необхідним розглянути послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2. Скласти розрахунково-силову схему.

Важливе значення має охайне креслення, навіть чернетка рисунка, що може допомогти швидше знайти правильний шлях розв'язування задачі і уникнути помилок під час складання умов рівноваги.

а) показати на схемі задані активні сили, що діють на тверде тіло;

з'ясувавши, рівновагу якого тіла потрібно розглянути, слід зобразити на рисунку всі зовнішні сили, що діють на задане тіло, включаючи як задані, так і шукані сили;

б) показати на схемі сили реакції в'язей, що обмежують рух твердого тіла;

відкинути за аксіомою про звільнення від в'язей задані фізичні опорні елементи, конструкції і замінити їхню дію реакціями в'язей згідно з рекомендаціями щодо основних типів в'язей (див. пп. 1.1.4). Напрямом стрілок невідомих реакцій задаємось довільно. Таким чином, до тіла або точки прикладатимуться задані активні сили і сили реакцій в'язей;

в) раціонально вибрати систему координат;

особливо це важливо для системи збіжних сил, прикладеної до твердого тіла. Для зручності початок координат розміщуємо в точці рівноваги. Бажано, щоб одна із осей координат збігалася з перпендикуляром до напрямку шуканої сили – в цьому разі одне з рівнянь рівноваги опиниться з одним невідомим, з якого легко визначити шукану величину.

3. Встановити, яка система сил за класифікацією діє на задане тверде тіло.

Це необхідно, щоб з'ясувати, якими умовами рівноваги тіла під дією заданих сил і реакцій в'язей необхідно користуватися, і вибрати відповідну систему умов рівноваги.

4. На підставі відповідної системи умов рівноваги скласти рівняння рівноваги твердого тіла.

Геометричні умови рівноваги слід застосовувати, якщо на тіло діє не більше трьох заданих і шуканих сил, розміщених на площині. У випадку рівноваги силовий трикутник, побудований з цих

сил, має бути замкненим, з нього і визначають шукані сили.

Аналітичними умовами рівноваги можна користуватися за будь-якої кількості сил, що діють на тверде тіло. Корисно при цьому, особливо на початку вивчення матеріалу, попередньо обчислювати проекції всіх сил і заносити їх в окрему таблицю.

5. Розв'язати складені рівняння рівноваги, визначити шукані величини, провести перевірку і аналіз результатів.

Усі розрахунки під час розв'язання алгебраїчних рівнянь статички рекомендується проводити у загальному вигляді, отримуючи для шуканих величин формули, що дає можливість аналізу знайдених результатів.

Крім того, розв'язок у загальному вигляді дозволяє виявити зроблені помилки шляхом перевірки вимірності. Визначені аналітично шукані величин можуть бути перевірені на підставі геометричних умов рівноваги побудовою силового трикутника або многокутника.

Якщо одна із знайдених реакцій отримала знак «мінус», то це означає, що фактичний її напрям є протилежним, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Конкретні методичні вказівки для розв'язання задач надаються в кожному окремому випадку, адже будь-яка задача зберігає свою індивідуальну особливість.

Приклад 1.1

Невагомий ідеальний стрижень AB утримується в рівновазі нерозтяжним гнучким тросом BC .

До шарніра B стрижня на гнучкій нерозтяжній нитці підвішене тіло вагою G (рис.1.16). Визначити натяг нитки BC і силу реакції стрижня AB , якщо кути і вага дорівнюють, відповідно: $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 105^\circ$; $G = 500 \text{ Н}$.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла B , де збігаються вектори усіх сил (рис. 1.16). До вузла прикладено: сила натягу нитки, що рівна силі ваги \bar{G} , перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки B , натяг троса \bar{T} і сила реакції стрижня \bar{S} . Таким чином, вузол B перебуває у рівновазі під дією трьох сил: \bar{G} , \bar{T} і \bar{S} , розміщених в одній площині і прикладених у центрі пучка точці B .

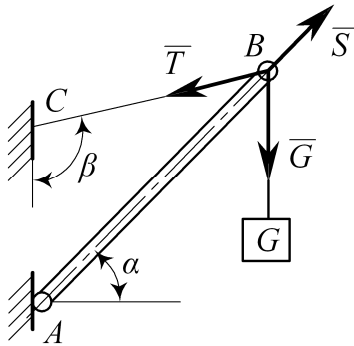


Рис. 1.16

Величину зусиль \bar{S} і \bar{T} визначимо геометричним методом, скориставшись векторною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum \bar{F}_k = \bar{T} + \bar{G} + \bar{S} = 0.$$

Для цього з довільної точки a (рис. 1.17) відкладаємо в деякому масштабі відомий вектор \bar{G} , отримавши дві точки a і b , крізь які проводимо послідовно прямі, паралельні відомим лініям дії невідомих за модулем сил \bar{S} і \bar{T} . На перетині останніх отримуємо точку c , з допомогою якої утворюється силувий трикутник abc . Сторони цього трикутника у вибраному масштабі уявляють собою модулі задіяних сил.

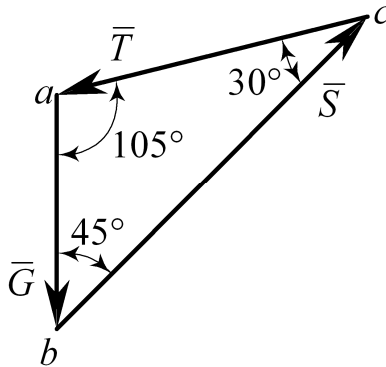


Рис. 1.17

Знайти невідомі величини можна, якщо заміряти відповідні сторони силового трикутника і помножити їхню довжину на вибраний масштабний коефіцієнт, або за теоремою синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{S}{\sin 105^\circ}.$$

Звідси:

$$T = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,707}{0,5} = 707 \text{ H};$$

$$S = G \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = G \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,954}{0,5} = 954 \text{ H}.$$

Відповідь: $T = 707 \text{ H}$; $S = 954 \text{ H}$.

Приклад 1.2

Гнучкий трос з двома тілами на кінцях вагою F і Q перекинутий через блоки A і B (рис.1.18). В точці O збігання тросів прикріплено вантаж вагою $G = 27,3 \text{ H}$. В умовах рівноваги системи нитка OA утворила кут 60° з горизонталлю, а нитка OB – кут 45° .

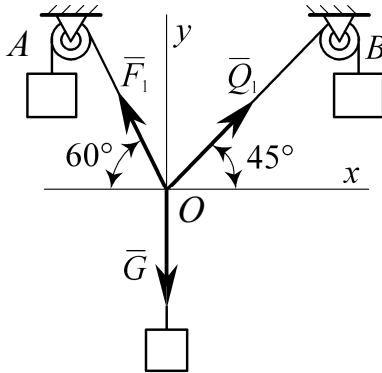


Рис. 1.18

Визначити вагу тіл F і Q . Силами тертя в блоках знехтувати.

Розв'язання

Спочатку з'ясуємо, рівновагу якої точки потрібно розглянути при розв'язуванні задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіл F і Q , прикладених до центрів мас тіл і спрямованих вертикально вниз. Кожне тіло натягує нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блоки змінюють напрями ниток, а, відповідно, і напрями сил натягу. Сили натягу F_1 і Q_1 за модулем дорівнюють вазі тіл F і Q , але спрямовані вздовж тросів OA і OB .

Оскільки прями OA і OB перетинаються в точці O , до якої можна прикласти і задану силу G , то під час розв'язання задачі треба розглядати рівновагу точки O .

Таким чином, на точку O (рис.1.18) діють: сила натягу \vec{F}_1 вітки нитки OA ; сили натягу \vec{Q}_1 вітки нитки OB ; вага тіла G .

Складемо рівняння рівноваги. Для цього оберемо систему координат Oxy з початком у точці O , спроекуємо сили на осі координат і складемо рівняння рівноваги.

Для суми проєкцій на вісь Ox дістанемо:

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Знак проекції \bar{Q}_1 – додатний, оскільки вона спрямована за додатним напрямом осі Ox . Знак проекції сили F_1 – від’ємний, оскільки вона спрямована за від’ємним напрямом осі Ox . Проекція сили \bar{G} на вісь Ox дорівнює нулю (вектор сили перпендикулярний до осі).

Сума проекцій усіх сил на вісь Oy дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - G = 0.$$

Проекції сил \bar{F}_1 і \bar{Q}_1 мають додатні знаки, оскільки вони спрямовані за додатним напрямом осі Oy . Проекція сили \bar{G} має знак «мінус», оскільки спрямована за від’ємним напрямом осі.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини заданої сили G рівняння набувають вигляду:

$$\begin{aligned} 0,707Q_1 - 0,5F_1 &= 0; \\ 0,707Q_1 + 0,866F_1 - 27,3 &= 0. \end{aligned}$$

Визначивши з першого рівняння

$$F_1 = 1,41 Q_1$$

і підставивши в друге, дістанемо:

$$0,707 \cdot Q_1 + 0,866 \cdot 1,41 \cdot Q_1 - 27,3 = 0;$$

$$Q_1 = 14,1 \text{ H}; F_1 = 20 \text{ H}.$$

Приклад 1.3

Три невагомих стрижні AB , AC і AD закріплені шарнірно в точці A і за допомогою шарнірів B , C , D прикріплені до горизонтальної підставки (рис. 1.19). Площини трикутників ABC і AOD вертикальні і взаємно перпендикулярні. На вузол A паралельно OD діє сила $P=0,6kH$. Знайти зусилля в стрижнях, якщо $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$; $\angle ADO = 60^\circ$.

Розв'язання

1. Виділимо тіло або точку, умови рівноваги якої дадуть можливість розв'язати задачу. Це точка A , до якої збігаються всі стрижні, зусилля в яких потрібно визначити. Отже, розглянемо рівновагу вузла A , користуючись аксіомою про звільнення від в'язей.

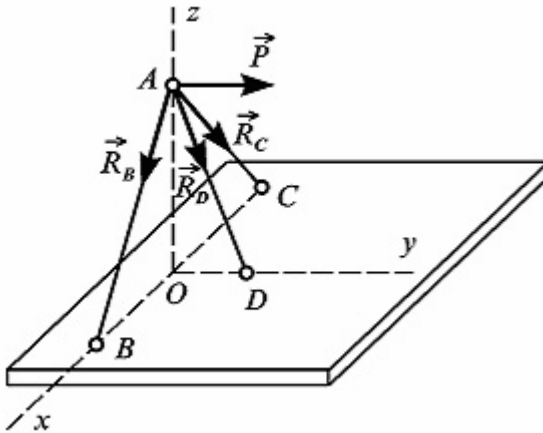


Рис. 1.19

2. Аналізуємо сили, які прикладені до вузла A . На вузол A діє активна сила \vec{P} , а також три реакції стрижнів, які діють уз-

довж них, оскільки стрижні ідеальні. Припустимо, що всі стрижні розтягнуті, тому на рис. 1.19 їхні реакції спрямовані від вузла A . Задачі має три невідомі $\bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{R}_C$, для відшукання яких можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, задача статично визначена.

Початок системи координат виберемо в точці O , додатні напрями осей позначено на рисунку.

3. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n X_i = R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = P + R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = -R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

На підставі першого рівняння робимо висновок, що $R_B = R_C$, з другого рівняння знаходимо R_D :

$$R_D = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -2P.$$

Від'ємний знак свідчить, що цей стрижень стиснутий, оскільки спочатку припускали, що він розтягнутий. Нарешті, з третього рівняння знайдемо:

$$R_B = R_C = -\frac{R_D \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}; \quad R_B = R_C = \frac{P \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = P \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Додатний знак цих реакцій вказує на те, що стрижні AB і AC розтягнуті.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий многокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній (векторній) формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Яка методика розв'язання задач за теоремою про три сили?

1.3. Теорія моментів і пар сил на площині

1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки)

Із практики відомо, що тіло під дією сили може не тільки переміщуватися, але і повертатися. Що ж створює цей обертальний ефект? Введемо важливе поняття механіки про *момент сили відносно центра* або точки, які називають центром моменту.

Якщо тіло під дією прикладеної сили обертається відносно центра, то обертальний ефект сили характеризується її мо-

ментом відносно цього центра. Під час розгляду плоскої системи сил, прикладених до твердого тіла, використовується поняття алгебраїчного моменту сили відносно центра.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.20), яке може повертатися відносно точки O (точніше навколо осі, що є перпендикулярною площині рисунка і перетинає точку O).

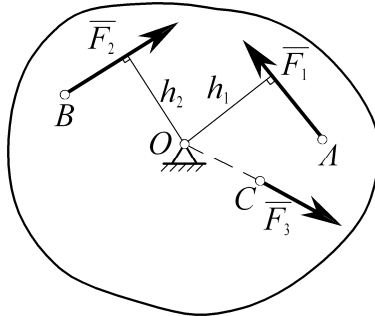


Рис. 1.20

Прикладемо в точках A , B , C тіла вектори сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки O .

Як можна побачити з рисунка, сила \vec{F}_1 , прикладена у точці A , може повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \vec{F}_2 – за ходом стрілки годинника.

Власне, тут інтуїтивно виявляється здатність сили повертати тіло і створювати обертальний ефект. Проте сила \vec{F}_3 , якою б великою вона не була, не має можливості повернути тіло навколо точки O , оскільки лінія дії сили \vec{F}_3 перетинає цю точку.

Таким чином, сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \vec{F}_3 – ні. Із цього прикладу випливає висновок, що для рівноваги тіла поряд з силами необхід-

но розглядати і добутки цих сил на відстані ліній їхньої дії від опор.

Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток модуля сили на плече.

Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань між цим центром і лінією дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили).

У курсі теоретичної механіки алгебраїчний момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно цієї точки проти ходу стрілки годинника і від'ємним – за ходом стрілки. Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно точки O позначається $m_o(\vec{F})$.

Покажемо на рис. 3.1 плечі h_1 і h_2 сил, які створюють моменти відносно точки O , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1, \quad m_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2, \quad m_o(\vec{F}_3) = F_3 \cdot 0 = 0.$$

Алгебраїчний момент сили – це добуток сили на лінійну величину – довжину плеча.

Звідси одиницею виміру моменту у системі SI є добуток ньютонна на метр (Hm).

Із аналізу визначення алгебраїчного моменту сили відносно центра випливають його властивості.

1. Момент не залежить від перенесення в межах цього тіла точки прикладання вектора сили вздовж лінії дії сили, оскільки плече сили залишається при цьому незмінним.

2. Якщо лінія дії вектора сили перетинає центр моменту, то момент цієї сили відносно цього центра дорівнює нулю.

3. Сума алгебраїчних моментів відносно центра двох рівних за модулем, але протилежних за напрямом сил, що діють вздовж однієї прямої, дорівнює нулю.

1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор

Під час розгляду просторової системи сил, прикладеної до твердого тіла, плідно використовується поняття векторного моменту сили відносно центра.

Розглянемо силу \vec{F} , вектор якої довільно розташований у просторі і прикладений в точці A (рис. 1.21).

Визначимо момент сили \vec{F} відносно довільної точки (центра) O , для чого поставимо з точки O до лінії дії вектора сили \vec{F} перпендикуляр. Це буде плече h .

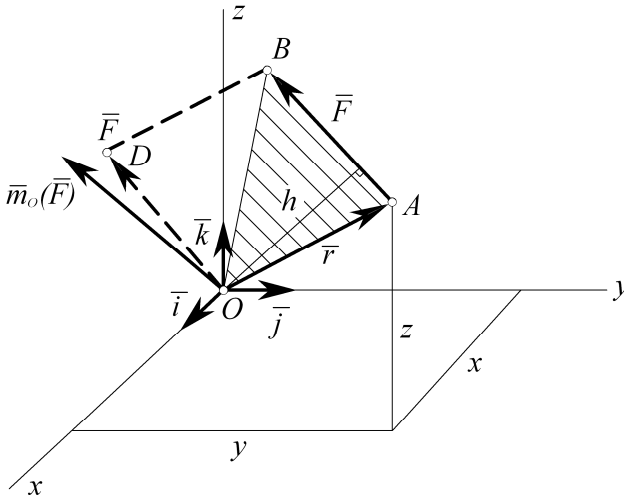


Рис. 1.21

Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O дорівнюватиме

$$m_o(\vec{F}) = Fh. \quad (1.21)$$

Із трикутника AOB визначимо плече $h = r \cdot \sin(\bar{r} \wedge \bar{F})$. Тоді для виразу алгебраїчного моменту (1.21) отримаємо:

$$m_o(\bar{F}) = Fh = F \cdot r \cdot \sin(\bar{r} \wedge \bar{F}). \quad (1.22)$$

Позначимо літерами A і B кінці вектора сили \bar{F} і з'єднаємо їх з точкою O . Основою трикутника AOB є вектор сили \bar{F} , а одна із вершин розміщена в точці O .

Плече h є висотою трикутника AOB . Тоді алгебраїчний момент сили \bar{F} відносно центра O є подвійною площею трикутника AOB , якщо розглядати його геометричну інтерпретацію:

$$m_o(\bar{F}) = 2S \Delta AOB. \quad (1.23)$$

Далі проведемо крізь точку O прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ з осями \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} . Вважаємо, що відстань OA є радіусом-вектором \bar{r} точки A відносно центра O прикладання вектора сили \bar{F} .

Оскільки алгебраїчний момент сили \bar{F} відносно центра O , як визначено виразом (1.23), є площею двох трикутників AOB , то побудуємо рівновеликий їм паралелограм $OABD$. Легко побачити, що тепер в точці O прикладені два вектори \bar{r} і \bar{F} , на яких і побудовано паралелограм, площа якого (вираз 1.22) дорівнює модулю векторного добутку двох векторів $\bar{r} \times \bar{F}$.

Таким чином, векторний момент сили відносно центра $\bar{m}_o(\bar{F})$, що проведений перпендикулярно до площини паралелограма, є третім підсумковим вектором добутку двох векторів \bar{r} і \bar{F} :

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (1.24)$$

Остаточню сформулюємо визначення вектора-моменту сили.

Векторний момент сили $\bar{m}_o(\bar{F})$ відносно центра O є підсумковим вектором векторного добутку $\bar{r} \times \bar{F}$, прикладеним в

цьому центрі і спрямованим перпендикулярно до площини трикутника OAB , утвореного вектором сили і центром моменту. Векторний момент напрямлений перпендикулярно площині у той бік, з якого можна побачити, що поворот тіла під дією заданої сили \vec{F} відносно центра O відбувається проти годинникової стрілки.

За модулем векторний момент дорівнює подвійній площі трикутника AOB , який утворюють кінці вектора сили \vec{F} і центр O . У підсумку можна зазначити, що векторний момент характеризується модулем, площиною дії і напрямом повороту.

Векторний момент сили відносно центра становить повну характеристику статичної дії цього моменту на тверде тіло, тому дії над моментами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Векторний момент сили $\vec{m}_o(\vec{F})$ відносно центра є зв'язаним вектором, тобто, закріпленим у центрі моменту, і за всіма трьома параметрами визначає обертальний ефект сили, прикладеної до твердого тіла: лінія дії векторного моменту визначає **площину дії моменту** (за перпендикуляром); спрямованість вектора (перпендикуляра) визначає **напрямок повороту** «за» чи «проти» годинникової стрілки; довжина вектора у певному масштабі визначає **модуль моменту**.

Визначимо аналітично проекції на осі координат і модуль векторного моменту сили відносно центра. У прийнятій системі координат вектори \vec{r} і \vec{F} можна виразити через відповідні проекції на осі координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.25)$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \quad (1.26)$$

де x, y, z – проекції радіуса-вектора \vec{r} на осі координат;

F_x, F_y, F_z – проекції вектора сили \vec{F} на відповідні осі.

Як відомо із векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку, підставляючи проекції радіуса-вектора и сили із виразів (1.25) і (1.26):

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ x, & y, & z \\ F_x, & F_y, & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Розкривши визначник (1.27) за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}. \quad (1.28)$$

Коефіцієнти перед одиничними векторами у виразі (1.28) є проекціями вектора-моменту сили відносно точки на осі координат x, y, z , тобто, алгебраїчними величинами і аналітичними виразами проекцій:

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.29)$$

Якщо проекції векторного моменту відомі, то його модуль неважко обчислити аналітично із виразу (1.29), визначивши корінь квадратний із суми квадратів проекцій, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси.

$$m_o(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})}; \quad (1.30)$$

$$\cos(\vec{m}_o(\vec{F}), \hat{i}) = \frac{m_x(\vec{F})}{m_o(\vec{F})}; \quad \cos(\vec{m}_o(\vec{F}), \hat{j}) = \frac{m_y(\vec{F})}{m_o(\vec{F})};$$

$$\cos(\vec{m}_o(\vec{F}), \hat{k}) = \frac{m_z(\vec{F})}{m_o(\vec{F})}. \quad (1.31)$$

Вирази (1.30) і (1.31) аналітично визначають модуль і напрям векторного моменту сили, прикладеної до твердого тіла, відносно заданого центра.

1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил

Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Доведення. Припустимо, що до тіла в точці A прикладена система збіжних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, зведена до рівнодійної сили \vec{R} (рис. 1.22). Оберемо довільний центр O і визначимо відносно нього моменти всіх сил. Починаємо з першої сили \vec{P}_1 . Знайдемо її момент відносно центра O . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили \vec{P}_1 з точкою O .

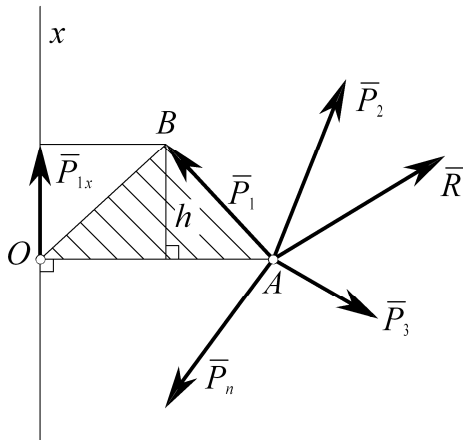


Рис. 1.22

Проведемо крізь точку O перпендикуляр до прямої OA , і вважаємо цю пряму віссю x (тобто задамо її напрям). Момент сили \bar{P}_1 відносно точки O є подвійною площею трикутника OAB :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2S\Delta OAB.$$

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона OA) на висоту трикутника h . А висота у такому випадку дорівнює проекції вектора сили \bar{P}_1 на вісь x – P_{1x} .

Таким чином, момент сили \bar{P}_1 відносно точки O дорівнює добутку основи трикутника OA на проекцію сили на вісь x :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}.$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи:

$$m_o(\bar{P}_2) = OA \cdot P_{2x},$$

$$m_o(\bar{P}_3) = OA \cdot P_{3x},$$

.....

$$m_o(\bar{P}_n) = OA \cdot P_{nx}.$$

Далі переходимо до рівнодійної \bar{R} системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки O :

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x,$$

де R_x – проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Згідно з теоремою про проекцію рівнодійної сили на вісь (вираз 1.14), яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA(P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}).$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}.$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно точки O . Остаточню:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) свідчить, що *момент рівнодійної* сили відносно будь-якого центра дійсно *дорівнює* алгебраїчній *сумі моментів складових* системи збіжних сил відносно того самого центра.

Теорема Варіньйона може бути застосована і для інших систем сил, що зводяться до рівнодійної.

1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії системи сил паралельні, то такі сили носять назву системи паралельних сил. Додавання їх здійснюється на підставі відомих з курсу елементарної фізики положень. Система двох паралельних сил, спрямованих в один бік, має рівнодійну (рис. 1.23).

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, за числовим значенням є арифметичною сумою модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована в той самий бік.

$$R = P_1 + P_2$$

Точка прикладання рівнодійної сили ділить внутрішньо відрізок, що з'єднує точки прикладання сил, на частини, які є обернено пропорційними модулям цих сил.

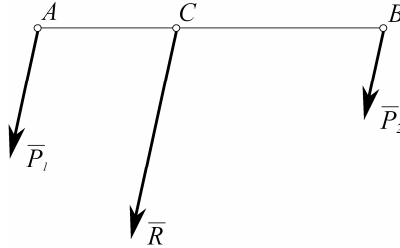


Рис. 1.23

Оскільки система двох сил зводиться до рівнодійної, застосуємо теорему Варіньйона, вираз (1.32), вибравши точку C за центр моментів:

$$m_c(R) = m_c(P_1) + m_c(P_2); \Rightarrow 0 = P_1 \cdot AC - P_2 \cdot BC; \Rightarrow \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = BC \frac{P_2}{P_1}, \quad (1.34)$$

де \vec{P}_1 і \vec{P}_2 – вектори паралельних сил, що додаються;

A, B, C – точки прикладання паралельних сил і рівнодійної, відповідно.

AC – відстань від точки A до точки C , де прикладена рівнодійна двох паралельних сил, яку називають центром паралельних сил, спрямованих в один бік.

У виразі (1.33) момент рівнодійної відносно точки прикладання C дорівнює нулю, функції синусів рівновеликих кутів, за якими визначались плечі, скоротилися. Тому, під яким би кутом до лінії AB не були нахилені вектори сил, положення центра

паралельних сил, де прикладається вектор рівнодійної, завжди залишається незмінним.

Для додавання двох антипаралельних сил (рис. 1.24), лінії дії яких паралельні, але їхні вектори спрямовані у протилежні боки, існує наступне правило.

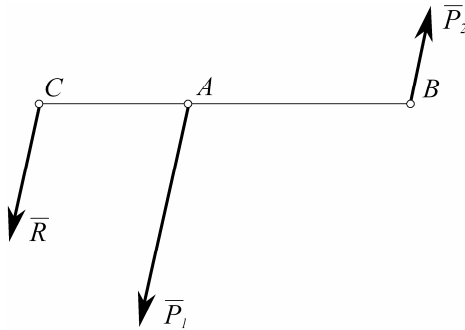


Рис. 1.24

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки, дорівнює за числовим значенням різниці модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована у бік більшої сили.

$$R = P_1 - P_2,$$

де \bar{P}_1 – найбільша із двох антипаралельних сил ($\bar{P}_1 > \bar{P}_2$).

Точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішньо відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, які є обернено пропорційними величинам цих сил, що впливає із аналогічного виразу (1.33).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}; \quad AC = BC \frac{P_2}{P_1}; \quad (1.35)$$

де C – точка прикладання рівнодійної \bar{R} або центр антипаралельних сил, що розміщується поза межами відрізка AB (рис. 1.24), у кінцевих точках якого прикладені задані антипаралельні сили.

1.3.5. Пара сил. Момент пари сил

Поряд з поняттям сили в механіці існує другий основний силовий фактор – пара сил, яку прикладають до твердого тіла, щоб примусити його до обертання (обґрунтування останнього твердження подано у розділі «Динаміка»).

Звернувшись до рис. 1.24, складемо суму моментів усіх сил відносно точки A за теоремою Варіньйона. Тоді отримаємо довжину плеча (важеля) AC , у точці C якого має бути прикладена рівнодійна \bar{R} :

$$AC \cdot R \cdot \sin \alpha = AB \cdot P_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow R = P_1 - P_2 \Rightarrow AC = AB \frac{P_2}{P_1 - P_2} \quad (1.36)$$

де α – кут між лінією AB і векторами паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{R}$.

Чи мають рівнодійну ці антипаралельні сили, якщо $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$? Аналізуючи вираз (1.36), легко побачити, що за поступового зменшення рівнодійної або різниці між модулями антипаралельних сил, знаменник виразу наближається до нуля, а тому довжина плеча AC наближатиметься до нескінченності. Таким чином, рівнодійної двох рівних антипаралельних сил не існує, тому тут виникає новий силовий фактор – пара сил.

Пара сил, прикладена до твердого тіла, – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, що мають різні лінії дії.

З першої аксіоми про дві сили випливає, що тіло під дією системи сил, які створюють пару, не може перебувати у стані

рівноваги. Крім того, пара не має рівнодійної, оскільки підсумковий вектор системи двох таких сил дорівнює нулю.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.25), до якого в точках A і B прикладені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , такі, що: $F_1 = F_2$ і $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$. Це означає, що до тіла прикладена пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) .

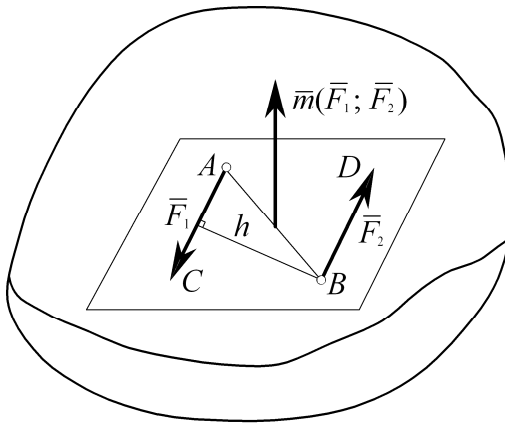


Рис. 1.25

Площина, в якій розміщені сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил характеризується моментом, що викликає поворот тіла парою у площині її дії, тобто, пара створює обертальний ефект.

Алгебраїчним моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари. Плече пари h (рис. 1.25) – це найкоротша відстань (за перпендикуляром) між лініями дії сил, що становлять пару.

Момент пари вважається додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки і, навпаки, – від’ємним, якщо пара намагається повертати тіло за годинниковою стрілкою. Момент пари за модулем або алгебраїчний мо-

мент позначається так: $m(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$. Визначимо алгебраїчний момент пари сил, зображеної на рис. 1.25:

$$m(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = F_1 \cdot h = F_1 \cdot AB \cdot \sin(\overline{F}_1, \wedge \overline{AB}) = F_2 \cdot h. \quad (1.37)$$

Згідно з виразом (1.37), модуль моменту пари у геометричній інтерпретації дорівнює площі паралелограма $ACBD$ або подвійній площі трикутника ABC .

Одиницею виміру моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, є у системі СІ добуток ньютон на метр (Hm).

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей векторний момент, за аналогією з векторним моментом сили відносно центра, спрямовується перпендикулярно до площини дії пари у той бік, з якого здається, що поворот тіла або площини під дією пари відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика). Векторний момент пари $m(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ показаний на рис. 1.25. На відміну від векторного моменту сили відносно центра, **векторний момент пари сил є вільним вектором**: він не має ні фіксованої точки прикладання, ні фіксованої лінії дії сил, що становлять пару (див. нижче).

Властивості пари сил

Оскільки система двох рівних антипаралельних сил не може бути зведена до рівнодійної, то, як наслідок, **пару сил неможливо зрівноважити однією силою**. Це ще раз нагадує про новий силовий фактор, який становить пара. Це перша властивість пари сил.

Друга властивість пари сил: **сума проєкцій сил, що становлять пару, на будь-яку вісь дорівнює нулю** – це очевидно. Тому пара сил не може входити до рівнянь суми проєкцій сил на вісь, а входить тільки до рівнянь суми моментів сил відносно центра.

Слід зазначити, що точки прикладання сил пари можна переміщувати вздовж ліній дії сил у межах цього тіла.

Векторним моментом пари називається момент будь-якої із сил, що створюють пару, відносно точки прикладання другої сили за виразом (1.24):

$$\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}_A(\vec{F}_2) = \vec{m}_B(\vec{F}_1) = \vec{A}\vec{B} \times \vec{F}_2 = \vec{B}\vec{A} \times \vec{F}_1, \quad (1.38)$$

де $\vec{A}\vec{B}$ – радіус-вектор точки прикладання сили \vec{F}_2 відносно точки A ;

$\vec{B}\vec{A}$ – радіус-вектор точки прикладання сили \vec{F}_1 відносно точки B .

Векторний момент пари становить повну характеристику статичної дії пари сили на тверде тіло, тому дії над парами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Модуль векторного моменту для виразу (1.38) з урахуванням виразу (1.37) дорівнює (рис. 1.25):

$$|\vec{A}\vec{B} \times \vec{F}_2| = AB \cdot F_2 \sin(\angle \vec{A}\vec{B}, \vec{F}_2) = F_2 \cdot h = F_1 \cdot h$$

Із виразу (1.38) можна побачити, що для визначення моменту пари вибирались точки A і B , але немає принципової різниці, якщо за центр моментів вибрати будь-яку іншу точку на площині або у просторі. Із цього положення випливає і третя властивість пари сил, яку можна вважати теоремою про суму моментів сил пари:

сума векторних моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки дорівнює векторному моменту цієї пари і від вибору положення точки не залежить.

Математично це твердження можна записати наступним чином для подібної пари сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) :

$$\bar{m}_o(\bar{P}_1) + \bar{m}_o(\bar{P}_2) = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2). \quad (1.39)$$

Доведемо, що це твердження має місце у дійсності, для чого звернемося до рис. 1.26 і визначимо ліву частину виразу (1.39):

$$\bar{m}_o(\bar{P}_1) + \bar{m}_o(\bar{P}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{P}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{P}_2 = \overline{AB} \times \bar{P}_2 = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2), \quad (1.40)$$

оскільки $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{AB}$ і ця відстань не залежить від вибору точки O у просторі.

Ця теорема має практичне значення під час розв'язування задач: для будь-якої точки достатньо взяти момент пари сил, не обчислюючи суму моментів кожної сили.

Якщо точка O як центр моменту обирається у площині дії пари, то справедлива не векторна, а алгебраїчна сума моментів сил:

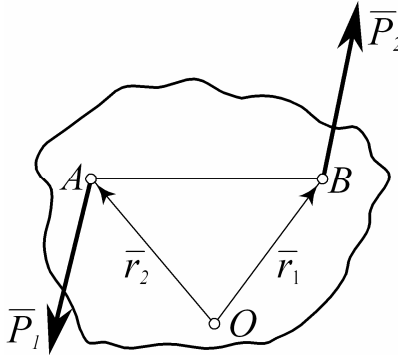


Рис. 1.26

$$m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = m_B(\bar{P}_1) + m_A(\bar{P}_2). \quad (1.41)$$

Отже, вираз (1.41) свідчить про те, що алгебраїчний момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки, що розміщується на лінії дії другої сили цієї пари.

Теорема про еквівалентність пар сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил вважаються еквівалентними, якщо за всіх інших рівних умов їхня дія на тіло однакова, тобто, після заміни цих пар одна на одну механічний стан твердого тіла не порушиться. Оскільки дія пари сил характеризується її моментом, то пари сил, розміщені в одній площині, будуть еквівалентними, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти. Розглянемо теорему про еквівалентність пар сил на площині.

Не змінюючи дії на тверде тіло, пару сил можна замінити будь-якою іншою парою, що розміщена довільно в одній площині і має однаковий алгебраїчний момент.

Припустимо, що задана пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) (рис. 1.27), з плечем d_1 і алгебраїчним моментом $m_1 = F_1 \cdot d_1$ площина дії якої на тверде тіло збігається з площиною рисунка.

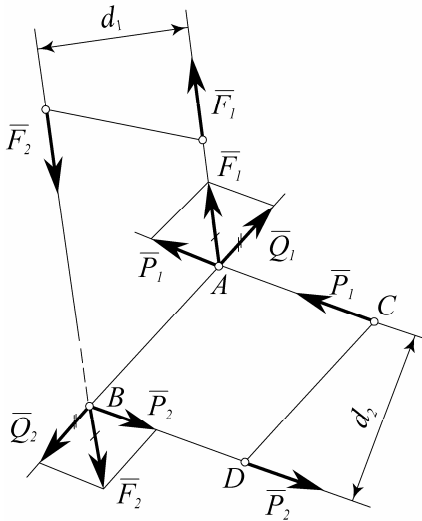


Рис. 1.27

Розкладемо вектори заданої пари (\bar{F}_1, \bar{F}_2) на два напрями: вздовж лінії, що з'єднує точки A і B , і вздовж лінії дії векторів другої пари (\bar{P}_1, \bar{P}_2) . Розкладання відбувається за аксіомою про паралелограм сил:

$$\bar{F}_1 = \bar{P}_1 + \bar{Q}_1; \quad \bar{F}_2 = \bar{P}_2 + \bar{Q}_2. \quad (1.42)$$

Як легко побачити з рис. 1.27, сили \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 на підставі першої аксіоми про рівновагу двох рівних сил зрівноважуються і можуть бути виключені, а точки прикладання векторів сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , що залишилися, можна перенести в довільні точки C і D на площині. Щоб остаточно довести еквівалентність проведеного перетворення, залишається підтвердити, чи дорівнюють алгебраїчні моменти цих двох пар.

Із виразу (1.42) випливає, що сили \bar{F}_1, \bar{F}_2 є рівнодійними двох інших сил, тому застосуємо теорему Варіньйона, склавши суми моментів відносно точки B :

$$\begin{aligned} m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q); &\Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2 + Q \cdot 0; \Rightarrow \\ &\Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Вираз (1.43) переконливо доводить, що момент заданої пари дорівнює алгебраїчному моменту еквівалентно перетвореної пари:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F \cdot d_1 = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P \cdot d_2. \quad (1.44)$$

Отже, зроблено еквівалентне перетворення пари сил у площині: задану пару перенесли в інше місце на тілі, повернули на довільний кут, змінили модулі векторів сил і плечі пар сил, залишивши незмінним лише два головних параметри пар: алгебраїчний момент і площину дії.

Таким чином, пара сил, що діє на тверде тіло, становить новий самостійний елемент статички, новий силовий фактор, який поряд із силою є важливішим поняттям механіки. Основні

властивості нового силового фактора і основні правила перетворення, яким підпорядкований цей фактор, встановлені доведеними теоремами про пари.

З доведених теорем випливають **умови еквівалентності пар сил**:

– не змінюючи дії на тіло, пару сил можна повертати на будь-який кут та переносити як завгодно в площині її дії в межах цього тіла;

– дія пари на тіло не зміниться, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площа дії залишалися незмінними;

– пара сил на площині вважається заданою, якщо заданий її алгебраїчний момент і площа дії;

– якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати.

Якщо всі пари цієї системи пар розміщені в одній площині, то момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k ; \quad (1.45)$$

– сума моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки не залежить від положення точки і дорівнює моменту пари.

– питання про те, який рух буде здійснювати тверде тіло під дією пари сил, належить до задач динаміки.

Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині

Допустимо, що до тіла прикладена система пар сил з алгебраїчними моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складо-

вих пар M . Тоді для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент рівнодійної пари дорівнював нулю. У такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.46)$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох антипаралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Як спрямований векторний момент сили відносно точки?
5. Що таке пара сил або просто пара?
6. Які властивості має пара сил?
7. Як визначити момент пари? Як спрямований векторний момент пари?
8. Як формулюється теорема про еквівалентність пар сил?
9. Як формулюється теорема Варіньйона?
10. Як вибираються точки прикладання векторних моментів пари сил і сили відносно центра?

1.4. Плоска система сил. Зведення сил і умови рівноваги тіл

1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині. Лема про паралельне перенесення лінії дії сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розміщені в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил. Розглянемо лему про паралельне перенесення лінії дії сили, прикладеної до тіла. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \vec{P}_1 з лінією дії MN (рис. 1.28а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему двох сил $\vec{P}_2 = -\vec{P}_3$, яка еквівалентна нулю, модулі ж усіх трьох сил виберемо однаковими: $P_1 = P_2 = P_3$. Тоді статичний стан твердого тіла на рис. 1.28а є еквівалентним стану тіла на рис. 1.28б. Як легко побачити з рис. 1.28б, сили \vec{P}_1 і \vec{P}_3 можна об'єднати у пару сил (\vec{P}_1, \vec{P}_3) , адже $P_1 = P_3$, $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_3$, і замінити моментом $m(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ пари. Слід зазначити, що модуль моменту цієї пари дорівнює моменту цієї сили \vec{P}_1 відносно точки B :

$$m(\vec{P}_1, \vec{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\vec{P}_1). \quad (1.47)$$

Отже, остаточно маємо силу \vec{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сили дорівнюють $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$) і, так звану, «приєднану» пару (\vec{P}_1, \vec{P}_3) , момент якої дорівнює моменту сили заданої \vec{P}_1 , що переноситься, відносно точки переносу B (рис. 1.28в). Тому задана сила \vec{P}_1 , прикладена в точці A , еквівалентна рівній їй силі \vec{P}_2 , прикладеній у точці B , і парі сил

(\bar{P}_1, \bar{P}_3) з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

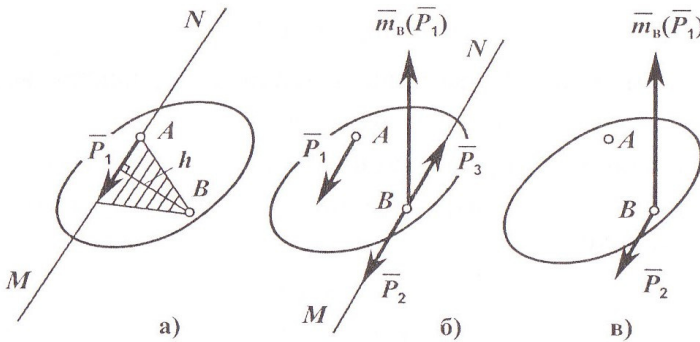


Рис. 1.28

Таким чином, теорему можна сформулювати так.

У разі *паралельного перенесення лінії дії* прикладеної до твердого тіла сили у довільну точку на тілі статичний стан тіла не зміниться, якщо при цьому додати, так звану, «приєднану» або *компенсаційну пару*, момент якої дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички

Уявимо довільне тверде тіло, що знаходиться під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунка і розташовані довільно (рис. 1.29а). Виберемо на тілі довільну точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самім собі (якщо

лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься вздовж лінії дії у центр зведення).

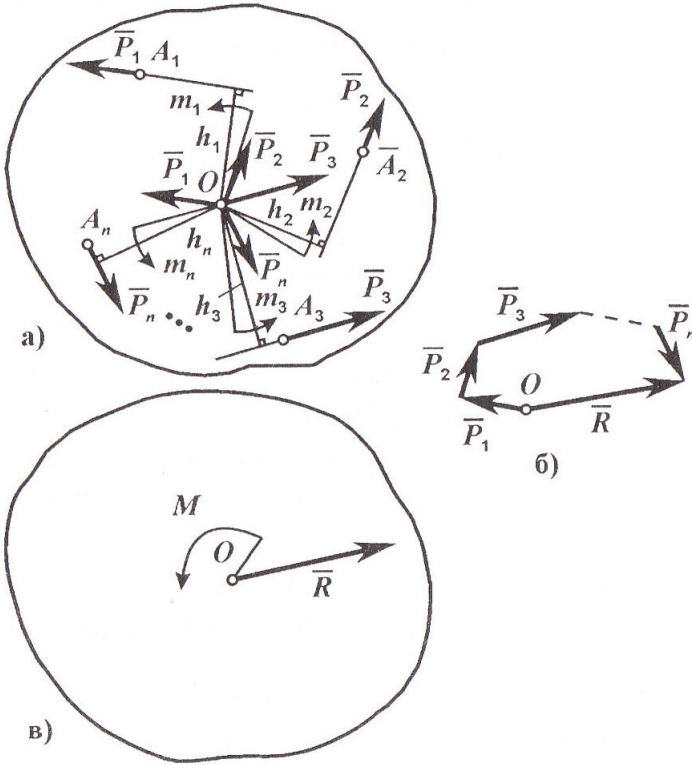


Рис. 1.29

Розпочнемо з сили \bar{P}_1 . Лінія дії сили переноситься паралельно самій собі у точку O , за нею відкладається сила, при цьому до тіла додається момент «приєднаної» пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (1.48)$$

Тепер маємо, згідно з лемою, силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та «приєднану» до тіла пару сил з моментом m_1 . Подібне вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються «приєднані» пари сил:

$$\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \end{aligned} \tag{1.49}$$

У підсумку таких операцій до тіла в точці O прикладатиметься плоский пучок системи збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і система «приєднаних» пар сил з моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

Пучок збіжних сил у точці O можна замінити однією силою \bar{R} , яку називають головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно додати векторно систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення O , будуючи силовий багатокутник (рис. 1.29б):

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \tag{1.50}$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \tag{1.51}$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили \bar{R} – головного вектора системи – і однієї пари сил з моментом M – головного моменту системи (рис. 1.29в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів системи сил відносно центра зведення.

Головний вектор \bar{R} і головний момент M плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Так, величина головного вектора \bar{R} не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту M залежить від зміни положення центра зведення.

Якщо ж головний вектор \bar{R} дорівнює нулю, то головний момент M буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент M дорівнює нулю, то головний вектор \bar{R} буде рівнодійною плоскої системи сил.

Визначимо аналітично головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил.

Для обчислення головного вектора \bar{R} спочатку визначимо його проєкції на осі плоскої прямокутної системи декартових координат (відповідно до теореми про проєкцію рівнодійної сили на вісь):

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

де P_{kx} , P_{ky} – проєкції k -ї сили системи на відповідні осі координат.

Визначивши проєкції головного вектора на осі координат, отримаємо модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.53)$$

Головний момент M визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O :

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.54)$$

Розглянемо окремі випадки, які можуть мати місце під час зведення плоскої системи довільних сил до визначеного центра.

1. Головний вектор $\bar{R} = 0$, а головний момент $M \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту M не залежить від вибору центра зведення;

2. Головний момент $M = 0$, а головний вектор $\bar{R} \neq 0$. У такому випадку головний вектор \bar{R} є рівнодієюною силою системи сил.

1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил

Визначимо умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил, за яких ця система сил буде зрівноваженою. Це одна із двох основних задач статички.

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої системи довільних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент M системи дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} = \sum \bar{P}_k = 0, \\ M_o = \sum m_o(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Це означає, що кожний доданок під радикалом виразу (1.53) як сума проєкцій (1.52) має дорівнювати нулю. Звідси отримуємо аналітичні умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_o (\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Таким чином, для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на дві осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Умови рівноваги у формі (1.56) є основною формою умов рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил, оскільки не накладають ніяких обмежень ні на розташування осей системи координат, ні на положення центра, відносно якого складаються моменти прикладених сил.

Існують дві інші додаткові форми умов рівноваги тіла для плоскої системи довільних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A (\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B (\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

На цю форму умов рівноваги (1.57) накладається обмеження: пряма, що може з'єднувати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів сил, не повинна бути перпендикулярною до осі, на яку проєктуються ці сили.

Необхідність умов рівноваги (1.57) очевидна: якщо будь-яка одна умова із системи умов не виконується, то рівноваги не буде.

Розглянемо достатність умов рівноваги. Якщо виконуються, наприклад, дві останні умови, то головний момент системи сил дорівнює нулю і така система може бути зведена до однієї еквівалентної сили – рівнодійної, лінія дії якої буде проходити крізь точки A і B . Проте, згідно з першою умовою має бути $R_x = 0$. Оскільки вісь x не перпендикулярна до прямої AB , то остання умова може бути виконана тільки тоді, якщо рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, тобто коли тіло буде зрівноваженим.

Третя форма умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

На цю форму умов рівноваги також накладається обмеження: точки A , B і C , відносно яких складаються суми моментів сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Необхідність форми умов (1.58) очевидна, оскільки під час рівноваги алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільного центра дорівнює нулю. Достатність цих умов випливає з того, що, коли за одночасного виконання цих умов ця система сил не була б зрівноваженою, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б крізь точки A, B, C , що неможливо, тому що ці точки не розміщені на одній прямій. Отже, у разі виконання умов (1.58) тіло під дією плоскої системи довільних сил буде зрівноваженим.

1.4.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи паралельних сил

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде паралельною заданим силам, а друга – перпендикулярною. Тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проєкцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У такому випадку система умов рівноваги (1.56) спрощується і матиме такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи **паралельних сил на площині**, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна **сума проєкцій** усіх сил на вісь, яка паралельна силам¹, і алгебраїчна **сума моментів** усіх сил відносно довільної точки площини дорівнювали **нулю**.

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія AB , якою можна з'єднати центри моментів, не повинна бути паралельною векторам сил.

Такі умови (1.60) найбільш придатні під час розрахунків двоопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок A і B , у яких встановлені опори балки.

1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил

Приклад 1.4

Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 Н у точці A закріплена шарнірно, а у точці O опирається на точкову опору (рис. 1.30). До другого кінця балки B підвішений

¹ На яку завгодно вісь, крім перпендикулярної, але простіше проєктувати на паралельну силам вісь, що тут і приймається.

вантаж вагою 200 Н . Довжина балки 4 м , точкова опора розміщена на відстані $\frac{3}{4}$ довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції опор балки.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу ваги \bar{G} самої балки і силу ваги \bar{Q} вантажу. Сила ваги балки \bar{G} прикладена посередині балки у точці C (балка однорідна) і спрямована вертикально вниз. Сила ваги вантажу \bar{Q} прикладена в точці B балки і спрямована вертикально вниз.

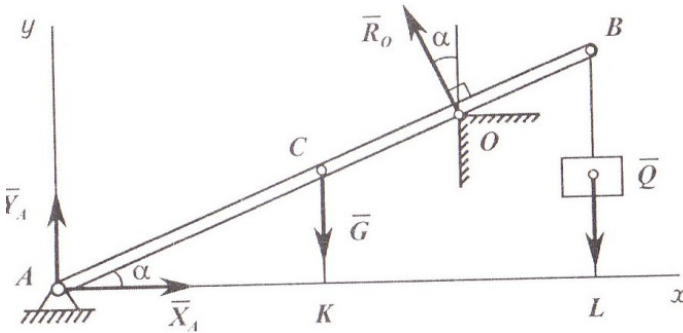


Рис. 1.30

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей.

У точці A розміщена шарнірно-нерухома опора, напрям її реакції невідомий, тому розкладаємо останню на дві складові \bar{X}_A і \bar{Y}_A , які спрямуємо вздовж відповідних осей координат. У точці O – точкова опора, яка дає одну реакцію \bar{R}_O , спрямовану перпендикулярно до балки.

Таким чином, балка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі

використовуємо умови рівноваги (1.56). Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_o &= 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_o &= 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_o - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію R_o :

$$R_o = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86 \text{ Н}$$

і підставимо її значення у перші два рівняння:

$$X_A = \frac{1}{2}R_o = 230,93 \text{ Н}; \quad Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \text{ Н}.$$

Оскільки визначені складові реакції, що прикладені в точці A , то векторним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

Приклад 1.5

Визначити реакції опори однорідної балки AB (рис. 1.31) прямокутного перерізу, один кінець якої A жорстко закріплений у стіні і яка перебуває під дією зосередженої сили $P = 4,0 \text{ кН}$, пари сил з моментом $m = 2,0 \text{ кНм}$ і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$.

Довжина балки AB дорівнює 5 м , рівномірно-розподілене навантаження діє на ділянці 3 м від точки A . Кут нахилу

зосередженої сили \bar{P} до горизонту становить $\alpha=30^\circ$, осі x і y показані на рис. 1.31.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, прикладені до балки AB .

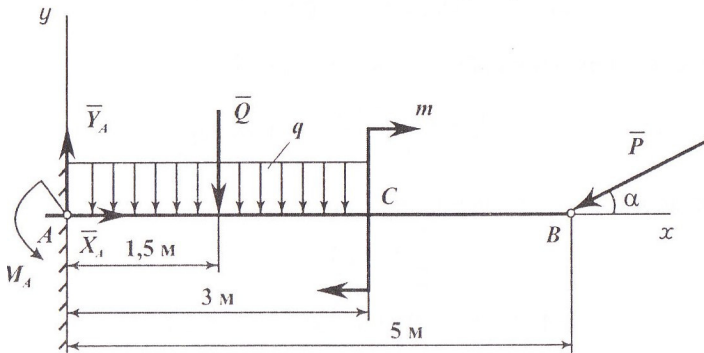


Рис. 1.31

Насамперед, це задані активні сили: сила \bar{P} , прикладена до кінця балки B і спрямована під кутом α до горизонту; рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою:

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ kH}.$$

Сила \bar{Q} прикладена посередині ділянки AC і спрямована у той самий бік, що і саме навантаження – вертикально вниз.

Покажемо на силовій схемі пару сил, яка задається моментом m .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями.

У точці A маємо жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно створює дві складові реакції: \bar{X}_A та \bar{Y}_A , розміщені вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A .

Напряг цього невідомого моменту показано на силевій схемі довільно, наприклад, проти ходу стрілки годинника. Якщо ж під час остаточного визначення моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то це інформує про те, що дійсний напряг моменту є протилежним. Покажемо на силевій схемі лінійні параметри і осі прямокутної системи декартових координат.

Як легко побачити з побудованої розрахунково-силевої схеми, балка перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи довільних сил.

Використовуємо умови рівноваги (1.56). На підставі цих умов складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - Q - P \sin \alpha &= 0, \\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - P \sin \alpha \cdot AB + M_A - m &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння $X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ кН}$.

З другого рівняння $Y_A = 4,5 + 4,0 \cdot \frac{1}{2} = 6,50 \text{ кН}$.

З третього рівняння

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ кНм}$$

Модуль R_A повної реакції у точці A дорівнює:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ кН}$$

Приклад 1.6

Визначити реакції опор жорсткої конструкції, показаної на рис. 1.32, якщо:

$$F = 10 \text{ кН}; \quad M = 4 \text{ кНм}, \quad q = 2 \text{ кН/м};$$

$$\alpha = 60^\circ; a = 3 \text{ м}; b = 4 \text{ м}; d = 5 \text{ м}.$$

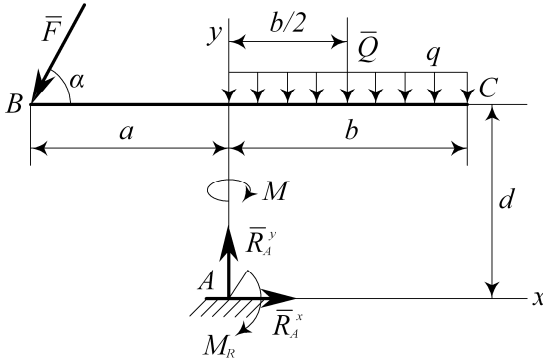


Рис. 132

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему (рис. 1.32). Для цього спочатку зосередимо рівномірно-розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ кН/м}$, визначивши загальну силу $Q = q \cdot b = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ і приклавши її посередині ділянки довжиною b .

Далі покажемо реакції опори – це жорстке закріплення в точці A . Реакція цієї опори складається із двох складових \bar{R}_A^x і \bar{R}_A^y , а також реактивного моменту M_R , які і є шуканими невідомими. Виберемо систему координат xAy .

Аналізуючи розрахункову схему (рис. 1.32), можна побачити, що жорсткий тавр ABC навантажений плоскою системою довільних сил. Умови рівноваги (1.56).

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - F \cos \alpha = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F \sin \alpha - Q = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_R - M - Q \frac{b}{2} + F \cos \alpha \cdot d + F \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівняння (а) шукаємо величину реакції R_{Ax} :

$$R_{Ax} = P \cos \alpha = 10 \cdot 10,5 = 5 \text{ kH.}$$

Із рівняння (б) шукаємо величину реакції R_{Ay} :

$$R_{Ay} = P \sin \alpha + Q = 10 \cdot 0,866 + 8 = 16,66 \text{ kH.}$$

Із рівняння (в) шукаємо величину реактивного моменту

$$\begin{aligned} M_R &= P \cos \alpha \cdot d + P \sin \alpha \cdot a - Q \cdot \frac{b}{a} - M = \\ &= 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 8 - 8 \cdot \frac{4}{2} - 4 = 38,98 \text{ Nm.} \end{aligned}$$

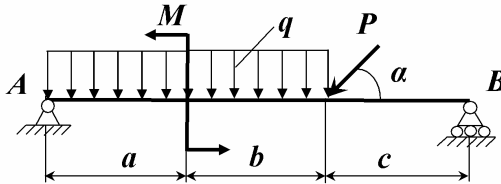


ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї пари?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
7. Сформулюйте теорему Варіньйона про момент рівнодійної.
8. Які умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил?
9. З'ясуйте три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил?
10. Які обмеження накладені на другу і третю форми умов рівноваги для плоскої системи довільних сил?

Задачі для самостійного опрацювання
(про розподілене навантаження див. наступний параграф)

1. Визначити опорні реакції балки за заданим навантаженням



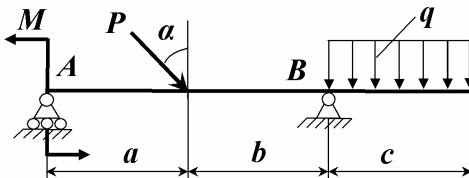
Дано:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 60 \text{ кН м},$$

$$q = 2,0 \text{ кН/м}, \quad a = 2,0 \text{ м},$$

$$b = 4,0 \text{ м}, \quad c = 2,0 \text{ м}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

2. Визначити опорні реакції балки за заданим навантаженням



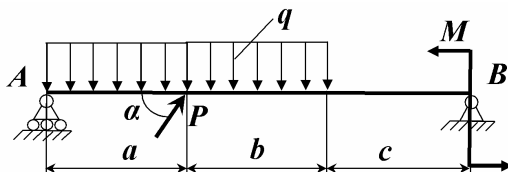
Дано:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 40 \text{ кН м},$$

$$q = 1,0 \text{ кН/м}, \quad a = 4,0 \text{ м},$$

$$b = 2,0 \text{ м}, \quad c = 2,0 \text{ м}, \quad \alpha = 35^\circ.$$

3. Визначити опорні реакції балки за заданим навантаженням



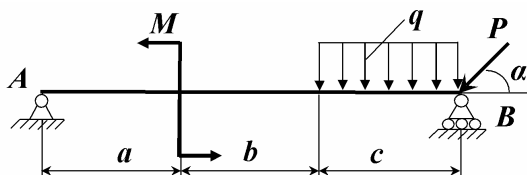
Дано:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 80 \text{ кНм},$$

$$q = 4,0 \text{ кН/м}, \quad a = 4,0 \text{ м},$$

$$b = 2,0 \text{ м}, \quad c = 4,0 \text{ м}, \quad \alpha = 50^\circ.$$

4. Визначити опорні реакції балки за заданим навантаженням



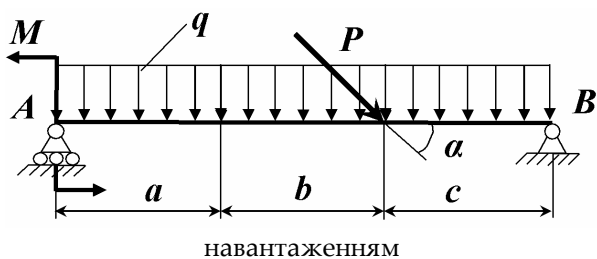
Дано:

$$P = 60 \text{ кН}, \quad M = 40 \text{ кНм},$$

$$q = 5,0 \text{ кН/м}, \quad a = 2,0 \text{ м},$$

$$b = 2,0 \text{ м}, \quad c = 4,0 \text{ м}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

5. Визначити опорні реакції балки за заданим



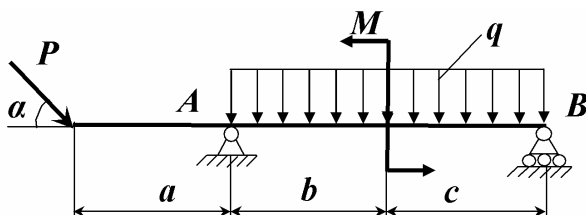
Дано:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 40 \text{ кНм},$$

$$q = 2,0 \text{ кН/м} \quad a = 4,0 \text{ м}, \quad b = 2,0 \text{ м},$$

$$c = 2,0 \text{ м}, \quad \alpha = 43^\circ.$$

6. Визначити опорні реакції балки за заданим навантаженням



Дано:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 20 \text{ кНм},$$

$$q = 2,0 \text{ кН/м}, \quad a = 2,0 \text{ м},$$

$$b = 4,0 \text{ м}, \quad c = 2,0 \text{ м}, \quad \alpha = 54^\circ.$$

1.5. Рівновага системи декількох тіл

1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження

У попередніх розділах розглядалися сили, які були представлені у вигляді зосередженого вектора, прикладеного до точки.

Проте, у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Прикладами розподілених сил є сили тиску рідини або газу, сили ваги як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому, у теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі і об'ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла, об'ємні – на кожний елемент об'єму тіла. Прикладом останніх сил є сила ваги.

Під час розв'язування задач розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто, зосередженою силою.

Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю \bar{q} , тобто, величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла, на одиницю площі або на одиницю довжини.

В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри елементарних сил, тобто, графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елемента тіла.

У загальному випадку плоске розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає заданий закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (балки) (рис. 1.33).

Розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом.

1. Рівномірно розподілене навантаження (розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника: висота – це інтенсивність навантаження \bar{q} , довжина – це довжина l ділянки тіла. Стрілки показують напрям дії навантаження (рис. 1.34).

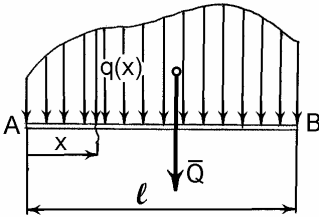


Рис. 1.33

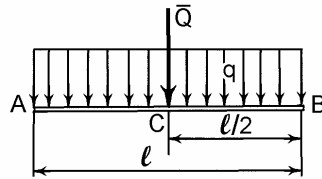


Рис. 1.34

Для того, щоб замінити це навантаження рівнодієюю силою \bar{Q} , треба її визначити:

$$Q = ql, \quad (1.61)$$

де \bar{q} – інтенсивність навантаження, H/m ; l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, m .

Точка C прикладання рівнодіючої сили \bar{Q} розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє рівномірно-розподілене навантаження.

2. Навантаження, розподілене за лінійним законом, зображується трикутником (рис. 1.35).

У цьому випадку інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{max} . Рівнодіюча сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною пропорційна площі трикутника:

$$Q = \frac{l}{2} q_{max} l. \quad (1.62)$$

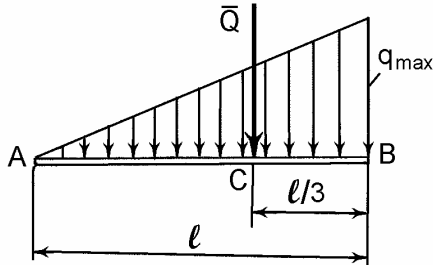


Рис. 1.35

Точка C прикладання рівнодійної \bar{Q} розміщена на відстані від центра площі трикутника (центра ваги): $AC = \frac{2}{3}l$ або $BC = \frac{1}{3}l$, а напрям збігається з напрямом навантаження.

1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі

Задача є статично визначеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь у відповідності до умов рівноваги статички для матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих. Теоретична механіка розглядає тільки статично визначені матеріальні системи. Із раніше наведених прикладів можна зробити з цього приводу такі висновки. Так, для тіла, навантаженого плоскою системою збіжних сил, можна скласти тільки два рівняння рівноваги, тому і невідомих повинно бути не більше двох. Балка на двох опорах, навантажена паралельними

силами в площині, буде статично визначеною, а на трьох – ні, адже рівнянь рівноваги, що можна скласти для цієї системи, тільки два. Для плоскої системи довільних сил можливо визначити тільки три невідомих реакції у зв'язку з кількістю умов рівноваги для цієї системи, на підставі яких складаються рівняння рівноваги.

Причина невизначеності, тобто, недостатності рівнянь статички для визначення шуканих величин полягає у тому, що в статистиці твердого тіла розглядаються абсолютно тверді тіла, без врахування деформацій. Якщо врахувати пружні властивості тіл, тобто, їхні деформації, то невизначені задачі можуть бути розв'язані. Але подібні задачі виходять за межі курсу статички.

Таким чином, задача є статично невизначеною, якщо кількість умов рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

1.5.3. Рівновага системи декількох тіл

У попередніх задачах розглядалась рівновага одного твердого тіла під дією прикладених зовнішніх сил.

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з'єднані шарнірами, які не заважають можливості відносного руху тіл.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл заданої системи з іншими тілами, які не входять до складу цієї системи.

Під час розрахунку системи декількох тіл потрібно розглядати рівновагу кожного тіла окремо, враховуючи сили їхньої взаємодії.

Сили взаємодії згідно з аксіомою про дію і протидію рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Внутрішні сили системи – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу цієї системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія. Більш детально – у наступному підрозділі.

1.5.4. Методика і приклади розв’язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати загалом під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її по внутрішніх в’язях. До того ж, необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій розділених в’язей існують попарно, як сили дії та протидії.

Розглянемо приклади розв’язування задач на рівновагу системи тіл.

Приклад 1.7

На тришарнірну арку ABC (рис. 1.36) діє вертикальна сила $P = 10 \text{ kH}$. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ kH}$.

Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

Розв’язання

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок AC і BC , з’єднаних шарніром у точці C . Складемо розрахунково-силову схему, де покажемо задані активні сили $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$ і реакції в’язей: у точках A і B (нерухомі шарнірні опори) – $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ і у точці C (шарнірне з’єднання) – $\bar{X}_C, \bar{X}'_C, \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C$. Невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C$ і $\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$. Покажемо осі

прямокутної системи декартових координат $Axу$. Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру C . Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями \bar{X}_C, \bar{Y}_C , які дорівнюють:

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.56).

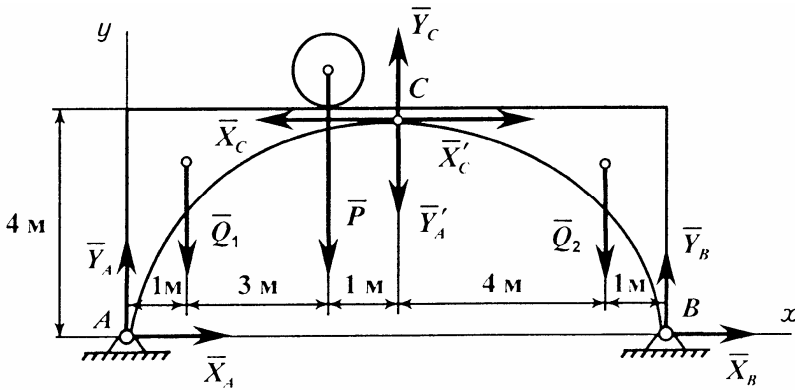


Рис. 1.36

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: X_A , X_B , X_C , Y_A , Y_B , Y_C .

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C :

$$\begin{aligned} Y'_C &= \frac{4X'_C - Q_2}{5}; \\ X_C &= \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH}; \\ Y'_C &= \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}. \end{aligned}$$

З першого рівняння першої системи маємо:

$$X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}.$$

А з першого рівняння другої системи дістаємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи:

$$Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}.$$

Приклад 1.8

Визначити мінімальне значення сили P , яка притискує колодку за допомогою важеля AB до гальмівного барабана, і величину реакцій опор системи в стані спокою. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$ (рис. 1.37).

Задані параметри:

$$Q = 20\text{кН}; a = 1\text{м}; b = 0,5\text{м}; \alpha = 60^\circ; e = 0,05\text{м}.$$

Розв'язання

Ця задача – на рівновагу системи двох тіл: важеля AB і барабана з центром O .

Розглянемо спочатку рівновагу барабана, до якого прикладена задана сила \bar{Q} , відокремивши його від системи (рис. 1.38).

До барабана прикладемо силу \bar{Q}' від дії вантажу \bar{Q} , перерізвавши трос, тому що фактично сила \bar{Q} діє на барабан вздовж горизонталі вправо. Реакцію опори O розкладемо на дві складові \bar{R}_{Ox} і \bar{R}_{Oy} . В точці C контакту барабана з колодкою прикладемо вздовж нормалі силу тиску \bar{N} з боку відкинutoї колодки, а також силу тертя \bar{F}_{mp} в напрямі проти можливого

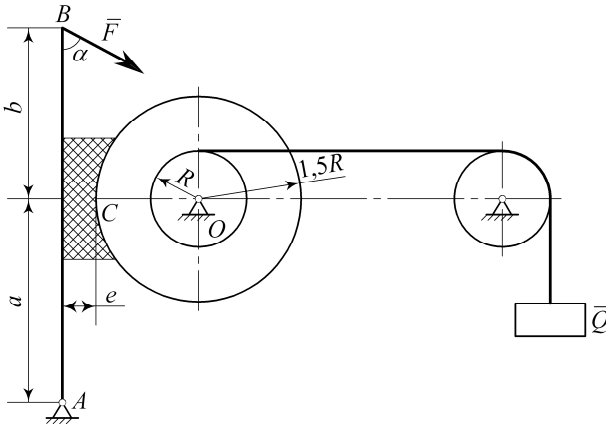


Рис. 1.37

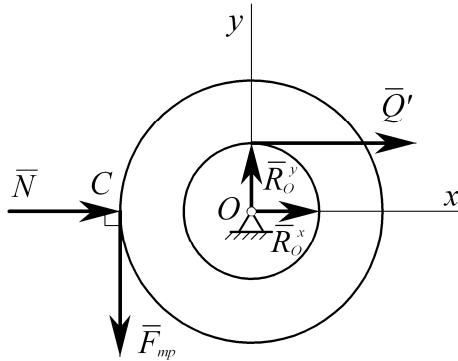


Рис. 1.38

Отримаємо плоску систему довільних сил із 4 невідомими. Але крім трьох умов рівноваги плоскої системи (1.56) запишемо ще і вираз закону Кулона для тертя ковзання $F_{mp} = f N$, тоді задача стає статично визначеною: чотири рівняння і чотири невідомих.

$$\sum P_k x = 0; \quad R_0^x + Q' + N = 0, \quad (a)$$

$$\sum P_k y = 0; \quad R_0^y - F_{mp} = 0, \quad (б)$$

$$\sum M_0 = 0; \quad F_{mp} \cdot 1,5R - Q'R = 0. \quad (в)$$

Із рівняння (в) визначимо необхідну силу тертя:

$$F_{mp} = \frac{Q'R}{1,5R} = \frac{20}{1,5} = 13,3 \text{ кН}.$$

Тоді сила нормального тиску визначається із закону Кулона:

$$N = \frac{F_{mp}}{f} = \frac{13,3}{0,2} = 66,5 \text{ кН}.$$

Із рівняння (а) визначаємо величину реакції R_0^x :

$$R_0^x = -N - Q' = -66,5 - 20 = -86,5 \text{ кН} .$$

Знак «мінус» реакції R_0^x інформує, що, фактично, вона спрямована протилежно, ніж це показано на схемі.

Із рівняння (б) шукаємо величину реакції R_0^y :

$$R_0^y = F_{mp} = 13,3 \text{ кН} .$$

Далі розглянемо рівновагу важеля AB (рис. 1.39).

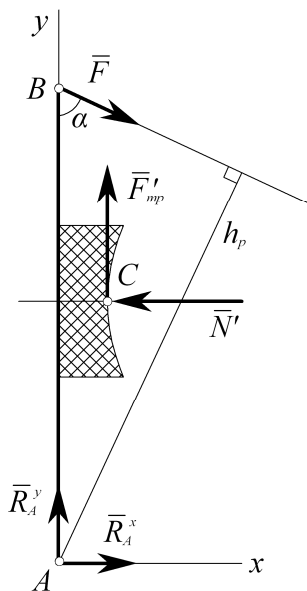


Рис. 1.39

На важіль AB діють з боку гальмівного барабана в точці C сила нормального тиску $N' = -N$ і сила тертя $F'_{mp} = -F_{mp}$ як сили дії і протидії.

Реакцію опори A як для шарнірно нерухомої опори розкладемо на дві складових \bar{R}_A^x і \bar{R}_A^y . В точці B діє шукана сила \bar{P} . Для плоскої системи довільних сил складемо систему трьох рівнянь на підставі умов рівноваги (1.56):

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_A^x - N' + P \sin \alpha = 0, \quad (c)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A^y + F'_{mp} - P \cos \alpha = 0, \quad (d)$$

$$\sum M_0 = 0; \quad N' \cdot a + F'_{mp} \cdot l - P(a + b) \sin \alpha = 0. \quad (e)$$

Із рівняння (e) визначимо величину сили P :

$$P = \frac{N' \cdot a + F'_{mp} \cdot l}{(a + b) \sin \alpha} = \frac{66,5 \cdot 1 + 13,3 \cdot 0,05}{(1 + 0,5) \cdot 0,866} = 51,66 \text{ кН}.$$

Із рівняння (c) визначимо величину реакції R_A^x :

$$R_A^x = N' - P \sin \alpha = 66,5 - 51,66 \cdot 0,866 = 21,76 \text{ кН}.$$

Із рівняння (d) визначимо величину реакції R_A^y :

$$R_A^y = P \cos \alpha - F'_{mp} = 51,66 \cdot 0,5 - 13,3 = 12,53 \text{ кН}.$$

1.5.5. Розрахунок складних технічних систем

Рівновага систем твердих тіл (ланок) на прикладах механізмів і машин

У прикладах розглядається плоска матеріальна система, яка складається із кількох тіл, з'єднаних шарнірно, на базі механізмів і машин, які застосовані в сучасних технологічних процесах у багатьох галузях.

Приклад 1.9

На корпус жатки (рис.1.40) діють такі сили: вага \bar{G} копіювальної частини жатки, сила \bar{P} натягу пружини, рівнодійна реакцій \bar{N} на копіювальні башмаки C та сила тертя \bar{F} башмаків по землі. Для стійкого копіювання поверхні поля необхідно, щоб реакція \bar{N} на башмак дорівнювала $Q(H)$. Визначити натяг \bar{P} пружини, а також тиск у шарнірах A, B, O_1, O_2, O_3 .

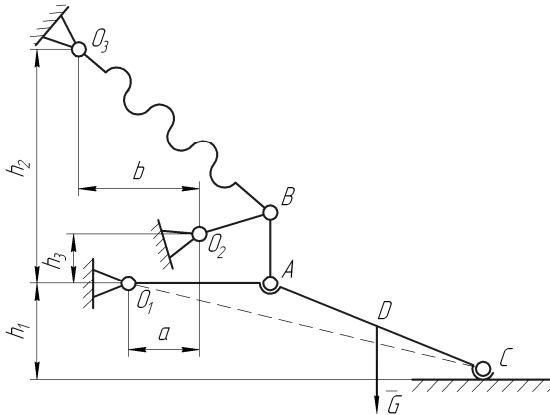


Рис. 1.40

Розв'язання

Задача розв'язується методом, який застосовується для системи тіл. Система роз'єднується на окремі статично визначені частини, до яких прикладені довільні або збіжні системи сил. У шарнірах, де здійснюється роз'єднання, прикладаються сили взаємодії, які за третім законом механіки рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Спочатку корпус жатки відокремлено в точках A і O_1 (рис. 1.41).

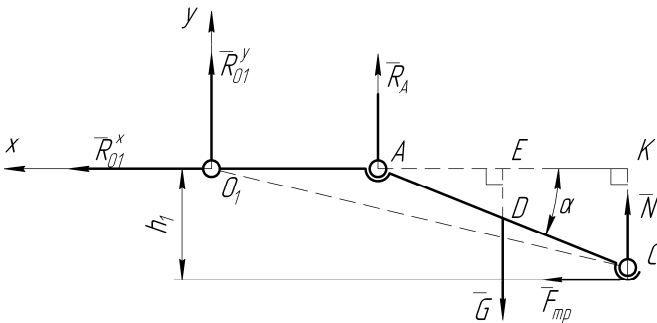


Рис. 1.41

Прикладемо в точці A реакцію \bar{R}_A , яка спрямована вздовж стрижня AB , тому що він є ідеальним. В опорі O_1 реакцію розкладемо на дві складові $\bar{R}_{O_1}^x$ і $\bar{R}_{O_1}^y$, тому що її напрям невідомий. Отримаємо систему довільних сил на площині: три невідомі реакції і три умови рівноваги. На розрахунково-силовій схемі показані сили: \bar{G} – вага; \bar{N} – сила нормального тиску на башмак C ; \bar{F}_{mp} – сила тертя. Складаємо рівняння рівноваги.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_{O_1}^x + F_{mp} = 0; \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_{O_1}^y + R_A - G + N = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_{O_1} = 0; \quad R_A \cdot O_1A - G \cdot O_1E + N \cdot O_1K - F_{mp} h_1 = 0. \quad (в)$$

Сила тертя \bar{F}_{mp} спрямована проти можливого напрямку відносного руху жатки і дорівнює

$$F_{mp} = f N = f Q.$$

Щоб визначити плечі O_1E і O_1K , знайдемо кут α .

$$\sin \alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{h_1}{AC};$$

Тоді $O_1E = O_1A + AD \cdot \cos \alpha;$

$$O_1K = O_1A + AC \cdot \cos \alpha.$$

З рівняння (а) знайдемо $R_{O_1}^x$: $R_{O_1}^x = -F_{mp}$.

Знак мінус за величини реакції означає, що фактично реакція спрямована протилежно, ніж це показано на схемі.

З рівнянь (б) і (в):

$$R_{O_1}^y = G - R_A - N; R_A = \frac{G \cdot O_1E - N \cdot O_1K + F_{mp} h_1}{O_1A}.$$

Перевірка:

$$\sum M_C = 0; G \cdot EK - R_A \cdot AK - R_{O_1}^y \cdot O_1K + R_{O_1}^x \cdot h_1 = 0.$$

Підставимо в останнє рівняння всі дані, у тому числі і величини знайдених реакції. Тотожність має свідчити, що реакції визначені правильно.

Далі розглянемо рівновагу точки B (рис. 1.42).

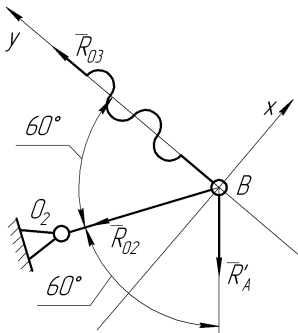


Рис. 1.42

Вона перебуває під дією системи трьох збіжних сил: $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A$; \bar{R}_{O_2} – реакція ідеального стрижня BO_2 ; \bar{R}_{O_3} – реакція гнучкого тіла, пружини.

Вибираємо систему координат, спрямувавши одну з осей уздовж невідомої реакції \bar{R}_{O_3} для її виключення із першого рівняння:

$$\sum P_{\text{кx}} = 0; \quad -R_{O_2} \cos 30^\circ - R'_A \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum P_{\text{кy}} = 0; \quad R_{O_3} + R_{O_2} \cos 60^\circ - R'_A \cos 60^\circ = 0.$$

$$\text{Із рівнянь: } R_{O_2} = -R'_A; \quad R_{O_3} = R'_A \cos 60^\circ - R_{O_2} \cos 60^\circ.$$

Приклад 1.10

Під час переїзду жатку комбайна O_4B піднімають гідроциліндром O_2K (рис. 1.43). При цьому горизонтальний важіль AO_3 спирається на кронштейн DH корпусу похилої камери.

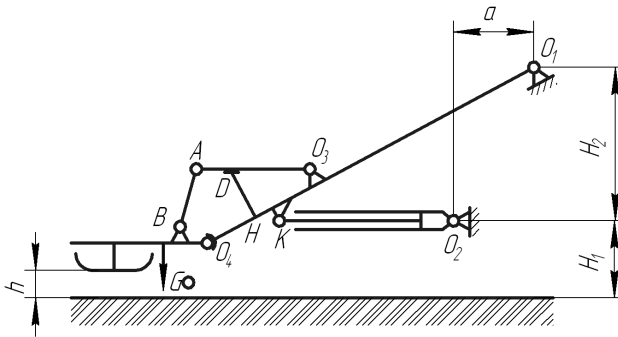


Рис. 1.43

Знайти залежно від висоти підняття жатки тиск на шток гідроциліндра, тиск важеля AO_3 на кронштейн DH , зусилля в вертикальній підвісі AB і в шарнірах O_1, O_2, O_3, O_4 . Вага жатки \bar{G} .

Розв'язання. Відокремимо першу частину, роз'єднавши систему по шарнірах B і O_4 (рис. 1.44). Реакція в шарнірі B вертикальна, вона спрямована вздовж ідеального стрижня AB . Реакцію в шарнірі O_4 розкладаємо на дві складові $\bar{R}_{O_4}^x$ і $\bar{R}_{O_4}^y$ як для підшипника або шарнірно-нерухомої опори.

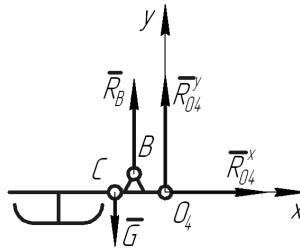


Рис. 1.44

Оскільки сума проєкцій сил на вісь x дорівнює нулю, то $\sum P_{kx} = R_{O_4}^x = 0$, і тому маємо систему паралельних сил на площині. Рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0; R_B + R_{O_4}^y - G = 0; \quad (a)$$

$$\sum M_{O_4} = 0; -R_B \cdot O_4B + G \cdot O_4C = 0. \quad (б)$$

З рівнянь (а) і (б): $R_B = \frac{G \cdot O_4C}{O_4B}$; $R_{O_4}^y = G - R_B$.

Для перевірки треба скласти суму моментів сил відносно точки C і дістати тотожність, що свідчить за вірність розрахунку.

Відокремимо другу частину системи (рис. 1.45)

Реакція в шарнірі A : $\bar{R}_A = -\bar{R}_B$. Реакція \bar{R}_D перпендикулярна опорі D як до горизонтальної напрямної (тертя не враховується). Реакція \bar{R}_{O_3} вертикальна, оскільки горизонтальна складова відсутня. Маємо систему паралельних сил на площині.

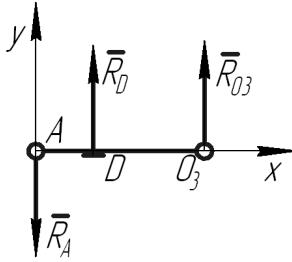


Рис. 1.45

Рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0; -R_A + R_D + R_{O_3} = 0; \quad (в)$$

$$\sum M_D = 0; R_A \cdot AD + R_{O_3} \cdot DO_3 = 0; \quad (г)$$

З рівнянь (в) і (г): $R_{O_3} = -\frac{R_A \cdot AD}{DO_3}$, $R_D = R_A - R_{O_3}$.

Розглянемо останню частину. Реакції в точках D , O_3 , O_4 визначені в попередніх розрахунках і прикладені до основної рами протилежно за законом дії і протидії (рис. 1.46)

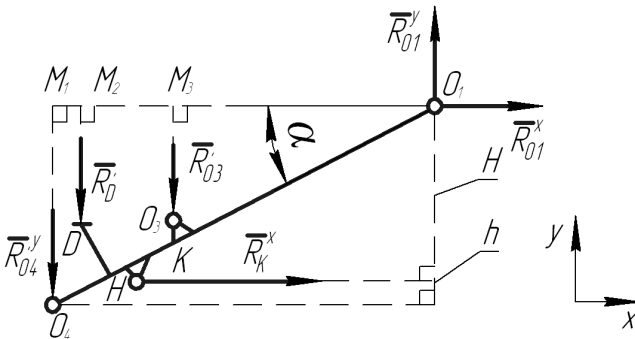


Рис. 1.46

Шукана реакція в шарнірі O_1 розкладена на дві складові вздовж осей координат, реакція штока \bar{R}_k гідроциліндра спрямована вздовж штока (ідеальний стрижень). Система сил у третій відокремленій частині є плоскою системою довільних сил.

Рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_k + R_{O_1}^x = 0; \quad (д)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad -R_{O_4}^y - R'_D - R'_{O_3} + R_{O_1}^y = 0; \quad (е)$$

$$\sum M_{O_1} = 0 \quad R'_{O_3} \cdot O_1M_1 + R'_D \cdot O_1M_2 + R'_{O_4} \cdot O_1M_3 + R_k \cdot H = 0. \quad (ж)$$

Визначаємо кут нахилу α : $\sin \alpha = \frac{H}{O_1C}$.

З рівняння (ж) знайдемо невідому реакцію штока:

$$R_k = \frac{-R'_{O_3} \cdot O_1M_1 - R'_D \cdot O_1M_2 - R'_{O_4} \cdot O_1M_3}{H}. \quad (з)$$

Визначимо плечі за схемою:

$$O_1M_1 = O_1O_3 \cdot \cos \alpha;$$

$$O_1M_2 = O_2H \cdot \cos \alpha;$$

$$O_1M_3 = O_1O_4 \cdot \cos \alpha.$$

З рівнянь (д) і (е):

$$R^x = -R_k; \quad R_{O_1}^y = +R'_{O_4} + R'_D + R'_{O_3}.$$

Перевірка: складемо суму моментів сил відносно центра O_4 :

$$\begin{aligned} \sum M_{O_4} = 0; & -R'_D \cdot M_1M_2 - R'_{O_3} \cdot M_1M_3 + \\ & + R_{O_1}^y \cdot O_1M_3 - R_k \cdot h - R_{O_1}^x (H + h) = 0. \end{aligned} \quad (ж)$$

Визначимо плечі:

$$M_2M_3 = O_1M_3 - O_1M_2;$$

$$M_1M_3 = O_1M_3 - O_1M_1;$$

$$h = O_4C \cdot \sin \alpha = (O_1O_4 - O_1C) \sin \alpha.$$

Підставимо всі дані в рівняння (ж) і, якщо отримаємо тотожність $0=0$, то розв'язок вірний.

Приклад 1.11

У точці E механізму навіски трактора прикладена сила \vec{R}_E (рис. 1.47).

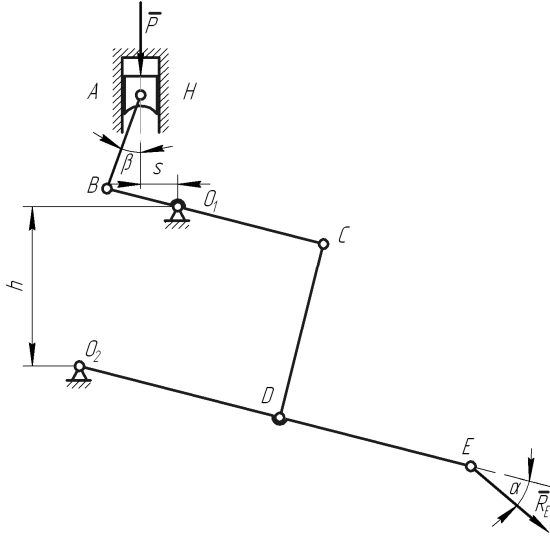


Рис. 1.47

Визначити тиск \bar{P} у гідроциліндрі H і зусилля на шатуні AB і стрижні CD .

Розв'язання

Відокремимо першу частину, важіль O_2DE (рис. 1.48).

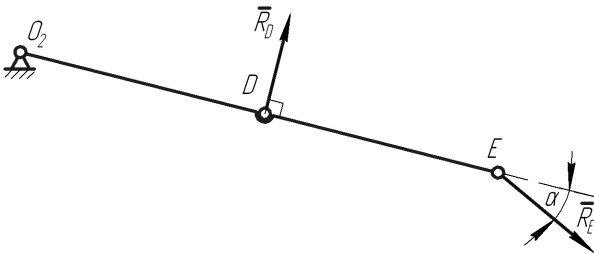


Рис. 1.48

Для визначення реакції \bar{R}_D в стрижні DC прикладаємо її вектор в точці D вздовж цього стрижня, оскільки він є ідеальним.

Складемо суму моментів усіх сил відносно центра O_2 :

$$\sum M_{O_2} = 0; R_D \cdot O_2D - R_E \sin \alpha \cdot O_2E = 0;$$

звідки

$$R_D = \frac{R_E \sin \alpha \cdot O_2E}{O_2D}.$$

Зусилля в стрижні DC є протилежним за напрямом реакції \bar{R}_D .

Розглянемо другу частину, важіль BC (рис. 1.49).

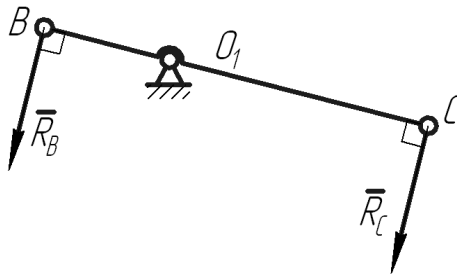


Рис. 1.49

Реакція в шарнірі C протилежна реакції в шарнірі D : $\bar{R}_C = -\bar{R}_D$. Але знак мінус вже врахований на схемі. Реакція \bar{R}_B спрямована вздовж шатуна AB , оскільки він є ідеальним стрижнем, $\bar{R}_B \perp BC$.

Складемо суму моментів відносно центра O_1 :

$$\sum M_{O_1} = 0; -R_C \cdot O_1C - R_B \cdot O_1B = 0; \Rightarrow R_B = \frac{R_C \cdot O_1C}{O_1B}.$$

І, нарешті, розглянемо рівновагу поршня гідроциліндра H (рис. 1.50).

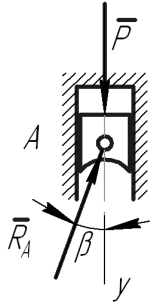


Рис. 1.50

Реакція в поршневому пальці \bar{R}_A протилежна \bar{R}_B за законом дії та протидії.

Отримаємо систему збіжних сил. Проведемо вниз координатну вісь y і складемо суму проєкцій сил на цю вісь, з якої визначимо шуканий тиск на поршень:

$$\sum P_{ky} = 0; P - R_A \cos \beta = 0 \Rightarrow P = R_A \cos \beta.$$

Приклад 1.12

Під час підняття плуга на його корпус діє реакція ґрунту \bar{R} . Визначити зусилля \bar{F} , необхідне для підняття плуга, реакцію стрижня O_1A механізму навіски і реакції шарнірів O_1 і O_2 (рис. 1.51).

Розв'язання. Відокремимо першу частину – кронштейн ABC (рис. 1.52). В точках A і B роз'єднання прикладемо реакції. В точці A реакція \bar{R}_A спрямована вздовж ідеального стрижня O_1A . В точці B напрям реакції невідомий, тому розкладемо її на дві складових \bar{R}_B^x , \bar{R}_B^y . Реакція $\bar{R}_A \perp AB$. Отримаємо систему довільних сил на площині.

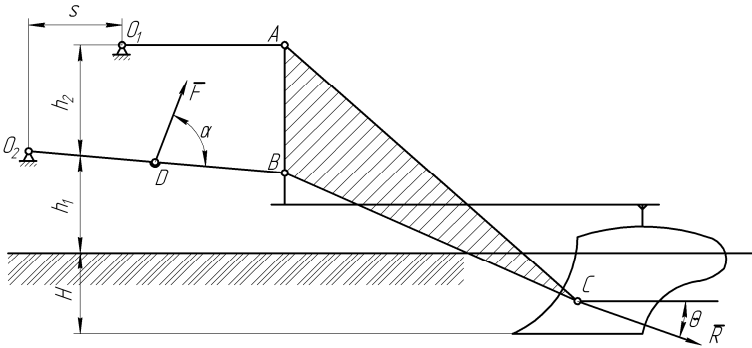


Рис. 1.51

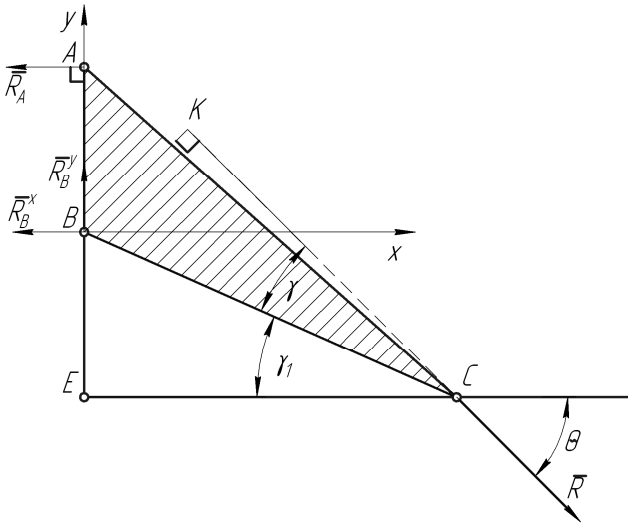


Рис. 1.52

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; R \cos \theta - R_A - R_B^x = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; -R \sin \theta + R_B^y = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot AB - R \cdot BK = 0. \quad (\text{в})$$

З рівнянь (б) і (в): $R_B^y = R \sin \theta$; $R_A = \frac{R \cdot BK}{AB}$.

Для визначення плеча BK із ΔBCK необхідно знайти кут γ . Але спочатку визначаємо кут γ_1 :

$$\sin \gamma_1 = \frac{BE}{BC}; \gamma = \theta - \gamma_1. \text{ Звідки } BK = BC \cdot \sin \gamma.$$

З рівняння (а):

$$R_B^x = R \cos \theta - R_A.$$

Перевірка. Складаємо суму моментів сил відносно точки C .

$$\sum M_C = 0; R_B^x \cdot BE - R_A(BE + AB) - R_B^y \cdot EC = 0. \quad (\text{г})$$

Плече EC визначаємо із ΔBEC :

$$EC = BC \cdot \cos \gamma_1; BE = h + H..$$

Реакція в шарнірі A дорівнює реакції в шарнірі O_1 з протилежним знаком: $R_{O_1} = -R_A$.

Розглянемо рівновагу другої частини (рис. 1.53).

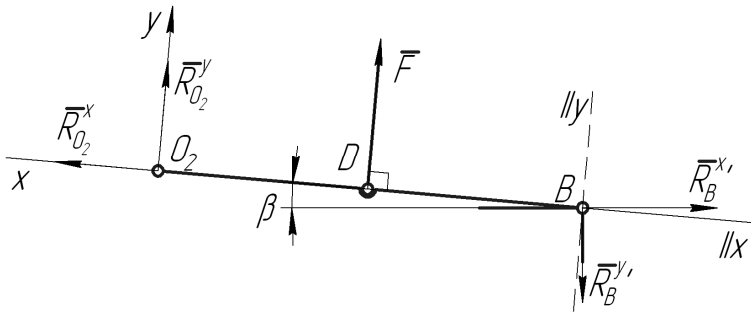


Рис. 1.53

Виберемо вісь x вздовж стрижня O_2B , а вісь y – перпендикулярно. Реакцію в шарнірі O_2 як невідому за напрямом розкладемо на дві складові. Прикладемо в шарнірі B

уже визначені складові, але протилежно як сили взаємодії порівняно з попереднім розрахунком: $\bar{R}_B^x = -\bar{R}_B^x$; $\bar{R}_B^y = -\bar{R}_B^y$.

Знаки мінус у згаданих складових автоматично враховуються схемою, тому підставляємо в рівняння значення їхніх величин з тими знаками, які отримали у попередньому розрахунку.

Отримаємо систему довільних сил на площині, тому система рівнянь має вигляд:

$$\sum P_{kx} = 0; R_{O_2}^x - R_B^{X'} \cos \beta - R_B^{Y'} \sin \beta = 0; \quad (д)$$

$$\sum P_{ky} = 0; R_{O_2}^y + R_B^{X'} \sin \beta - R_B^{Y'} \cos \beta + F = 0; \quad (е)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; F \cdot O_2D + R_B^{X'} \cdot O_2B \cdot \sin \beta - R_B^{Y'} \cdot O_2B \cdot \cos \beta = 0 \quad (ж)$$

Із рівняння (д):

$$R_{O_2}^x = R_B^{X'} \cos \beta + R_B^{Y'} \sin \beta.$$

Із рівняння (ж):

$$F = (R_B^{X'} \cdot O_2B \cdot \sin \beta - R_B^{Y'} \cdot O_2B \cdot \cos \beta) / O_2D.$$

Із рівняння (е):

$$R_{O_2}^y = -R_B^{X'} \sin \beta + R_B^{Y'} \cos \beta + F.$$

Перевірка.

$$\sum M_B = 0; -R_{O_2}^y \cdot O_2B - F \cdot BD = 0;$$

Приклад 1.13

У пресувальну камеру прес-підбирача подається сіно ущільнювачем-набивачем D . Сила опору, що діє на тіло D , дорівнює Q . Знайти величину сили \bar{F} , прикладеної у точці C ланки важеля BC і реакції шарнірів O_1, O_2 (рис. 1.54).

Розв'язання

Відокремимо ущільнювач-набивач D від стрижнів в шарнірах A і B (рис. 1.55). Реакції в шарнірі A спрямуємо вздовж стрижня AO_1 (ідеальний стрижень). Реакцію в шарнірі B розкладемо на дві складових \bar{R}_B^x і \bar{R}_B^y , оскільки її напрям невідомий.

Отримаємо плоску систему довірних сил.

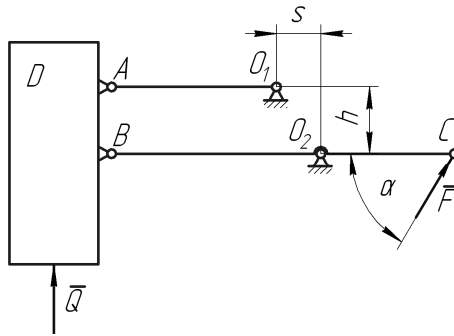


Рис. 1.54

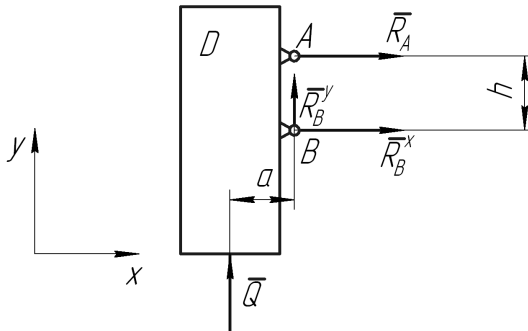


Рис. 1.55

Складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; R_A + R_B^x = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; Q + R_B^y = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_B = 0; R_A h + Q a = 0; \quad (\text{в})$$

Із рівнянь (а) і (в): $R_A = \frac{Qa}{h}$; $R_B^x = -R_A$.

Реакція в шарнірі O_1 дорівнює: $R_{O_1} = -R_A$.

Для визначення реакції в шарнірі O_2 і сили \vec{F} розглянемо рівновагу стрижня BC (рис. 1.56), приклавши протилежно обчислені реакції в точці B .

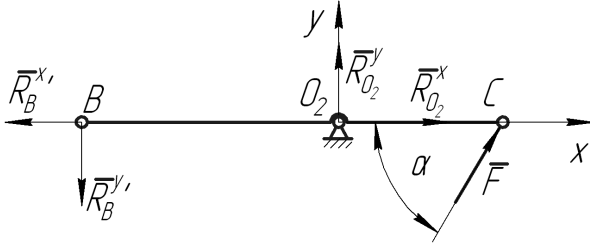


Рис. 1.56

Отримаємо плоску систему довільних сил, для якої запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; R_{O_2}^x - R_B^{x'} + F \cos \alpha = 0; \quad (г)$$

$$\sum P_{ky} = 0; R_{O_2}^y - R_B^{y'} + F \sin \alpha = 0; \quad (д)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; R_B^{y'} \cdot BO_2 - F \cdot O_2C \cdot \sin \alpha = 0; \quad (е)$$

Із рівнянь (г), (д), (е):

$$F = \frac{R_B^{y'} \cdot BO_2}{O_2C \cdot \sin \alpha}; R_{O_2}^x = R_B^{x'} - F \cos \alpha; R_{O_2}^y = R_B^{y'} - F \sin \alpha.$$

Приклад 1.14

У пресі (рис. 1.57) з приводом від чотириланкового механізму визначити зусилля, що стискує тіло M у положенні, коли ланка AB горизонтальна, ланки BC і BD утворюють з вертикаллю кути α та β відповідно, плече OA є вертикальним, а в точці E рукоятки важеля перпендикулярно до OE прикладена сила P .

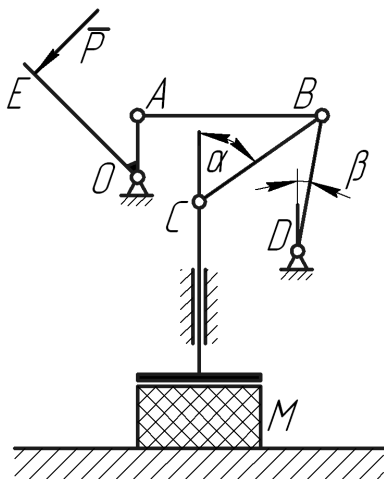


Рис. 1.57

Розв'язання

Починаємо з тієї частини системи тіл, до якої прикладена задана сила P (рис.1.58). Відокремимо важіль EOA , приклавши в точці A реакцію \bar{R}_A , яку спрямуємо вздовж стрижня AB , який є ідеальним.

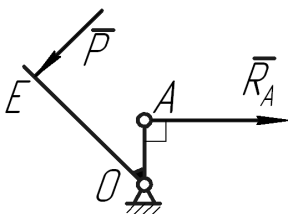


Рис. 1.58

Для визначення \bar{R}_A складаємо суму моментів відносно центра O :

$$\sum M_o = 0; \quad P \cdot OE - R_A \cdot OA = 0;$$

$$R_A = \frac{P \cdot OE}{OA}.$$

Відокремимо другу частину системи, важіль DBC (рис. 1.59).

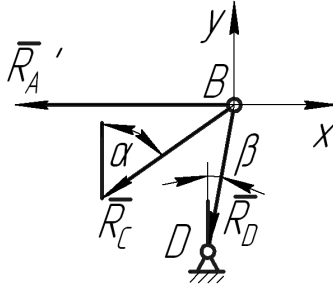


Рис. 1.59

Розглянемо рівновагу точки B під дією плоскої системи збіжних сил.

Складаємо суму проєкцій сил на осі координат x і y .

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -R'_A - R_C \sin \alpha - R_D \sin \beta = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad -R_C \cos \alpha - R_D \cos \beta = 0. \quad (\text{б})$$

З рівняння (б) знайдемо величину R_C :

$$R_C = -\frac{R_D \cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (\text{в})$$

Підставимо значення R_C в рівняння (а) і визначимо величину R_D :

$$R_A - R_D \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + R_D \sin \beta = 0;$$

$$R_A - R_D \left(-\sin \beta + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) = 0 \Rightarrow R_D = \frac{R_A}{\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \sin \beta};$$

Розглянемо рівновагу третьої частини (рис. 1.60).

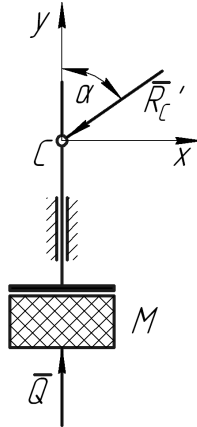


Рис. 1.60

Прикладемо в точці С реакцію \vec{R}'_C , яка рівна за модулем і протилежна \vec{R}_C , $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$.

Складемо суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum P_{ky} = 0; Q - R'_C \cos \alpha = 0; Q = R'_C \cos \alpha.$$

Приклад 1.15

Знайти величину зусилля \vec{Q} , що стискує тіло M у пресі, якщо до кінця B прямокутного важеля OAB , що має нерухому вісь O , прикладена сила P під прямим кутом до важеля AB .

У вказаному положенні вісь O і точка B розміщені на одній горизонталі (рис. 1.61).

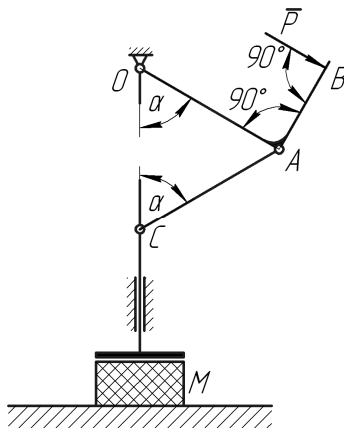


Рис. 1.61

Розв'язання

Відокремимо першу частину механізму – ламаний важіль OAB (рис. 1.62).

У точці A прикладемо реакцію \bar{R}_C , спрямувавши її вздовж стрижня AC , оскільки він ідеальний.

Для визначення величини реакції R_c складемо суму моментів сил відносно центра O .

$$\sum M_O = 0; R_c h - P \cdot AB = 0; R_c = \frac{P \cdot AB}{h}. \quad (a)$$

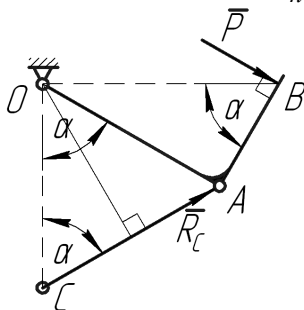


Рис. 1.62

Для визначення величини AB розглянемо $\triangle OAB$. Кут OBA дорівнює α як для взаємно перпендикулярних сторін:

$$AB = OA \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для визначення плеча h розглянемо $\triangle OAC$.

Підставимо величину плеча у рівняння (а) і визначимо модуль реакції R_C .

Розглянемо другу частину механізму (рис. 1.63).

Позначимо реакцію тіла M у відповідь на стискання через Q . До точки C передається зусилля \bar{R}'_C , яке дорівнює за величиною визначеній реакції \bar{R}_C , але має протилежний знак. Проте, це уже враховано протилежним напрямом на схемі, тим паче, що ця реакція була додатною.

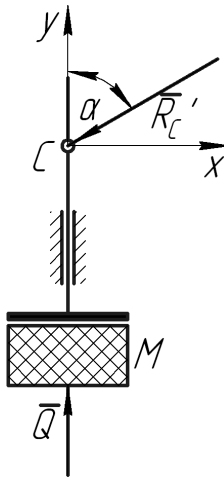


Рис. 1.63

Складемо суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum P_{ky} = 0; \quad Q - R'_C \cos \alpha = 0 \Rightarrow Q = R'_C \cos \alpha.$$

Приклад 1.16

Ящик M вагою P затримується силами тертя за допомогою кліщового затискача (рис. 1.64).

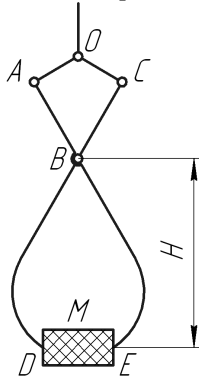


Рис. 1.64

Визначити також, яким має бути коефіцієнт тертя для забезпечення роботи механізму. Вагою деталей затискача знехтувати.

Розв'язання

Визначимо тиск кінців D і E затискача на ящик, а також знайдемо найменший коефіцієнт тертя.

Відокремимо першу частину системи AOC (рис. 1.65).

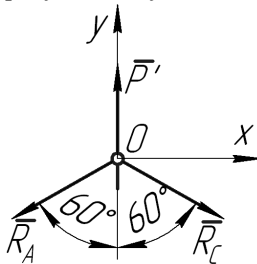


Рис. 1.65

Складемо суму проєкцій на осі координат плоскої системи збіжних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_C \cos 30^\circ - R_A \cos 30^\circ = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad P \cos 60^\circ - R_C \cos 60^\circ - R_A \cos 60^\circ = 0. \quad (\text{б})$$

Із рівнянь (а) і (б):

$$R_A = R_C; \quad P' = P \Rightarrow 2R_A \cos 60^\circ = P \Rightarrow R_A = \frac{P}{2 \cos 60^\circ}.$$

Розглянемо другу частину затискача – важіль ABE , відокремивши його від першої частини (рис. 1.66).

Прикладемо в точці A реакцію $\vec{R}'_A = -\vec{R}_A$, у точці E – горизонтальну силу тиску \vec{Q} з боку ящика. Силу тертя \vec{F}_{mp} прикладемо вертикально. Сила тертя з двох боків зрівноважує силу ваги ящика $P = 2F_{mp}$.

Водночас за законом Кулона про тертя $F_{mp} = Qf$, де Q – сила нормального тиску, f – коефіцієнт тертя ковзання.

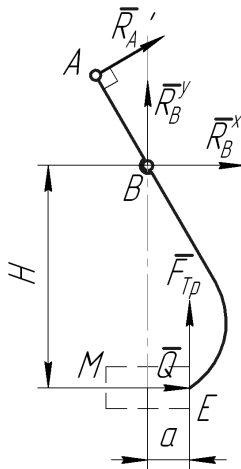


Рис. 1.66

Для визначення Q складемо суму моментів всіх сил відносно центра B .

$$\sum M_B = 0; \quad -R'_A \cdot AB + QH + F_{mp} \cdot a = 0. \quad (в)$$

Враховуючи, що $F_{mp} = \frac{P}{2}$, підставимо це значення в рівняння (в):

$$-R'_A \cdot AB + QH + \frac{P}{2}a = 0; \quad AB = 3a; \quad H = 3a.$$

$$-R'_A \cdot 3a + Q \cdot 3a + \frac{P}{2}a = 0. \Rightarrow Q = \frac{3R'_A - \frac{P}{2}}{3}.$$

Визначимо коефіцієнт тертя:

$$F_{mp} = Qf = \frac{P}{2}, \quad f = \frac{P}{2Q}.$$

Оскільки система симетрична, ліва частина затискача CBD не розглядається.

Приклад 1.17

Ящик M вагою P утримується силами тертя за допомогою кліщового затискача.

Визначити тиск на ящик у точках E і F , а також зусилля в сполучному стрижні CD , якщо відстань між осями CD дорівнює $2a$, ширина ящика $EF = 2c$; інші величини дорівнюють: $CA = DB = h$; $\angle OAC = \angle OBD = \alpha$; $\angle AOB = \beta$.

Висота захоплення ящика над рівнем сполучного стрижня дорівнює b .

Вагою деталей затискача та кривизною дільниць AC і BD знехтувати (рис. 1.67).

Розв'язання

Відокремимо першу частину механізму AOB , розглянувши рівновагу точки O під дією трьох сил, що збігаються до цієї точки.

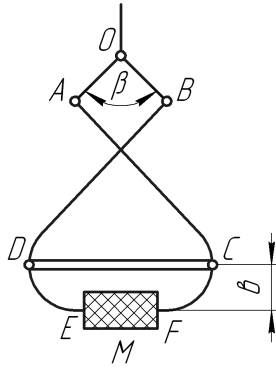


Рис. 1.67

Вертикально в точці O прикладена сила \bar{P}' , яка дорівнює вазі тіла M (рис. 1.68).

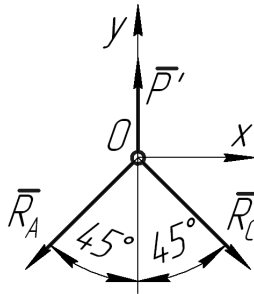


Рис. 1.68

Реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B спрямовані вздовж стрижнів OA і OB , які є ідеальними. Для визначення реакцій складемо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_B \cos 45^\circ - R_A \cos 45^\circ = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad P' - R_B \cos 45^\circ - R_A \cos 45^\circ = 0. \quad (\text{б})$$

З рівнянь (а) і (б):

$$R_B = R_A; 2R_A \cos 45^\circ = P' = P; \Rightarrow R_A = \frac{P}{2 \cos 45^\circ}.$$

Розглянемо другу частину кліщового затискача, який є симетричним, наприклад, ланку ACF (рис. 1.69).

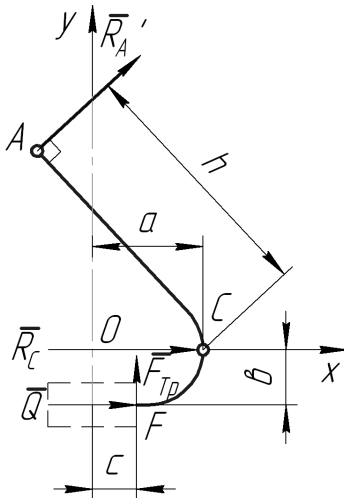


Рис. 1.69

У точці A прикладемо \bar{R}'_A , протилежну \bar{R}_A . У точці C прикладемо реакцію стрижня DC , в точці F – тиск з боку ящика \bar{Q} і силу тертя \bar{F}_{mp} .

Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи довільних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_C + Q + R'_A \cos 45^\circ = 0; \quad (в)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad F_{mp} + R'_A \cos 45^\circ = 0; \quad (г)$$

$$\sum M_C = 0; \quad -R'_A \cdot AC + Qb - F_{mp}(a - c) = 0. \quad (д)$$

З рівнянь (в), (г) (д):

$$F_{mp} = -R'_A \cos 45^\circ; \quad Q = \frac{R'_A \cdot AC + F_{mp}(a - c)}{b}; \quad R_C = -Q - R'_A \cos 45^\circ.$$

Приклад 1.18

На барабан коловорота з колодковим гальмом намотано трос, до кінця якого закріплено вантаж вагою P_n . Визначити найменшу величину сили P , що перпендикулярна рукоятці, яку потрібно прикласти для рівноваги барабана, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Вагою рукоятки знехтувати (рис. 1.70).

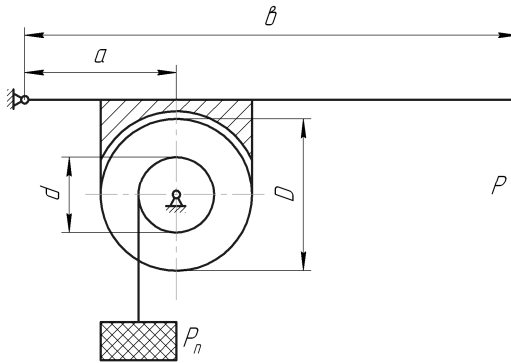


Рис. 1.70

Розв'язання

Розглянемо рівновагу першої частини системи – барабана і гальмівного диска радіуса $R = \frac{D}{2}$ (рис. 1.71).

Прикладемо силу нормального тиску з боку важеля на диск \bar{N} і силу тертя \bar{F}_{mp} , спрямовану проти напрямку можливого повороту диска під дією сили ваги \bar{G} . Виберемо систему координат xOy .

Для визначення сили тертя і сили нормального тиску складемо рівняння рівноваги моментів сил відносно центра O :

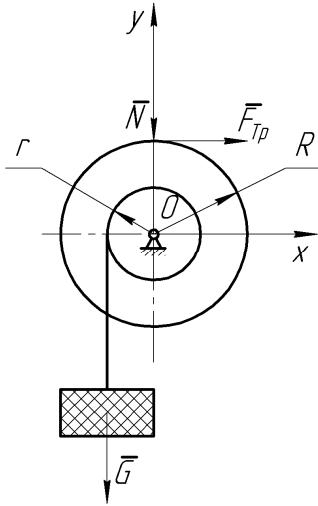


Рис. 1.71

$$\sum M_o = 0; \quad Gr - F_{mp} R = 0 \Rightarrow F_{mp} = \frac{Gr}{R}.$$

За законом Кулона сила тертя $F_{mp} = f N \Rightarrow N = \frac{F_{mp}}{f}$.

Розглянемо другу частину механізму (рис. 1.72).

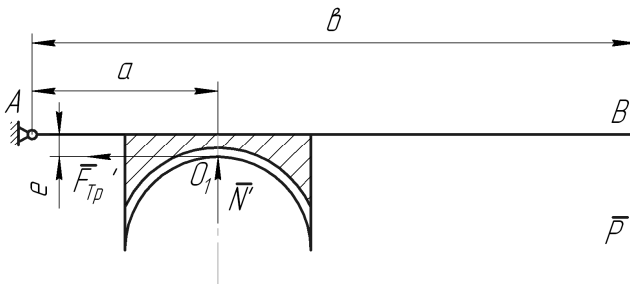


Рис. 1.72

Прикладемо в точці O_1 сили \bar{N}' і \bar{F}'_{mp} , протилежно силам, визначеним для першої частини. Складемо суму моментів сил відносно точки A . Знак мінус для сил \bar{N}' і \bar{F}'_{mp} вже врахований на рисунку.

$$\sum M_A = 0; \quad N'a - Pb - F'_{mp} e = 0 \Rightarrow P = \frac{N'a - F'_{mp} e}{b}.$$

Приклад 1.19

Які сили \bar{F}_1 та \bar{F}_2 , що дорівнюють за величиною, необхідно прикласти до важелів колодкового гальма, щоб утримати в рівновазі вал, до якого прикладений обертальний момент M , якщо коефіцієнт тертя ковзання колодок гальма дорівнює f (рис. 1.73)?

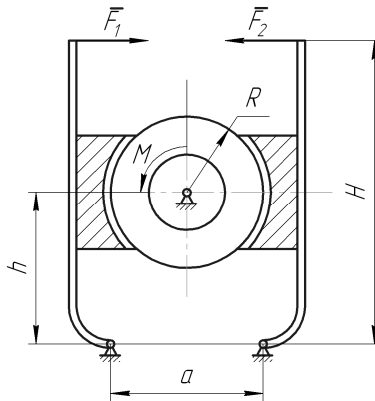


Рис. 1.73

Розв'язання

Оскільки заданий обертальний момент M , то потрібно розглянути спочатку рівновагу гальмівного диска (рис. 1.74).

Відокремимо першу частину механізму, розглянувши рівновагу гальмівного диска радіусом R . Прикладемо в точках C і D сили тиску з боку колодок \bar{N} і сили тертя F_{mp} .

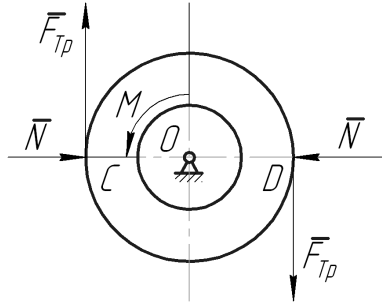


Рис. 1.74

Останні спрямуємо так, щоб пара сил тертя зрівноважувала обертальний момент M .

Запишемо рівняння моментів сил відносно центра O :

$$\Sigma M_O = 0; \quad M - F_{mp} \cdot 2R = 0; \quad F_{mp} = \frac{M}{2R}.$$

За законом Кулона для тертя сила нормального тиску:

$$F_{mp} = f N \Rightarrow N = \frac{F_{mp}}{f}.$$

У зв'язку з симетрією далі можна розглянути будь-який важіль і визначити силу \bar{F}_1 , яка дорівнює \bar{F}_2 (рис. 1.75).

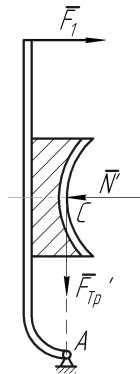


Рис. 1.75

Сила \bar{F}'_{mp} за умовою проходить через точку A , тому її момент відносно цієї точки дорівнює нулю.

$$\sum M_A = 0; \quad N'h - F_1 H = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{N'h}{H}.$$

Приклад 1.20

Колесо діаметром d гальмується двоклодковим гальмом зі зрівняльним механізмом натиснення колодок. Визначити гальмівний момент, якщо на кінці важеля O_1B діє перпендикулярно спрямована до нього сила P (рис. 1.76).

Коефіцієнт тертя колодок і барабана дорівнює f ;
 $O_1O_2 = KD = DC = O_1A = KL = O_2L = d = a$; $O_1B = b$;
 $AC = O_1D = O_2K = c$; $ED = h$.

Вагою деталей гальма і розміром колодок знехтувати.

Дано: $O_1O_2 = KD = O_1A = KL = O_2L = b$;
 $ED = h$; $AC = O_1D = O_2K = c$.

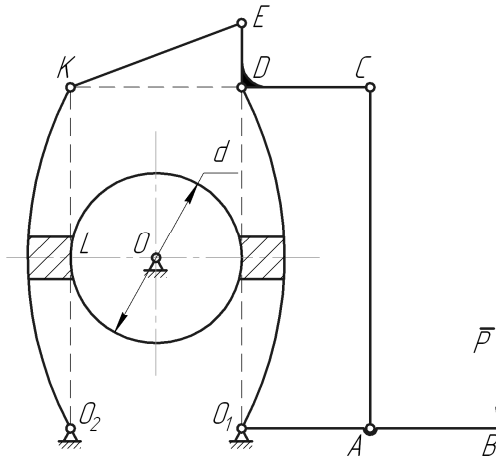


Рис. 1.76

Розв'язання

Відокремимо першу частину і розглянемо її рівновагу (рис. 1.77).

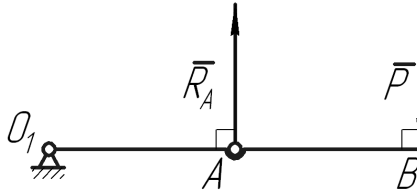


Рис. 1.77

У точці B прикладена задана сила P . У точці A прикладемо реакцію стрижня AC , який є ідеальним, і тому її спрямуємо вздовж осі стрижня. Складемо суму моментів усіх сил відносно центра O_1 і визначимо R_A .

$$\sum M_{O_1} = 0; \quad R_A \cdot O_1A - P \cdot O_1B = 0; \Rightarrow R_A = \frac{P \cdot O_1B}{O_1A}.$$

Розглянемо другу частину – кутовий ламаний стрижень CDE (рис. 1.78). У точці C прикладемо реакцію \bar{R}'_A , визначену з першого розрахунку, але спрямуємо її протилежно \bar{R}_A . У точці E прикладемо реакцію \bar{R}_E , яку спрямуємо вздовж ідеального стрижня EK .

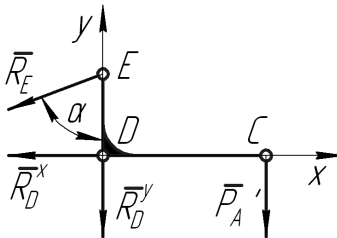


Рис. 1.78

У точці D реакцію з невідомим напрямом розкладемо на дві складові \bar{R}_D^x і \bar{R}_D^y (підшипник). Отримаємо систему довільних сил на площині.

Складемо три рівняння рівноваги, Кут α дорівнює 45° , оскільки катети рівні $KD = ED$.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -R_D^x - R_E \cos 45^\circ = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad -R_A' - R_D^y - R_E \cos 45^\circ = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_E \cdot ED \cdot \sin 45^\circ - R_A' \cdot DC = 0; \quad (\text{в})$$

З рівнянь (а), (б) і (в):

$$R_E = \frac{R_A' \cdot DC}{ED \cdot \sin 45^\circ}; \quad R_D^x = -R_E \cos 45^\circ; \quad R_D^y = -R_A' - R_E \cos 45^\circ.$$

Далі досить розглянути лівий або правий вертикальний важіль, оскільки гальмо має зрівняльний механізм (рис. 1.79).

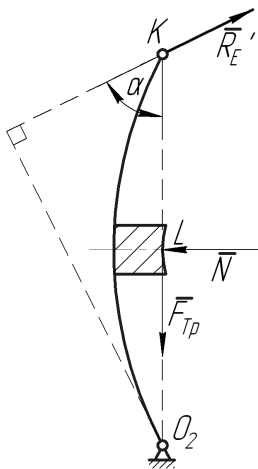


Рис. 1.79

У точці K прикладена реакція \bar{R}_E' , протилежна визначеній силі \bar{R}_E , у точці L – нормальна сила тиску \bar{N} з боку

гальмівного диска.

Складемо суму моментів відносно точки O_2 :

$$\sum M_{O_2} = 0; N \cdot O_2L - R'_E \cdot O_2K \cdot \sin \alpha = 0; \Rightarrow N = \frac{R'_E \cdot O_2K \cdot \sin 45^\circ}{O_2L}.$$

Сила тертя спрямована проти можливого обертання диску, але вона перетинає центр O_2 , тому у рівняння не входить.

Знаючи силу нормального тиску, визначимо за законом Кулона силу тертя: $F_{mp} = f N$.

Оскільки механізм містить дві колодки, то створюється пара сил тертя, яка прикладається до диска, плече пари – діаметр диска.

Момент пари дорівнює добутку однієї з сил пари на плече:

$$M_2 = F_{mp} d.$$

Приклад 1.21

У гальмі з внутрішніми колодками, що притискуються до ободу барабана за допомогою важеля OA , визначити за вказаного напрямку обертання барабана гальмовий момент (рис. 1.80).

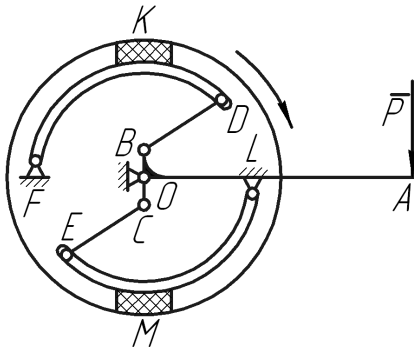


Рис. 1.80

Довжина важеля $OA=a$ (см), стрижні BD і CE паралельні і утворюють з важелем однаковий кут α ; інші розміри дорівнюють: $OK = OF = OL = OM = r$ (см), $OB = OC = b$ (см); коефіцієнт тертя колодок по барабану f . Сила, що діє на важіль перпендикулярно до OA , дорівнює P . Вагою деталей і розмірами колодок знехтувати.

Розв'язання

Визначимо гальмівний момент за вказаного стрілкою напрямку обертання барабана.

Стрижні BD і EC паралельні. Вони є ідеальними, тому що навантажені тільки в шарнірах.

Розглянемо систему тіл. Відокремимо спочатку важіль ABC на шарнірах B і C . Реакції в точках B і C – вздовж стрижнів BD і EC (тяги BD і EC є ідеальними стрижнями), рис. 1.81.

Спроекуємо всі сили на горизонталь OA .

$$R_C \cos \alpha - R_B \cos \alpha = 0; \Rightarrow R_C = R_B.$$

Візьмемо суму моментів всіх сил відносно центра O .

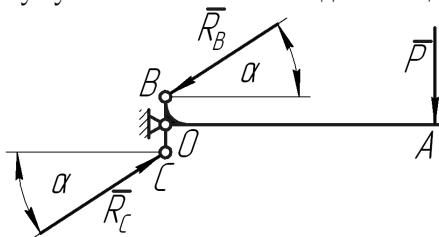


Рис. 1.81

$$\sum M_O = 0; -P \cdot OA + R_B \cos \alpha \cdot OB + R_C \cos \alpha \cdot OC = 0;$$

$$OA = a; OB = OC = b; R_B = R_C;$$

$$2R_B b \cos \alpha = Pa \Rightarrow R_B = R_C = \frac{Pa}{2b \cos \alpha}.$$

Оскільки система симетрична і реакції у точках B і C однакові, то досить розглянути одну із колодок EL або DF , щоб визначити силу тертя, а потім і момент пари тертя.

Розрахунково-силова схема колодки показана на рис. 1.82:

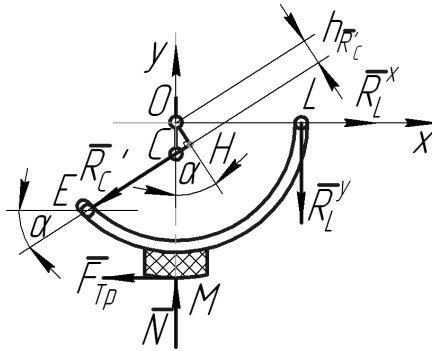


Рис. 1.82

Прикладемо в точці E колодки реакцію $\bar{R}'_C = -\bar{R}_C$; яка визначена із розрахунку першої частини.

У точці L – шарнірно-нерухома опора, тому невідому за напрямом реакцію \bar{R}_L розкладемо на дві складові вздовж осей координат.

У точці M реакція складається із сили нормального тиску з боку барабана на колодку \bar{N} і сили тертя \bar{F}_{mp} , яку спрямуємо вліво – так реагує поверхня барабана на колодку.

Система довільних сил на площині має три умови рівноваги, четверте рівняння дає закон Кулона для тертя ковзання.

$$\sum P_{kx} = 0; R_L^x - R'_C \cos \alpha - F_{mp} = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; N - R_L^y - R'_C \sin \alpha = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_O = 0; -R'_C \cdot h_R - R_L^y \cdot OL - F_{mp} \cdot OM = 0. \quad (\text{в})$$

$$F_{mp} = f \cdot N. \quad (\text{г})$$

Складова реакції \bar{R}_L^x і сила \bar{N} перетинають центр O , тому в рівняння моментів (в) не входять.

Визначимо плече $h_{R'_C}$, яке із ΔOCH дорівнює:

$$h_{R'_C} = OH = OC = b \cos \alpha; OM = r; OL = r.$$

Для розв'язання системи рівнянь і визначення невідомих помножимо рівняння (б) на множник $r=OL$ і додамо рівняння (б) і (в), підставивши замість F_{mp} величину $f \cdot N$.

Тоді невідоме R'_L скоротиться:

$$Nr(1 + f) = R'_C(r \sin \alpha + b \cos \alpha);$$

$$N = \frac{R'_C(r \sin \alpha + b \cos \alpha)}{r(1 + f)}.$$

Сила тертя із рівняння (г) дорівнює:

$$F_{mp} = f N.$$

Із рівнянь (б) і (в):

$$R'_L = N - R'_C \sin \alpha; R'_L = F_{mp} + R'_C \cos \alpha.$$

Для визначення моменту пари сил тертя помножимо одну із сил пари на плече:

$$M_{mp} = F_{mp} \cdot 2r.$$

Приклад 1.22

У гальмі (рис. 1.83). із внутрішніми колодками визначити гальмівний момент, якщо на важіль AOB діє сила \bar{P} .

Коефіцієнт тертя колодок по барабану дорівнює f , сила пружини, що відтискує важелі O_2D і O_2E під час гальмування, дорівнює F , $O_1N = O_1K = OO_2 = a$ (см), плечі дорівнюють h (см). Вагою деталей та розмірами колодок знехтувати.

Розв'язання

Для визначення гальмівного моменту розглянемо спочатку першу частину системи.

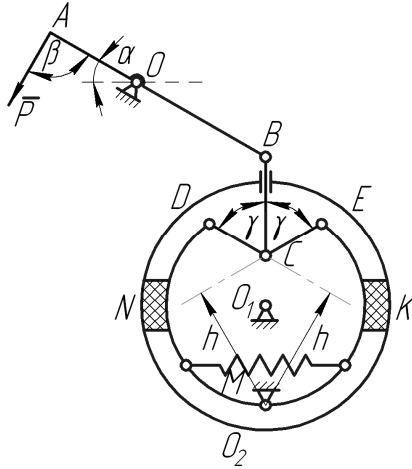


Рис. 1.83

Відокремимо важіль AB і визначимо реакцію \bar{R}_B з напрямом уздовж ідеального стрижня BC , який є вертикальним (рис. 1.84).

Складемо суму моментів сил відносно центра O :

$$\sum M_0 = 0; P \cdot AO - R_B h_{RB} = 0.$$

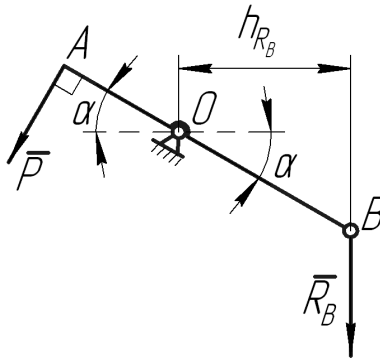


Рис. 1.84

Плече сили \bar{R}_B визначиться $h_{RB} = OB \cos \alpha$.

$$\text{Модуль реакції } R_B = \frac{P \cdot AO}{h_{RB}}.$$

Відокремимо систему тяг $BCDE$ (рис. 1.85), які є ідеальними стрижнями.

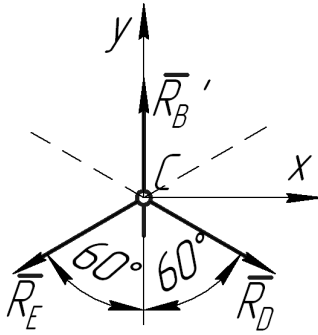


Рис. 1.85

Розглянемо рівновагу стрижня BC , точніше його точку C . Для системи збіжних сил на площині маємо два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; & R_D \cos 30^\circ - R_E \cos 30^\circ &= 0; & R_D &= R_E; \\ \sum P_{ky} &= 0; & R'_B - R_D \cos 60^\circ - R_E \cos 60^\circ &= 0; \\ R'_B &= 2R_D \cos 60^\circ; & R_D &= \frac{R'_B}{2 \cos 60^\circ}. \end{aligned}$$

Розглянемо рівновагу однієї із колодок, наприклад, EKO_2 . Розрахункова схема показана на рис. 1.86.

У точці E прикладаємо $\bar{R}'_E = -\bar{R}_E$, у точці O_2 реакцію розкладаємо на два напрями як для шарнірно-нерухомої опори.

В точці K прикладемо нормальну реакцію \bar{N} з боку барабана і силу тертя \bar{F}_{mp} .

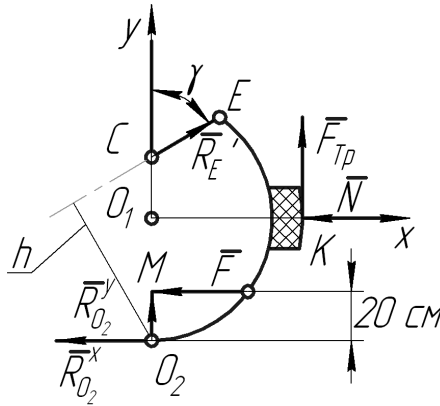


Рис. 1.86

Ця система сил є плоскою системою довільних сил. Відомими є сили \bar{R}'_E і \bar{F} . Потрібно визначити $\bar{R}^y_{O_2}$, \bar{F}_{mp} , \bar{N} . Поряд із трьома умовами рівноваги використовуємо четверте рівняння – закон Кулона для тертя ковзання: $F_{mp} = f N$.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R'_E \sin \alpha - N - F - R^x_{O_2} = 0; \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R'_E \cos \alpha + F + R^y_{O_2} = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; \quad F \cdot O_2M - R'_E h + F_{mp} \cdot O_1K + N \cdot O_1O_2 = 0; \quad (в)$$

$$F_{mp} = f N. \quad (г)$$

Із рівняння (в) визначимо силу нормально тиску N :

$$F \cdot O_2 M - R'_E h + f N \cdot O_1 K + N \cdot O_1 O_2 = 0;$$

$$N(f \cdot O_1 K + O_1 O_2) = R'_E h - F \cdot O_2 M;$$

$$N = \frac{R'_E h - F \cdot O_2 M}{f \cdot O_1 K + O_1 O_2}. F_{mp} = f N.$$

Із рівнянь (а) і (б):

$$R_{O_2}^X = R_E' \sin \alpha - N - F; R_{O_2}^Y = -R_E' \cos \alpha - F.$$

Момент тертя (гальмівний момент) дорівнює моменту пари тертя:

$$M_{mp} = F_{mp} \cdot 2R = F_{mp} \cdot 2 \cdot O_1 K.$$

Приклад 1.22

Визначити нормальну реакцію ґрунту на ободі опорного колеса навісного плуга і реакції шарнірів A, B, C, D (рис. 1.87).

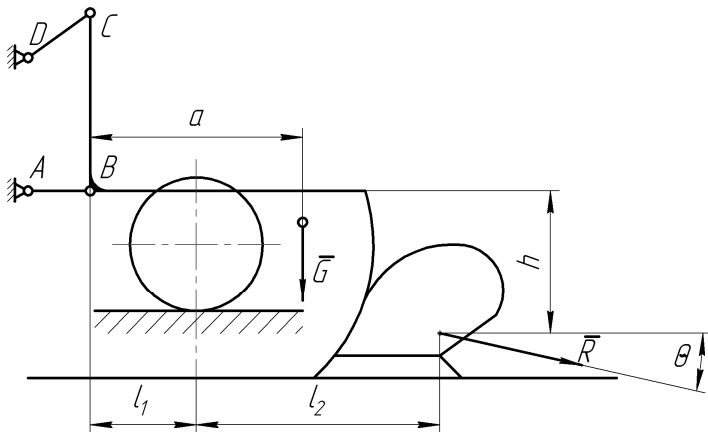


Рис. 1.87

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему механічної системи (рис. 1.88).

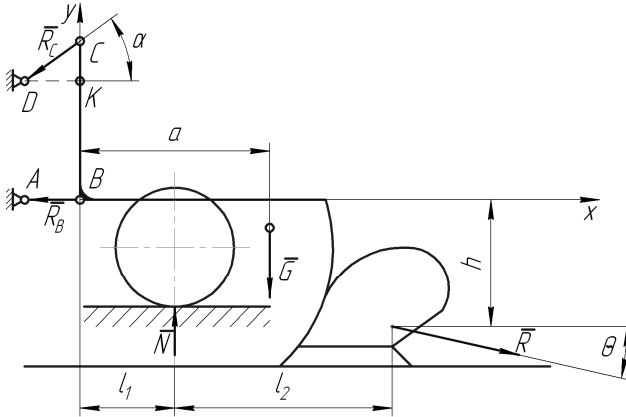


Рис. 1.88

Покажемо на схемі нормальну реакцію ґрунту N , яка перпендикулярна площині опори, реакції \bar{R}_B і \bar{R}_C , спрямовані вздовж стрижнів AB і CD , оскільки вони ідеальні. Отримаємо плоску систему довільних сил. Напишемо три рівняння рівноваги згідно з відомими умовами для цієї системи:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -R_B - R_C \cos \alpha + R \cos \theta = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_C \sin \alpha - G + R \sin \theta = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_C \cdot BC \cdot \cos \alpha - Gh + R \cos \theta \cdot h - R \sin \theta \cdot (l_1 + l_2) + N \cdot l_1 = 0 \quad \cdot (\text{в})$$

Визначимо кут α :

$$\cos \alpha = \frac{DK}{DC} = \frac{AB}{DC}.$$

Для визначення величин невідомих N , R_B і R_C необхідно сумісно розв'язати рівняння (а), (б), (в).

Для цього помножимо рівняння (б) на множник $(BC \cdot \cos \alpha)$ і додамо рівняння (б) і рівняння (в).

Тоді невідоме R_C скоротиться і можна визначити невідоме N :

$$N(BC \cdot \cos \alpha + l_1 \sin \alpha) = G \cdot BC \cdot \cos \alpha + R \sin \theta \cdot BC \cdot \cos \alpha + G \sin \alpha \cdot h - R \cos \theta \cdot h \sin \alpha + R \sin \theta \sin \alpha \cdot (l_1 + l_2).$$

$$N = \frac{G \cdot BC \cdot \cos \alpha + R \sin \theta \cos \alpha + G \sin \alpha \cdot h - R \cos \theta \cdot h \sin \alpha}{BC \cdot \cos \alpha + l_1 \sin \alpha} + \frac{R \sin \theta \sin \alpha \cdot (l_1 + l_2)}{BC \cdot \cos \alpha + l_1 \sin \alpha};$$

Підставляючи значення N в рівняння (б), визначимо:

$$R_C = \frac{N - R \sin \theta - G}{\sin \alpha}.$$

Із рівняння (а) $R_B = R \cos \theta - R_C \cos \alpha$.

Реакція в шарнірі D протилежна R_C :

$$R_D = - R_C.$$

Реакція в шарнірі A протилежна R_B :

$$R_A = - R_B.$$

Приклад 1.23

Визначити максимальну вагу G навісного плуга, що агрегується з колісним трактором, і реакції в шарнірах A , B , C , D навіски (рис. 1.89).

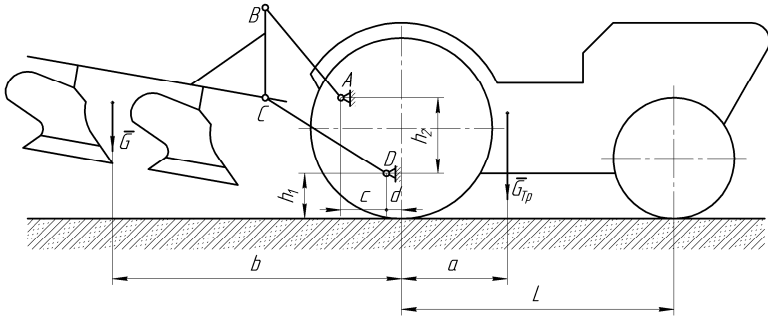


Рис. 1.89

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему механічної системи (рис. 1.90).

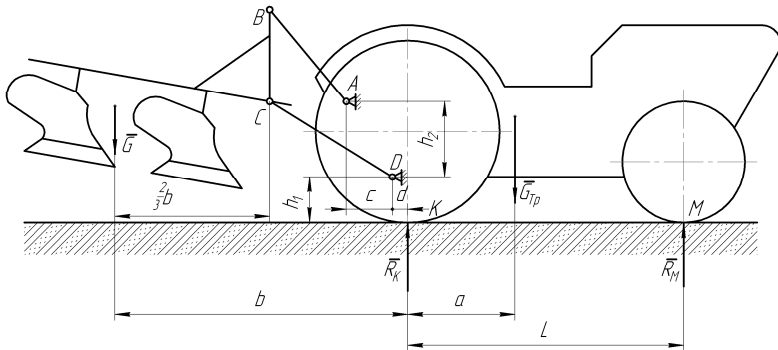


Рис. 1.90

Визначимо максимальну вагу навісного плуга \bar{G} , враховуючи, що в цьому випадку реакція ґрунту на передні колеса повинна дорівнювати нулю. Тому складемо суму

моментів зовнішніх сил навколо точки K контакту заднього колеса з ґрунтом:

$$\sum M_K = 0; Gb - G_{Tp} a = 0; G = \frac{G_{Tp} a}{b}.$$

Визначимо реакцію ґрунту на задні колеса:

$$\sum M_M = 0; G_{Tp}(L - a) - R_K L + G(L + b) = 0;$$

$$R_K = \frac{G_{Tp}(L - a) + G(L + b)}{L}.$$

Для визначення реакцій в шарнірах A, B, C, D необхідно відокремити плуг від трактора і показати на схемі відповідні реакції (рис. 1.91).

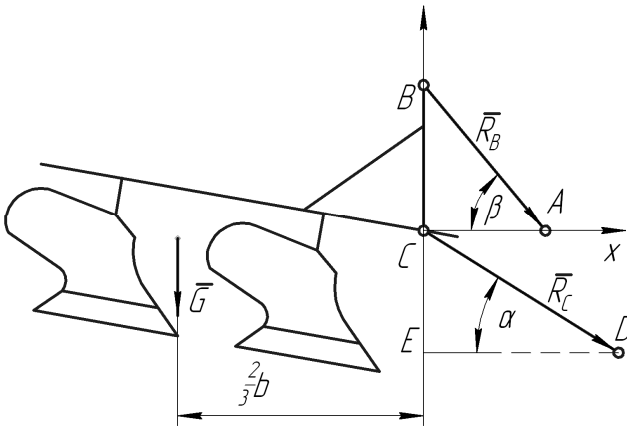


Рис. 1.91

Реакція в шарнірі B спрямовується вздовж ідеального стрижня AB , реакція в шарнірі C – вздовж стрижня CD .

Визначимо кут β :

$$\text{Кут } \alpha \text{ визначимо із } \triangle CDE : \cos \alpha = \frac{ED}{CD} = \frac{(b/3 - d)}{CD}.$$

$$\text{Кут } \alpha \text{ визначимо із } \triangle CDE : \cos \alpha = \frac{ED}{CD} = \frac{(b/3 - d)}{CD}.$$

Для визначення реакцій \bar{R}_B і \bar{R}_C складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; R_C \cos \alpha + R_B \cos \beta = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum M_C = 0; G \cdot \frac{2}{3}b - R_B \cdot BC \cdot \cos(90^\circ - \beta) = 0. \quad (\text{б})$$

Із рівнянь (а) і (б): $R_B = \frac{G \cdot \frac{2}{3}b}{BC \cdot \sin \beta}$; $R_C = -\frac{R_B \cos \beta}{\cos \alpha}$.

Реакція в шарнірі А протилежна: $R_A = -R_B$.

Реакція в шарнірі D: $R_D = -R_C$.

Приклад 1.24

Визначити силу \bar{S} , що діє на шток силового гідроциліндра механізму підняття підкопувача буряку в транспортному положенні, якщо $AD = BC$; $AB = DC$ (рис. 1.92).

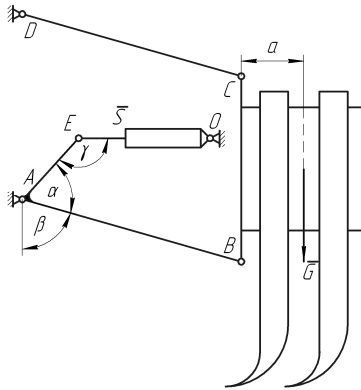


Рис. 1.92

Розв'язання

Визначимо силу \bar{S} , яку необхідно створити гідроциліндру для утримання підкопувача буряку в транспортному положенні.

Складемо розрахунково-силову схему механічної системи (рис. 1.93).

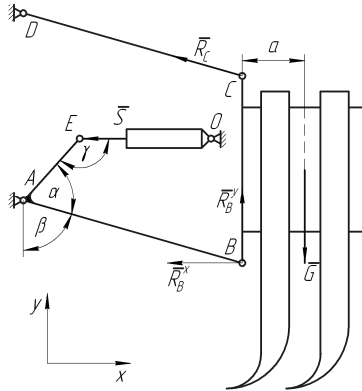


Рис. 1.93

Відокремимо підкопувач буряку вагою G по шарнірах B і C від важелів AB і DC , замінивши їх дію реакцією \bar{R}_C (стрижень CD ідеальний) і двома реакціями в точці B : \bar{R}_B^x і \bar{R}_B^y (ламаний стрижень BAE не є ідеальним). Отримаємо плоску систему довільних сил, для якої складемо рівняння:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -R_B^x - R_C \cos(90 - \beta) = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_B^y - R_C \cos \beta - G = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_C = 0; \quad -Ga - R_B^x \cdot BC = 0; \quad (\text{в})$$

Із рівнянь (а) і (в):

$$R_B^x = -\frac{Ga}{BC}; \quad R_C = \frac{-R_B^x}{\sin \beta}.$$

Із рівняння (б):

$$R_B^y = -R_C \cos \beta + G.$$

Розглянемо рівновагу жорсткого ламаного важеля BAE , приклавши протилежно в точці B визначені сили взаємодії з підкопувачем буряку, як сили дії і протидії (рис. 1.94): $\bar{R}_B^x = -\bar{R}_B^x$; $\bar{R}_B^y = -\bar{R}_B^y$.

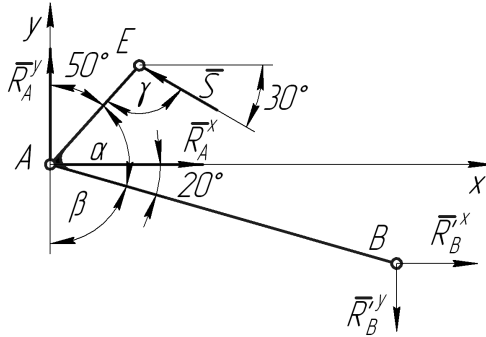


Рис. 1.94

У шарнірі A невідому реакцію розкладаємо на дві складові: \bar{R}_A^x і \bar{R}_A^y , як для нерухомого шарніра. У точці F прикладемо шукану силу \bar{S} гідроциліндра вздовж осі циліндра (ідеальний стрижень). Отримаємо плоску систему довільних сил з трьома невідомими. Заданий кут між силою \bar{S} і віссю x дорівнює 30° .

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -S \cos 30^\circ + R_A^x + R_B^x = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A^y - R_B^y + S \sin 30^\circ = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$S \cdot AE \cdot \sin(180^\circ - \gamma) + R_B^x \cdot AB \cdot \cos \beta - R_B^y \cdot AB \cdot \sin \beta = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівняння (в) визначимо величину S :

$$S = \frac{-R_B^x \cdot AB \cdot \cos \beta + R_B^y \cdot AB \cdot \sin \beta}{AE \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}.$$

Із рівнянь (а) і (б): $R_A^y = R_B^y - S \sin 30^\circ$; $R_A^x = S \cos 30^\circ - R_B^x$

Приклад 1.25

Визначити силу \bar{S} , що діє на шток силового гідроциліндра, і реакції шарнірів A , B , C , D механізму

підняття в транспортне положення штангового культиватора (рис. 1.95).

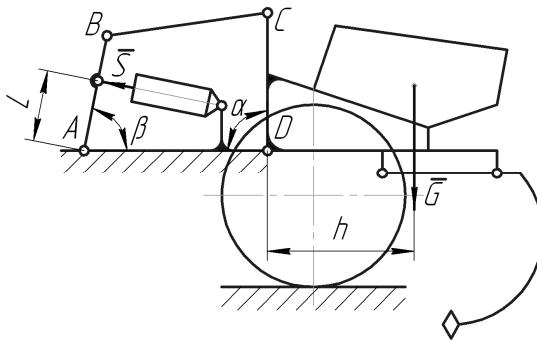


Рис. 1.95

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему механічної системи (рис. 1.96).

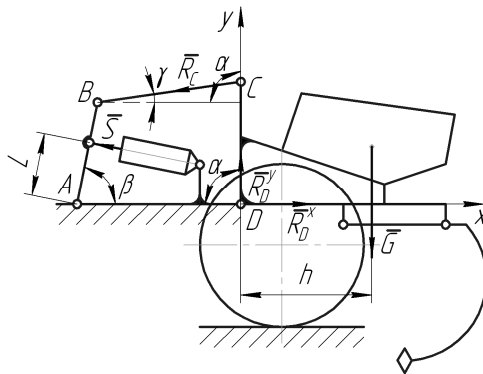


Рис. 1.96

Визначимо силу \bar{S} з боку гідроциліндра для підняття у транспортне положення лап штангового культиватора відносно

колеса і зв'язаної з ним рами AD . Також визначимо реакції шарнірів A, B, C, D .

Відокремимо конструкцію вагою G , що піднімається з поворотом навколо шарніра D , який закріплено на рамі AD за допомогою тяги BC . Реакція в шарнірі C спрямована вздовж тяги BC , яка є ідеальним стрижнем. Реакція в шарнірі D розкладається на дві складові \bar{R}_D^x і \bar{R}_D^y , як для шарнірно-нерухомої опори.

Для розв'язання задачі визначимо кут γ нахилу тяги BC до горизонтальної осі x . Для цього проведемо $BE \parallel AD$. У трикутнику

За теоремою синусів запишемо:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CE}{\sin \gamma}; \Rightarrow \sin \gamma = \frac{CE \cdot \sin \alpha}{BC}.$$

Тепер складемо рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_D^x - R_C \cos 10^\circ = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_D^y + R_C \sin 10^\circ - G = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_D = 0; \quad -Gh - R_C \cdot DC \cdot \sin 70^\circ = 0. \quad (\text{в})$$

Кут при вершині C трикутника BCE дорівнює 110° , тому додатковий кут до 180° , який визначає плече \bar{R}_C відносно точки D , дорівнює 70° .

Із рівнянь (а), (б) і (в) визначимо:

$$R_C = \frac{Gh}{DC \cdot \sin 70^\circ}; \quad R_D^x = R_C \cos 10^\circ; \quad R_D^y = G - R_C \sin 10^\circ.$$

Реакція в точці B дорівнює $R_B = -R'_C$.

Далі відокремимо стрижень AB (рис. 1.97) і розглянемо його рівновагу, як систему довільних сил на площині.

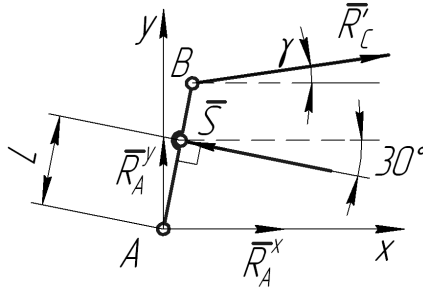


Рис. 1.97

Невідому реакцію в шарнірі A розкладемо на два напрямки вздовж осей координат.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R'_C \cos \gamma + R'_A{}^x - S \cos 30^\circ = 0; \quad (\Gamma)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R'_A{}^y + R'_C \sin \gamma + S \sin 30^\circ = 0; \quad (\Delta)$$

$$\sum M_A = 0; \quad R'_C \cdot AB \cdot \sin 50^\circ + S L = 0. \quad (\epsilon)$$

Із рівнянь (Γ) , (Δ) , (ϵ) :

$$S = \frac{R'_C \cdot AB \cdot \sin 50^\circ}{L}; \quad R'_A{}^x = S \cos 30^\circ - R'_C \cos \gamma;$$

$$R'_A{}^y = -R'_C \sin \gamma - S \sin 30^\circ.$$

Задача розв'язана. Знак «мінус» інформує, що, фактично, напрям реакцій протилежний, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Приклад 1.26

Визначити тиск траверси EF на матеріал, що пресується, нормальну силу тиску траверси на напрямні колони F і реакції опор в точках O, B, D, C, E , якщо на важіль OA діє сила $P (CB \perp OB), P \perp OA$ (рис. 1.98).

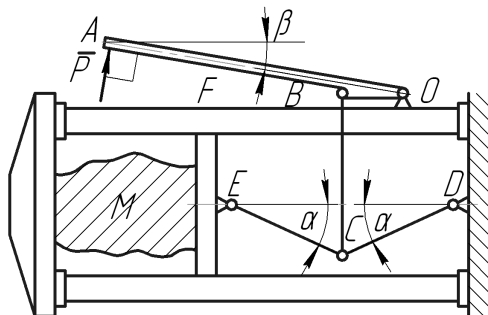


Рис. 1.98

Розв'язання

Визначимо силу \bar{Q} тиску траверси на матеріал, нормальну силу тиску \bar{N} , реакції опор O, B, D, C, E .

Спочатку розділимо конструкцію на декілька частин. Відокремимо систему важеля AO і тяги BC в точках O і C . Складемо розрахунково-силову схему (рис. 1.99).

Реакцію в шарнірі B спрямуємо вздовж тяги BC , яка є ідеальним стержнем. Реакцію в шарнірі O розкладемо на дві складові \bar{R}_O^y і \bar{R}_O^x , як для підшипника.

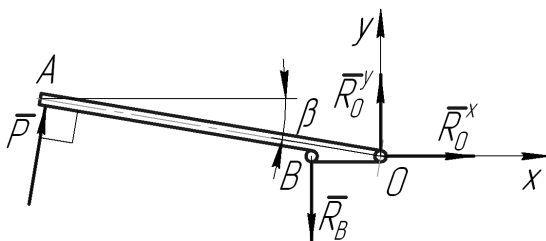


Рис. 1.99

Складемо три рівняння рівноваги для плоскої системи довільних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad P \cos(90^\circ - \beta) + R_O^x = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_O^y + P \cos \beta - R_B = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_O = 0; \quad R_B \cdot OB - P \cdot OA = 0; \quad (\text{в})$$

Із рівнянь (а) і (в):

$$R_O^x = P \cos(90^\circ - \beta) = P \sin \beta; \quad R_B = \frac{P \cdot OA}{OB}.$$

Розглянемо рівновагу точки C під дією системи збіжних сил. Реакції стержнів CD і CE , як ідеальних, спрямуємо вздовж цих стержнів; реакцію тяги BC прикладемо в точці C протилежно: $\bar{R}'_B = \bar{R}_B$ (рис. 1.100).

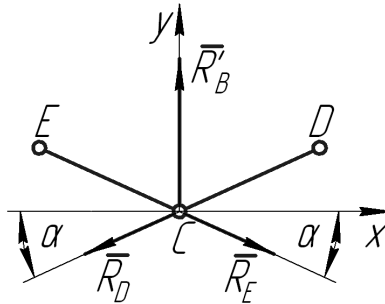


Рис. 1.100

Рівняння рівноваги для системи збіжних мають вигляд:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_E \cos \alpha - R_D \cos \alpha = 0; \quad (\text{г})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R'_B - R_E \sin \alpha - R_D \sin \alpha = 0; \quad (\text{д})$$

Із рівнянь (г) і (д):

$$R_E = R_D; \quad 2R_E \sin \alpha = R'_B; \quad \Rightarrow R_E = \frac{R'_B}{2 \sin \alpha}.$$

Розглянемо рівновагу траверси EF (рис. 1.101).

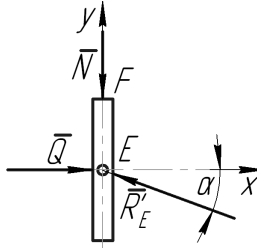


Рис. 1.101

З боку матеріалу, що пресується, діє сила Q , з боку стінки діє нормальна сила тиску N , з боку стрижня CE діє сила \bar{R}'_E , яка дорівнює, але протилежна \bar{R}_E . Складемо рівняння рівноваги системи збіжних сил:

$$\Sigma P_{kx} = 0 \quad Q - R'_E \cos \alpha = 0; \quad (\epsilon)$$

$$\Sigma P_{ky} = 0 \quad R'_E \sin \alpha - N = 0; \quad (\ж)$$

Звідси: $Q = R'_E \cos \alpha$; $N = R'_E \sin \alpha$.

Приклад 1.27

Обчислити гальмівний момент і реакції шарнірів O, O_2, O_3, O_4, O_5 двоколодкового гальма, якщо на важіль CD діє пара сил M .

Коефіцієнт тертя колодок по барабану дорівнює f , $OC = OD = a$, $AB = 2R + 2e$, $O_4O_5 = 2R + 4e$, $O_4B = O_2B = R + 2e$, $\angle ODO_3 = \angle OCO_2 = \alpha$.

Розмірами колодок і вагою деталей гальма знехтувати (рис. 1.102).

Розв'язання

Визначимо гальмівний момент і реакції шарнірів O, O_2, O_3, O_4, O_5 .

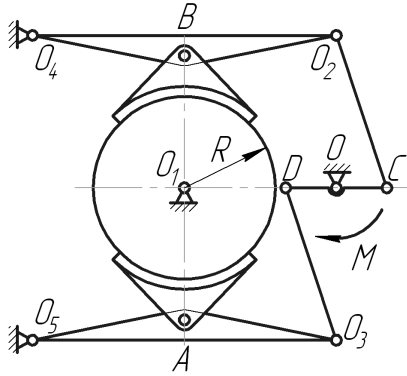


Рис. 1.102

Для цього розділимо механічну систему на частини. Спочатку відокремимо важіль CD , до якого прикладена задана пара сил (рис. 1.103).

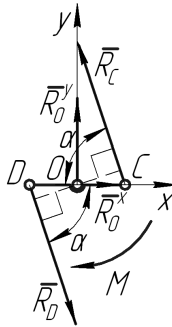


Рис. 1.103

У нерухомому шарнірі O реакція розкладається на дві складові \bar{R}_O^x і \bar{R}_O^y . В шарнірах C і D реакції спрямовані вздовж тяг CO_2 і DO_3 . Отримаємо плоску систему довільних сил. Складемо на підставі відомих умов рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kv} = 0; \quad R_O^x - R_C \cos \alpha + R_D \cos \alpha = 0; \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_O^y - R_C \sin \alpha - R_D \sin \alpha = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_O = 0; \quad -M + R_C a \sin \alpha + R_D a \sin \alpha = 0; \quad (в)$$

Оскільки до важеля CD прикладена пара сил M , то її можна зрівноважити тільки другою парою сил $R_C = R_D$.

Із рівнянь (а) і (б):

$$R_O^x = 0; \quad R_O^y = 0.$$

Із рівняння (в):

$$2R_C a \sin \alpha = M \Rightarrow R_C = R_D = \frac{M}{2a \sin \alpha}.$$

Далі розглянемо один із важелів, наприклад O_2O_4 . У важеля O_3O_5 реакції опор аналогічні (рис. 1.104).

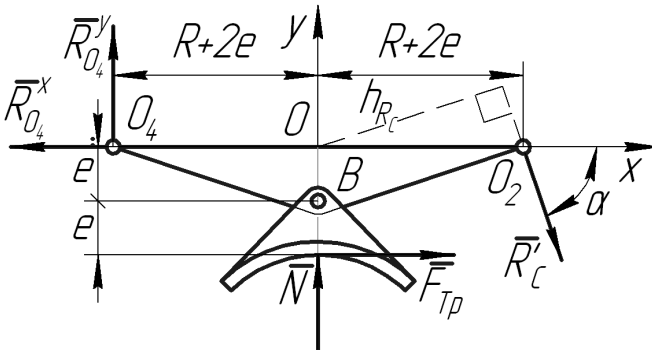


Рис. 1.104

Визначимо реакцію в шарнірі O_4 , силу тертя F_{mp} , яка формує гальмівний момент, і силу нормального тиску \bar{N} . Осі координат проведемо через точку O на лінії O_4O_2 . Реакція в шарнірі C $\bar{R}'_C = \bar{R}_C$, напрям її показаний на рисунку.

Маючи систему довільних сил на площині, складемо рівняння рівноваги на підставі відомих умов рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad F_{mp} - R_{O_4}^x + R'_C \cos \alpha = 0; \quad (г)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad N + R_{O_4}^y - R'_C \sin \alpha = 0; \quad (д)$$

$$\sum M_O = 0; \quad F_{mp} \cdot 2e - R_{O_4}^y (R + 2e) - R'_C (R + 2e) \sin \alpha = 0. \quad (е)$$

Закон Кулона: $F_{mp} = f N. \quad (ж)$

Маємо чотири рівняння і чотири невідомих: F_{mp} , N , $R_{O_4}^x$, $R_{O_4}^y$.

Для їхнього розв'язання підставимо у рівняння (д) вираз (ж) для N :

$$N = \frac{F_{mp}}{f} \text{ і підставимо це у вираз (д).}$$

$$F_{mp} = f \cdot R'_C \sin \alpha - f R_{O_4}^y; \quad (з)$$

$$f(R'_C \sin \alpha - R_{O_4}^y) \cdot 2e - R_{O_4}^y (R + 2e) - R'_C (R + 2e) \sin \alpha = 0;$$

$$R_{O_4}^y = -\frac{R'_C \sin \alpha (R + 2e - 2fe)}{R + 2e + 2fe}.$$

Із рівнянь (г) і (а):

$$R_{O_4}^x = F_{mp} + R'_C \cos \alpha, \quad N = \frac{F_{mp}}{f}.$$

Для визначення гальмівного моменту необхідно обчислити момент пари тертя:

$$M_m = F_{mp} \cdot 2R$$

Приклад 1.27

Визначити обертальний момент M , який необхідно надати кулачкові для подолання опору сили Q , прикладеної до штовхача.

Обчислити бічний тиск у точках A і B за перекошу, що викликається тепловим зазором у поступальній кінематичній парі.

Лінійні розміри $AB = a$, $CB = b$, $OC = \rho$. Кут тиску θ (рис. 1.105).

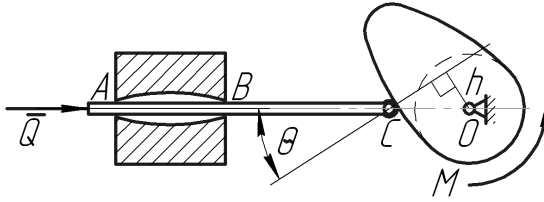


Рис. 1.105

Розв'язання

Визначимо обертальний момент і бічний тиск у точках A і B. Для цього Відокремимо спочатку штовхач AC (рис. 1.106).

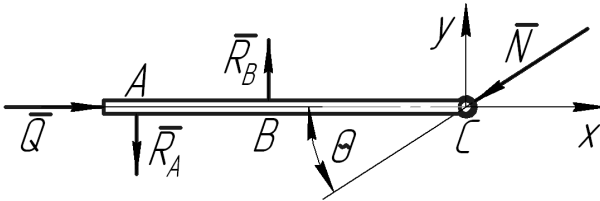


Рис. 1.106

На штовхач діє сила опору \bar{Q} , у точці C з боку кулачка діє по нормалі до нього сила \bar{N} , яку треба визначити.

Ця сила викликає перекіс штовхача в напрямних AB (реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B показані на рис. 1.106).

Складемо три рівняння рівноваги для плоскої системи довільних сил:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad Q - N \cos \theta = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_B - R_A - N \sin \alpha = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_A \cdot AC + R_B \cdot BC = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівнянь (а) і (б):

$$N = \frac{Q}{\cos \theta}; R_A = \frac{R_B \cdot BC}{AC}. \quad (r)$$

Підставимо вираз (r) у рівняння (б):

$$R_B - 0,75R_B - N \sin \theta = 0; \Rightarrow R_B = \frac{N \sin \theta}{0,25}.$$

Розглянемо рівновагу кулачка (рис. 1.107). У точці С прикладемо попередньо визначену силу $N' = N$.

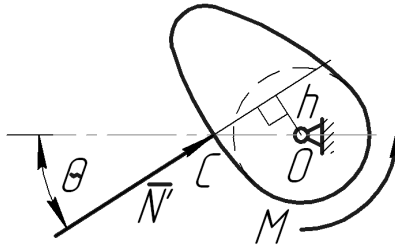


Рис. 1.107

Складаємо рівняння суми моментів всіх сил відносно центра O:

$$\sum M_o = 0; M - N h = 0; \Rightarrow M = N' h = N' \cdot OC \cdot \sin \theta;$$

У рівнянні $\bar{N}' = -\bar{N}$ (сили дії і протидії).

Приклад 1.28

Механізм підняття сошників сівалки (рис. 1.108) складається з п'яти рухомих ланок, що приводяться у рух гідроциліндром.

Важелі OO_3 , BC і плече DO_2 горизонтальні, а тяги AB і CD вертикальні.

Визначити зусилля, що діє на шток гідроциліндра, а також реакції опор O_1, O_2, O_3, O_4 , якщо $AO_3 = OA = a$, $BO_1 = O_1C = b$, $O_2D = O_2E = e$.

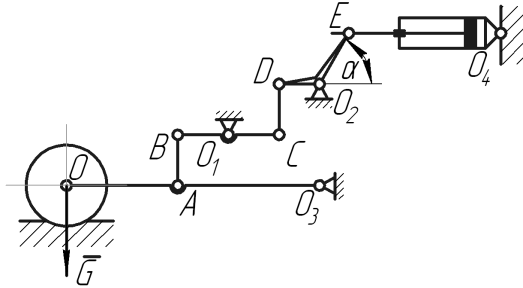


Рис. 1.108

Розв'язання

Визначимо зусилля з боку гідроциліндра і реакції опор O_1, O_2, O_3, O_4 .

Розділимо механічну систему на частини. Розглянемо спочатку рівновагу важеля OO_3 під дією заданої сили \bar{G} і реакцій (рис. 1.109).

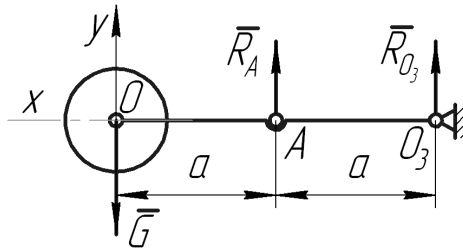


Рис. 1.109

Оскільки тяга AB є ідеальним стрижнем, то реакція \bar{R}_A спрямована вздовж осі цього стрижня. Реакція в опорі O_3 спрямована вертикально, оскільки це система паралельних сил. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A + R_{O_3} - G = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum M_{O_3} = 0; \quad G \cdot 2a - R_A a = 0. \quad (\text{б})$$

Із рівнянь (а) і (б):

$$R_A = 2G; \quad R_{O_3} = G - R_A.$$

Далі розглянемо рівновагу важеля BC (рис. 1.110).

Діє система паралельних сил. Реакція \bar{R}_C вертикальна, тому що стрижень DC є ідеальним і вертикальним.

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_{O_1} - R_B - R_C = 0; \quad (\text{в})$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_B \cdot 2b - R_{O_1} b = 0. \quad (\text{г})$$

Із рівняння (в) і (г):

$$R_{O_1} = 2R_B; \quad R_C = R_{O_1} - R_B.$$

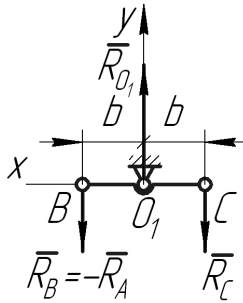


Рис. 1.110

І, нарешті, розглянемо рівновагу важеля DO_2E (рис. 1.111).

Маємо систему довільних сил. Реакція в шарнірі D дорівнює $-\bar{R}_C$. Реакцію в шарнірі O_2 розкладемо на дві складові $\bar{R}_{O_2}^x$ і $\bar{R}_{O_2}^y$. Реакція в шарнірі E спрямована вздовж осі гідроциліндра і дорівнює \bar{R}_E .

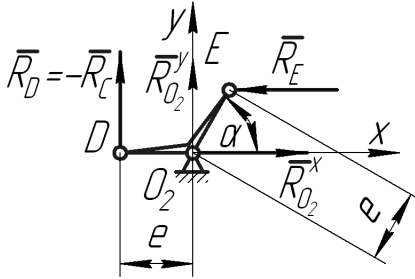


Рис. 1.111

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_{O_2}^x - R_E = 0; \quad (д)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_D + R_{O_2}^y = 0; \quad (е)$$

$$\sum M_{O_2} = 0; \quad -R_D e - R_E e \sin \alpha = 0. \quad (ж)$$

Із рівняння (д), (е) і (ж):

$$R_{O_2}^y = -R_D; \quad R_E = -\frac{R_D}{\sin \alpha}; \quad R_{O_2}^x = R_E.$$

Реакція в шарнірі O_4 дорівнює: $R_{O_4} = -R_E$

Приклад 1.29

Жниварку АЕС комбайна «Дон-1500» (рис. 1.112)

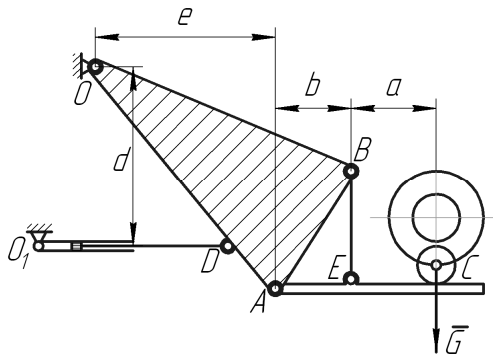


Рис. 1.112

з'єднано шарніром A і тягою BE з похилою камерою OAB , що утримується на корпусі молотарки за допомогою бутеля O і гідроциліндра O_1D . Визначити зусилля, що діють на горизонтальний шток гідроциліндра і вертикальну тягу BE , а також реакції в шарнірах A, D, B, O .

Розв'язання

Визначимо зусилля з боку гідроциліндра і реакції в шарнірах A, D, B, O .

Розглянемо спочатку рівновагу жнивварки AEC , відокремивши її по шарнірах A і E (рис. 1.113).

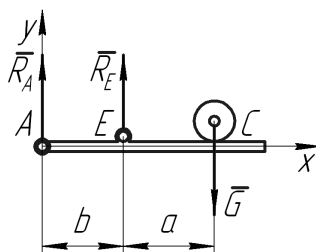


Рис. 1.113

Реакція в шарнірі E спрямована вздовж тяги BE (ідеальний стрижень). Оскільки сили \bar{G} і \bar{R}_E паралельні, то і реакція \bar{R}_A буде вертикальна. Це система паралельних сил. Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A + R_E - G = 0; \quad (a)$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_E b - G(a + b) = 0. \quad (б)$$

Із рівнянь (a) і (б):

$$R_E = \frac{G(a+b)}{b}; \quad R_A = G - R_E.$$

Розглянемо рівновагу похилої камери OAB (рис. 1.114).

Невідому реакцію в шарнірі O розкладемо на дві складових \bar{R}_O^x і \bar{R}_O^y як для шарнірно-нерухомої опори.

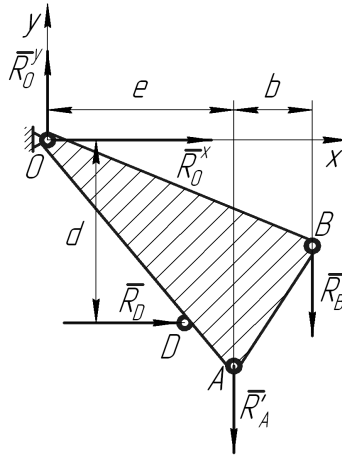


Рис. 1.114

З боку гідроциліндра силу \bar{R}_D спрямуємо вздовж осі циліндра (ідеальний стрижень). Реакція $\bar{R}_B = -\bar{R}_E$, реакція в точці A похилої камери $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A$. Вона визначена із попереднього розрахунку.

Отримаємо систему довільних сил на площині, рівняння рівноваги для якої запишуться так:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R'_O - R_D = 0; \quad (в)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R'_O - R'_A - R_B = 0; \quad (г)$$

$$\sum M_O = 0; \quad R_D d - R'_A e - R_B (b + e) = 0. \quad (д)$$

Із рівнянь (в), (г) і (д):

$$R_D = \frac{R'_A e + R_B (b + e)}{d}, \quad R_O^x = -R_D, \quad R_O^y = R'_A + R_B.$$

$$\text{Модуль повної реакції } R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}.$$

Приклад 1.30

Бульдозер на базі гусеничного трактора зрізує шар ґрунту на глибину h , яку дозволяє номінальне тягове зусилля T за відомого опору на самопересування трактора P , пропорційному вазі $P = fG$, де f – коефіцієнт опору. Опір зрізу ґрунту визначається за залежністю $R = Bh$ (κH). Він спрямований під кутом α до горизонту. Визначити максимальну глибину шару, що зрізується, а також силу, що діє на шток гідроциліндра AB , та реакцію шарніра O лопати бульдозера (рис. 1.115).

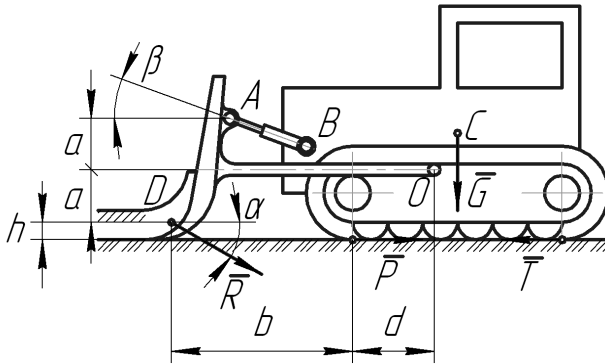


Рис. 1.115

Розв'язання

Визначимо глибину шару, що зрізується, силу на гідроциліндрі і реакцію шарніра O .

Спочатку обчислимо силу \bar{R} реакції ґрунту, яку може подолати трактор за допомогою заданої сили тяги T . Для цього візьмемо суму проєкцій зовнішніх сил на горизонтальну вісь:

$$R \cos \alpha + P - T = 0;$$

де $P = fG$ – сила опору при пересуванні трактора.

Звідки знайдемо:

$$R = \frac{T - P}{\cos \alpha} = \frac{T - fG}{\cos 30^\circ}.$$

Тоді глибина шару ґрунту

$$R = Bh \Rightarrow h = \frac{R}{B}.$$

Видокремимо від трактора лопату бульдозера по шарніру O , замінивши невідому реакцію двома складовими \bar{R}_O^x і \bar{R}_O^y , а також по шарніру A , приклавши реакцію \bar{R}_A вздовж осі гідроциліндра (ідеальний стрижень) (рис. 1.116). До лопати прикладена знайдена реакція \bar{R} від зрізання ґрунту. Розрахункова схема є системою довільних сил на площині.

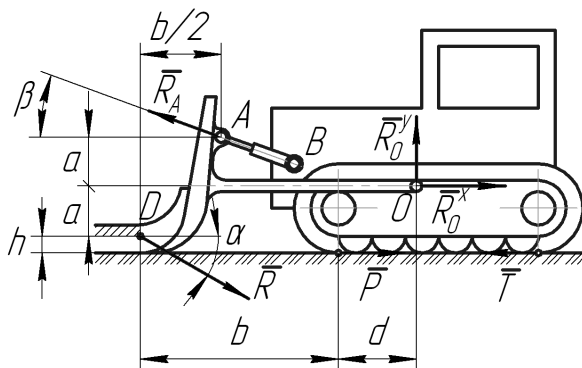


Рис. 1.116

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_{Ox} + R \cos \alpha - R_A \cos \beta = 0; \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_{Oy} - R \sin \alpha - R_A \sin \beta = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_O = 0;$$

$$R a \cos \alpha + R'(b+d) \sin \alpha + R_A a \cos \beta - R_A(b/2+d) \sin \beta = 0. \quad (B)$$

Із рівняння (в):

$$R_A = \frac{R(a \cos \alpha + (b+d) \sin \alpha)}{(b/2 + d) \sin \alpha - a \cos \beta}.$$

Із рівняння (а):

$$R_{Ox} = R_A \cos \beta - R \cos \alpha.$$

Із рівняння (б):

$$R_{Oy} = R \sin \alpha - R_A \sin \beta.$$

Модуль повної реакції

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}$$

Приклад 1.31

Під час зняття напруги з клем 1 електромагніту шток 2 випадає з котушки 3 і звільняє важкий важіль 4, який повертається навколо шарніра A і силою своєї ваги натягує гальмовий пас 5 (рис. 1.117).

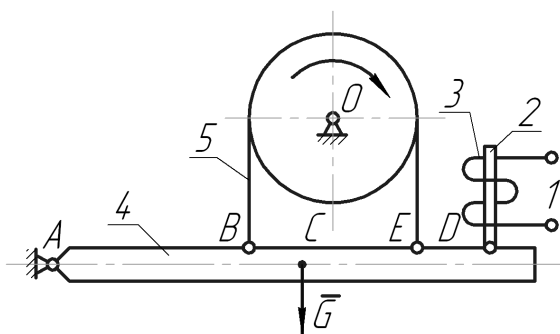


Рис. 1.117

Визначити реакцію шарніра A і гальмівний момент на шківі під час обертання за рухом годинникової стрілки. Шків завжди обертається у бік набіжного кінця гальмового паса. Натяг набіжного кінця у два рази більший за натяг збіжного

кінця. Визначити також силу, з якою котушка може утримувати шток у випадку розгальмованого шківa. Вагою штока знехтувати.

Розв'язання

Визначимо реакцію в шарнірі A і гальмівний момент, а також силу, з якою котушка утримує шток за розгальмованого шківa.

Розглянемо спочатку режим гальмування, якщо струм відсутній і важіль 4 своєю вагою натягує гальмівні паси (рис. 1.118).

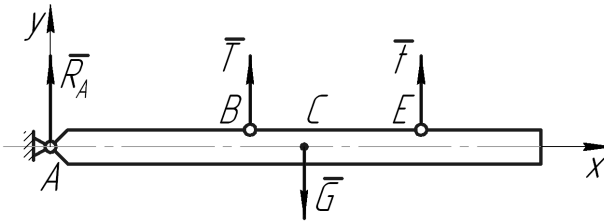


Рис. 1.118

Оскільки всі сили вертикальні, то і реакція \bar{R}_A буде теж вертикальною. Шків обертається за годинниковою стрілкою, тому в точці B пас набіжний, а в точці E – збіжний, тому $T=2t$. Маємо систему паралельних сил на площині, для якої складемо відомі рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A + T + t - G = 0; \quad (a)$$

$$\sum M_A = 0; \quad T \cdot AB - G \cdot AC + t \cdot AE = 0; \quad (б)$$

Із рівняння (б):

$$2t \cdot AB - G \cdot AC + t \cdot AE = 0;$$

$$t = \frac{G \cdot AC}{2 \cdot AB + AE}.$$

Із рівняння (а):

$$R_A = G - T - t.$$

Визначимо далі гальмівний момент, розглянувши рівновагу шків (рис. 1.119).

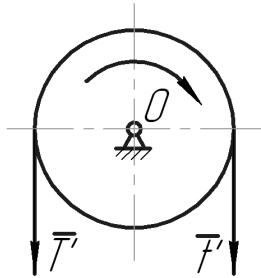


Рис. 1.119

Реакції гальмівних пасів, прикладені до шків, протилежні:
 $\bar{T} = -\bar{T}'$; $\bar{t} = -\bar{t}'$.

Алгебраїчна сума моментів реакцій \bar{T}' і \bar{t}' формує гальмівний момент:

$$M_{mp} = T'R - t'R = R(T' - t').$$

$$R = AE - AB = 59 - 43 = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м};$$

Визначимо силу електромагніту \bar{F} , яку повинна створити котушка, щоб гальмування не було (рис. 1.120).

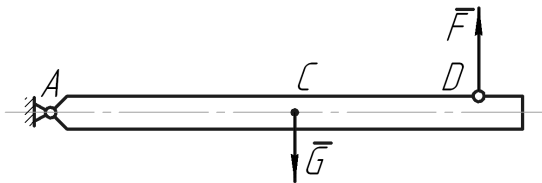


Рис. 1.120

Для визначення сили \bar{F} складемо суму моментів сил відносно точки A .

$$\sum M_A = 0; F \cdot AD - G \cdot AC = 0;$$

$$F = \frac{G \cdot AC}{AD}.$$

Приклад 1.32

Визначити навантаження на передню A і задню B осі автокрана (рис. 1.121).

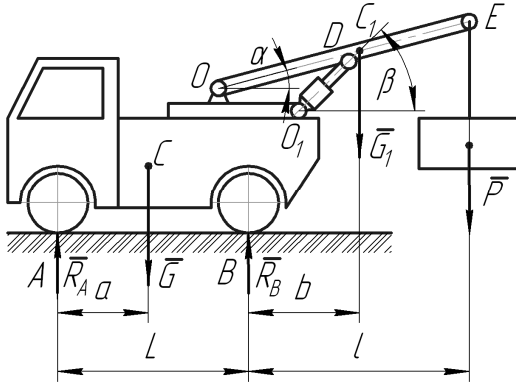


Рис. 1.121

Обчислити також реакцію штока гідроциліндра O_1D під час підняття вантажу і реакції в шарнірах O і O_1 , якщо вага вантажу дорівнює P , вага і довжина стріли відповідно G_1 і l_1 , вага шасі крана G , довжина $C_1D = l_2$.

Розв'язання

Визначимо тиск на передню та задню осі крана під час роботи, зусилля на шток гідроциліндра, реакції в шарнірах O і O_1 .

Спочатку розглянемо рівновагу автокрана під дією паралельних сил ваги крана \bar{G} , стріли \bar{G}_1 і корисного вантажу \bar{P} , склавши суми моментів відносно точок Q і B , до яких

прикладено реакції ґрунту \bar{R}_A і \bar{R}_B , що дорівнюють за модулем тиску на осі крана.

$$\sum M_A = 0; -Ga + R_B L - G_1(L+b) - P(L+l) = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum M_B = 0; G(L-a) - R_A L - G_1 b - Pl = 0; \quad (\text{б})$$

Із рівнянь (а) і (б):

$$R_B = \frac{Ga + G_1(L+b) - P(L+l)}{L}; \quad R_A = \frac{G(L-a) - G_1 b - Pl}{L}.$$

Далі розглянемо рівновагу стріли OE , роз'єднавши її з шасі автокрана по шарніру D , яким вона з'єднується з гідроциліндром (рис. 1.122) і шарніром O .

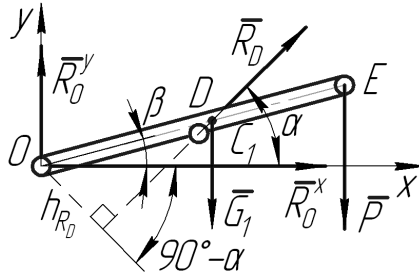


Рис. 1.122

Реакція в шарнірі O , як невідома за напрямом, розкладається на два напрями вздовж осей координат, реакція в шарнірі D спрямована вздовж осі гідроциліндра (ідеальний стрижень). Плоска система довільних сил потребує три рівняння рівноваги.

$$\sum P_{kx} = 0; R_{Ox} + R_D \cos \alpha = 0; \quad (\text{в})$$

$$\sum P_{ky} = 0; R_{Oy} - R \cdot \sin \alpha - G_1 - P = 0; \quad (\text{г})$$

$$\sum M_O = 0;$$

$$-G_1 \cdot OC_1 \cdot \cos \beta - P \cdot OE \cdot \cos \beta + R_D \cdot OD \cdot \cos (90^\circ - \alpha + \beta) = 0; \quad (\text{д})$$

Із рівняння (д):

$$R_D = \frac{G_1 \cdot OC_1 \cdot \cos \beta + P \cdot OE \cdot \cos \beta}{OD \cdot \cos (90^\circ - \alpha + \beta)};$$

$$OC_1 = l_1 / 2; OD = l_1 / 2 - l_2.$$

Із рівнянь (в) і (г):

$$R_{Ox} = -R_D \cos \alpha, \quad R_{Oy} = -R_D \sin \alpha + G_1 + P.$$

Модуль повної реакції

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}.$$

Приклад 1.33

Визначити силу P , що діє на жорсткий ламаний важіль ABC і реакції в шарнірах B, C, D, E пристрою для виключення муфти зчеплення трактора (рис. 1.123) у момент її повного відключення, якщо на важіль EM діє реакція пружин муфти Q . Силами ваги тіл і тертям знехтувати. Кути $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$; $P \perp AB$, $Q \perp EM$.

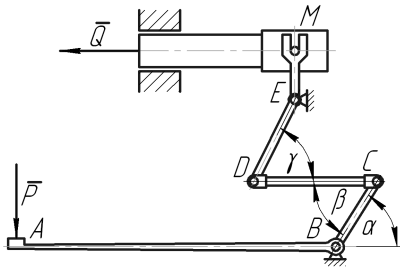


Рис. 1.123

Розв'язання

Визначимо силу P , що діє на важіль AB , реакції в шарнірах B, C, D, E .

Відокремимо першу частину системи, до якої прикладено задану силу Q (рис. 1.124).

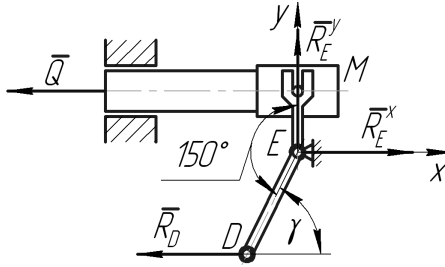


Рис. 1.124

Розкладемо невідому реакцію в шарнірі E на дві складові вздовж осей координат.

У шарнірі D реакцію \bar{R}_D спрямуємо горизонтально вздовж тяги DC (ідеальний стрижень).

Отримаємо систему довільних сил на площині, для якої існує три рівняння рівноваги.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_{Ex} - R_D - Q = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_{Ey} = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_E = 0; \quad Q \cdot EM - R_D \cdot ED \cdot \sin \gamma = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівняння (а), (б) і (в):

$$R_D = \frac{Q \cdot EM}{ED \cdot \sin \gamma}; \quad R_{Ex} = R_D + Q; \quad R_{Ey} = 0.$$

Розглянемо другу частину муфти зчеплення ABC , з якої визначаємо шукану силу P (рис. 1.125).

У точці C прикладемо $\bar{R}_C = -\bar{R}_D$ як сили дії і протидії. Невідому реакцію в шарнірі B розкладемо на дві складові, як для підшипника.

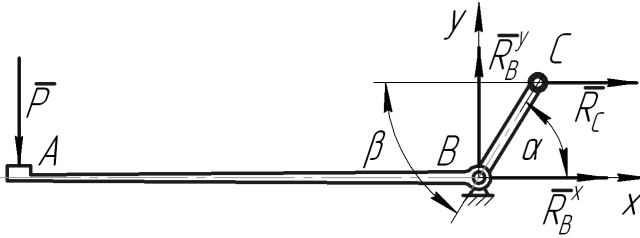


Рис. 1.125

Маємо систему довільних сил на площині, для якої запишемо три рівняння рівноваги.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_{Bx} - R_C = 0; \quad (\Gamma)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_{By} - P = 0; \quad (\Delta)$$

$$\sum M_O = 0; \quad P \cdot AB - R_C \cdot BC \cdot \sin \alpha = 0. \quad (\epsilon)$$

Із рівняння (Г), (Д), (Е):

$$P = \frac{R_C \cdot BC \cdot \sin \alpha}{AB}; \quad R_{Bx} = R_C; \quad R_{By} = P.$$

$$\text{Модуль повної реакції } R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2}$$

Приклад 1.34

Визначити крутний момент M , який необхідно прикласти до шестерні колінчастого вала радіусом r , щоб, нехтуючи тертям, передати його через шестерню розподільного вала радіусом R , кулачок з радіусом ρ в точці контакту K , штовхач зі штангою та коромисло AB і надати рух клапану.

Питомий тиск газів в середині циліндра дорівнює p , діаметр клапана d (рис. 1.126).

Обчислити також реакцію в шарнірі O . Врахувати силу пружності пружини, якщо коефіцієнт жорсткості пружини c , деформація пружини дорівнює Δl .

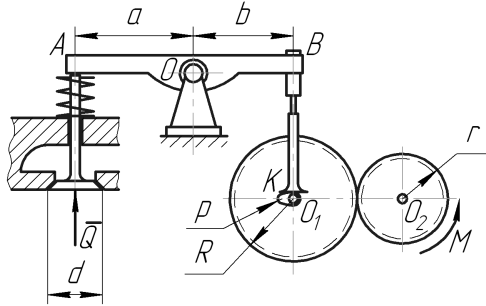


Рис. 1.126

Розв'язання

Визначимо шуканий момент M на малій шестерні, реакцію в шарнірі O . Обчислимо спочатку загальну силу Q , що припадає на клапан діаметром $d = 5,0$ см від тиску газів у циліндрі, помноживши площу клапана на питомий тиск.

$$Q = \pi d^2 p / 4.$$

Сила тиску пружини $F_{np} = c \cdot \Delta l$.

Далі розглянемо рівновагу важеля AB (рис. 1.127).

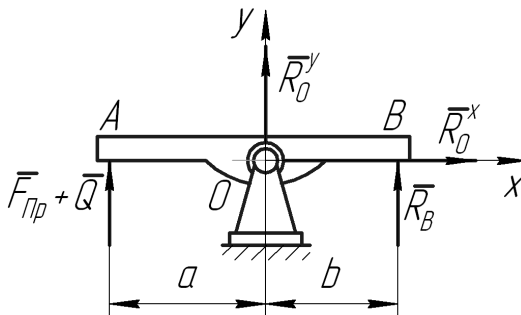


Рис. 1.127

У точці A силу Q приєднуємо до сили пружності \bar{F}_{np} . У точці B прикладаємо реакцію \bar{R}_B вздовж штовхача.

У шарнірі O реакцію \bar{R}_O розкладаємо на два напрями вздовж осей координат, оскільки її напрям невідомий.

Маємо систему паралельних сил у площині:

$$\sum P_{ky} = 0; \quad F_{np} + Q + R_B + R_{Oy} = 0; \quad (\text{a})$$

$$\sum M_O = 0; \quad -(F_{np} - Q)a + R_B b = 0. \quad (\text{б})$$

Із рівнянь (а) (б):

$$R_B = \frac{(F_{np} - Q)a}{b};$$

$$R_{Oy} = -F_{np} - Q - R_B.$$

Для визначення моменту, який створює сила \bar{R}_B на кулачку в точці торкання K , запишемо:

$$M_R = R_B \cdot \rho.$$

Визначений момент – це момент на шестерні радіусом R . Для обчислення шуканого моменту на шестерні радіусом r запишемо вираз через передаточне відношення:

$$\frac{M}{M_R} = \frac{r}{R}; \Rightarrow M = \frac{M_R r}{R}.$$

Приклад 1.35

Визначити зусилля, що діє на шток гідроциліндра AD , і реакцію шарніра B кузова самоскида, якщо вага вантажу G_I .

Обчислити реакцію ґрунту на колеса навантаженого автомобіля власною вагою G (рис. 1.128).

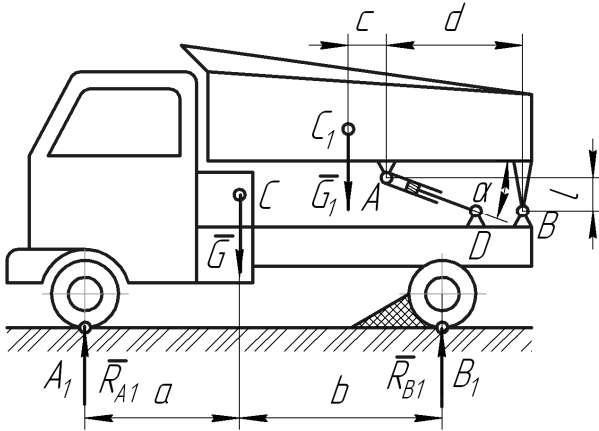


Рис. 1.128

Розв'язання

Визначимо реакції ґрунту на передні і задні колеса (осі) навантаженого автомобіля (точки A_1, B_1), тобто, реакції \bar{R}_{A_1} і \bar{R}_{B_1} , обчислимо зусилля на шток гідроциліндра і реакцію в шарнірі B , відносно якого кузов повертається під час розвантаження.

Сила ваги автомобіля \bar{G} , прикладена в центрі ваги C , включає вагу вантажу, тому вага вантажу \bar{G}_1 окремо в цій операції не враховується.

Для визначення \bar{R}_{A_1} і \bar{R}_{B_1} складемо суму моментів усіх сил відносно центрів A_1 і B_1 :

$$\begin{aligned} \sum M_{A_1} &= 0; & R_{B_1}(a+b) - Ga &= 0; \\ \sum M_{B_1} &= 0; & Gb - R_{A_1}(a+b) &= 0. \end{aligned}$$

Із рівнянь отримаємо:

$$R_{B_1} = \frac{Ga}{a+b}; R_{A_1} = \frac{Gb}{a+b}.$$

Для визначення реакції штока \bar{R}_A і реакції шарніра B розглянемо рівновагу кузова вагою \bar{G}_1 , відокремивши його по шарнірах A і B (рис. 1.129).

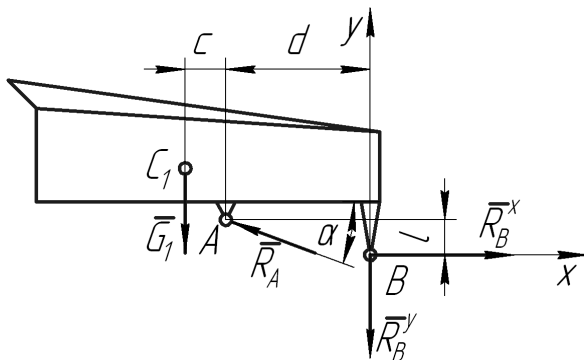


Рис. 1.129

Реакцію в шарнірі B розкладемо по осях координат \bar{R}_B^x і \bar{R}_B^y , як невідому за напрямом, а реакцію в шарнірі A спрямуємо вздовж осі AD гідроциліндра як ідеального стрижня.

Маємо плоску систему довільних сил, запишемо три рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; R_B^x - R_A \cos \alpha = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum P_{ky} = 0; R_A \sin \alpha - G_1 - R_B^y = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_B = 0; G_1(c+d) + R_A \cos \alpha \cdot l - R_A \sin \alpha \cdot d = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівнянь (а), (б), (в):

$$R_A = \frac{G_1(c+d)}{d \sin \alpha - l \cos \alpha}; R_B^x = R_{AC} \cos \alpha; R_B^y = R_{AC} \sin \alpha - G_1.$$

Модуль повної реакції :

$$R_B = \sqrt{R_B^{x^2} + R_B^{y^2}}.$$

Приклад 1.36

Визначити величину реакції на осі кочення O каретки гусеничного трактора (рис. 1.130).

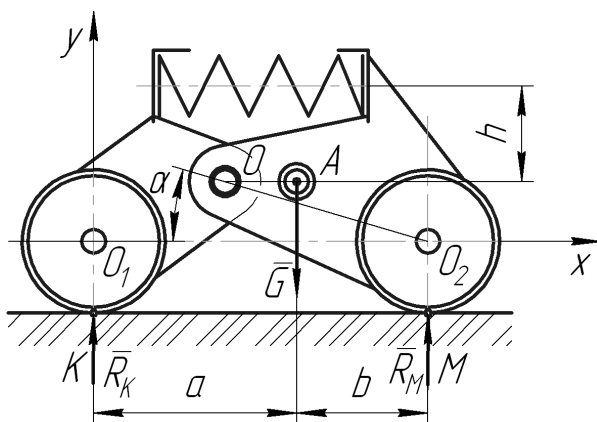


Рис. 1.130

Обчислити також зусилля пружини і тиск на гусеницю в точках K і M , якщо навантаження від ваги трактора на цапфу рами в точці A дорівнює G .

Розв'язання

Визначимо реакцію на осі кочення \bar{R}_O , силу пружності пружини \bar{F}_{np} , тиск на гусеницю в точках K і M (\bar{R}_K і \bar{R}_M).

Покажемо на схемі реакції \bar{R}_K і \bar{R}_M вертикально в точках K і M . Розглянемо рівновагу всієї каретки під дією навантаження \bar{G} і визначимо вказані реакції.

Ця система є системою трьох паралельних сил, для якої запишемо два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum M_K &= 0; R_M(a+b) - Ga = 0; \\ \sum M_M &= 0; Gb - R_K(a+b) = 0.\end{aligned}$$

Із рівнянь визначимо:

$$R_M = \frac{G \cdot a}{a+b}; R_K = \frac{G \cdot b}{a+b}.$$

Далі розглянемо рівновагу правого великого балансира (рис. 1.131).

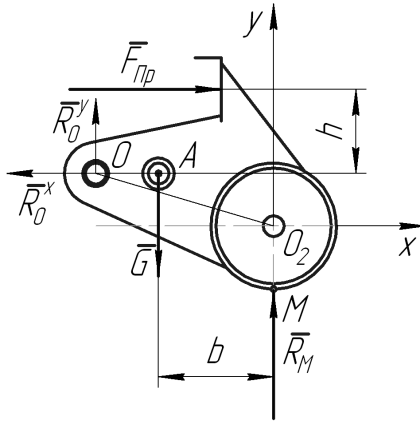


Рис. 1.131

Балансир перебуває під дією ваги \bar{G} , реакції \bar{R}_M і сили пружності пружини \bar{F}_{np} , а також сил взаємодії у шарнірі O , за яким розділили систему. Останню реакцію розкладемо по осях координат \bar{R}_O^x і \bar{R}_O^y , оскільки напрям її невідомий.

Маємо плоску систему довільних сил, для якої запишемо три рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad F_{np} - R_O^x = 0; \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_O^y - G + R_M = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_O = 0; \quad R_M(OA+b) - G \cdot OA - F_{np}h = 0. \quad (в)$$

Із рівняння (в):

$$F_{\text{пр}} = \frac{R_M(OA + b) - G \cdot OA}{h}.$$

Із рівнянь (а) і (б): $R_O^x = F_{\text{пр}}$; $R_O^y = G - R_M$.

Модуль повної реакції: $R_O = \sqrt{R_O^{x2} + R_O^{y2}}$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як замінити рівномірно розподілене за будь-яким законом навантаження зосередженою силою?
2. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
3. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
4. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл?
5. Як спрямувати внутрішні сили взаємодії між тілами системи?
6. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої і просторової систем паралельних сил?
7. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
8. Які додаткові форми умов рівноваги паралельних сил ви знаєте?
9. Як визначити реакцію у внутрішньому шарнірі системи тіл?
10. Яка основна форма умов рівноваги плоскої системи паралельних сил?

1.6. Розрахунок плоских ферм

1.6.1. Характеристика ферм і порядок розрахунку

Фермою називається геометрично незмінна жорстка конструкція, яка складається із прямолінійних стрижнів, сполучених між собою шарнірами.

Місце, де стрижні з'єднуються один з одним, носить назву *вузла ферми*. Зовнішнє навантаження прикладається до ферми тільки в її вузлах.

Допускається, що ферма складається із ідеальних стрижнів: тонких, однорідних, невагомих, на кінцях яких є шарніри, внаслідок чого ці стрижні працюють тільки на розтяг або на стиск.

У підручнику розглядаються *плоскі ферми*, в яких осі всіх *стрижнів* і вектори зовнішніх *сил*, що навантажують вузли ферми, розміщуються *в одній площині*.

Слід зазначити, що конструктивно ферма складається із стрижнів, які утворюють жорсткі трикутники, а це означає, що в конструкції ферми немає зайвих стрижнів. Такі ферми будуть статично визначеними, якщо кількість стрижнів n і кількість вузлів m відповідають співвідношенню:

$$n = 2m - 3. \quad (1.63)$$

Розрахунок ферми зводиться до визначення реакцій зовнішніх опор і внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою як дія і протидія: вони рівні за модулем і протилежні за напрямом. Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.132).

Як можна побачити зі схеми – це плоска конструкція, що складається із 7 стрижнів, що з'єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має зовнішні опори (у I вузлі – шарнірно-нерухома опора; у V – шарнірно-рухома опора), до II і до IV вузлів ферми прикладені зовнішні навантаження у вигляді зосереджених сил

\bar{P}_1 та \bar{P}_2 ($P_1 = 30 \text{ kH}$; $P_2 = 10 \text{ kH}$).

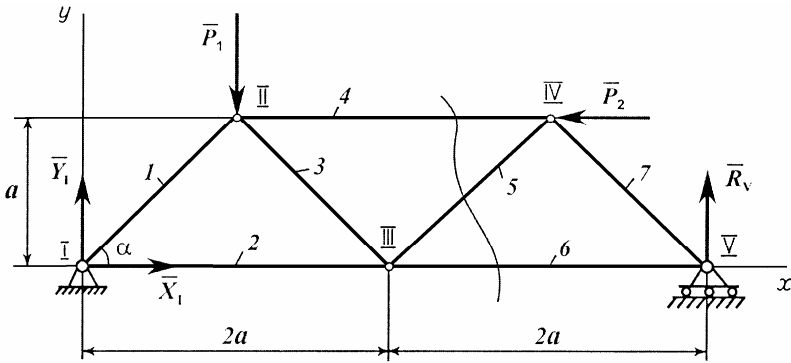


Рис. 1.132

Лінійні розміри ферми і система координат Ixy показані на схемі ферми ($\alpha = 45^\circ$).

Перший етап розрахунку ферми – це визначення її опорних реакцій. Для знаходження опорних реакцій ферму розглядають загалом як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами.

Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції \bar{X}_1, \bar{Y}_1 ; у вузлі V – \bar{R}_v), отримуємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови рівноваги (1.56) і скласти систему рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_1 - P_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_1 - P_1 + R_v = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_l(\bar{P}_k) = 0; \quad R_v \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

З першого рівняння системи обчислюємо невідому

реакцію $X_I = P_2 = 10 \text{ kH}$. З останнього рівняння обчислюємо реакцію шарнірно-рухомої опори:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5 \text{ kH}.$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину:

$$Y_I = P_1 - R_V = 30 - 5 = 25 \text{ kH}.$$

Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля у стрижнях ферми.

Існує декілька способів визначення цих зусиль: графічні і аналітичні. Ми розглянемо два аналітичних методи: *метод вирізування вузлів і метод перетинів* (метод Риттера). Розглянемо послідовно ці методи.

1.6.2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються *два стрижні* з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, *кожний вузол – це плоска система збіжних сил*, для якої можна скласти два рівняння рівноваги і визначити дві реакції.

За правилом реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж реакція стрижня отримає від'ємний знак, то це свідчить про те, що дійсний напрям його реакції протилежний.

Визначимо цим методом зусилля у стрижнях ферми, поданої на рис. 1.132. *Спочатку вирізаємо вузол I, де збігаються тільки два стрижні* (рис. 1.133): кількість рівнянь рівноваги повинна відповідати кількості невідомих. Крім визначених реакцій опор \bar{X}_I і \bar{Y}_I до нього прикладаються невідомі реакції перетнутих стрижнів 1 і 2, які позначаються \bar{S}_1 та \bar{S}_2 і спрямовуються, за прийнятим правилом, від вузла.

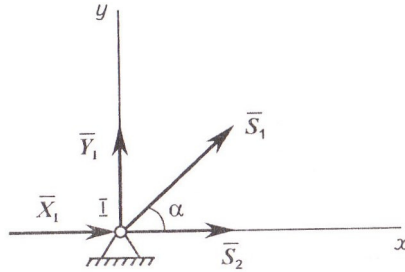


Рис. 1.133

Покажемо на схемі осі плоскої прямокутної системи декартових координат xIy та кут α . Як видно зі схеми, вузол I перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями \bar{S}_1 і \bar{S}_2 .

Складемо для вузла I рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил у вигляді (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_I + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_I + S_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

З другого рівняння визначаємо:

$$S_1 = -\frac{Y_I}{\sin \alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \text{ кН}.$$

Як легко побачити, стрижень 1 є стиснутим із зусиллям $35,3 \text{ кН}$, про що інформує знак «мінус». З першого рівняння визначимо величину другої невідомої реакції:

$$S_2 = -X_I - S_1 \sin \alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 2 перебуває у стані розтягу, що здійснюється із зусиллям $15,0 \text{ кН}$.

Далі можна вирізати тільки вузол II (рис. 1.134). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила \bar{P}_1 і реакції трьох стрижнів \bar{S}_1 , \bar{S}_3 і \bar{S}_4 . До того ж, невідомими є реакції тільки у двох стрижнях: 3 (\bar{S}_3) і 4 (\bar{S}_4).

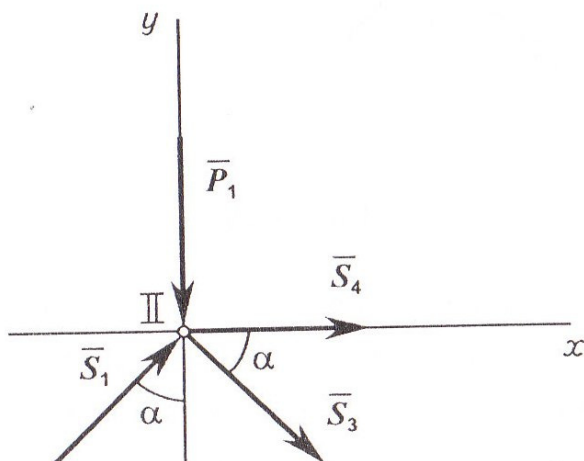


Рис. 1.134

Попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їхні реакції \bar{S}_3 і \bar{S}_4 спрямуємо від вузла II.

Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше під час вирізання першого вузла і не тільки встановлено його значення, але й те, що він є стиснутим, а тому його реакція \bar{S}_1 буде спрямована до вузла II. Проведемо крізь вузол II осі координат і покажемо кути α .

Слід ще раз підкреслити, що в кожному вузлі повинно бути не більше двох невідомих, тому що для плоскої системи збіжних сил можна скласти тільки два рівняння рівноваги. Складемо для вузла II рівняння суми проєкцій на осі координат, використовуючи умови, аналогічні (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 + S_3 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_3 \sin \alpha + S_1 \cos \alpha - P_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

З другого рівняння визначаємо зусилля:

$$S_3 = \frac{S_1 \cos \alpha - P_1}{\sin \alpha} = \frac{35,3 \cdot 0,707 - 30}{0,707} = -\frac{5,00}{0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 3 є стиснутим із зусиллям 7 kH . Напрямок реакції S_3 – до вузла II. З першого рівняння знаходимо:

$$\begin{aligned} S_4 &= -S_1 \sin \alpha - S_3 \cos \alpha = -35,30 \cdot 0,707 - (-7,00) 0,707 = \\ &= -25,00 + 5,0 = -20,00 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Таким чином, стрижень 4 теж стиснутий із зусиллям $20,00 \text{ kH}$.

Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.135).

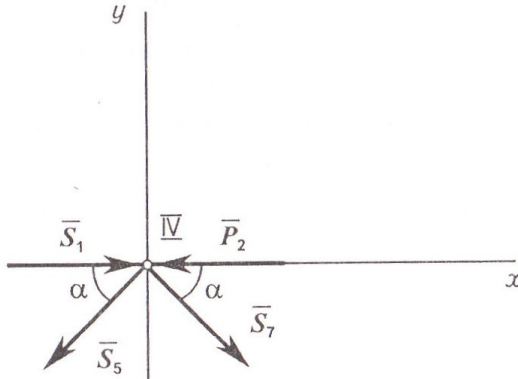


Рис. 1.135

Він перебуває в рівновазі під дією зовнішньої сили \bar{P}_2 і зусиль у стрижнях 4, 5 і 7. Зусилля у стрижні 4 визначено раніше

і його напрям – до вузла, а тому шуканими невідомими є тільки зусилля \bar{S}_5 і \bar{S}_7 .

Проведемо крізь вузол IV осі координат x та покажемо кути α . Напрями зусиль у стрижнях 5 і 7 – від вузла IV.

Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи умови рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 - P_2 - S_5 \cos \alpha + S_7 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_5 \sin \alpha - S_7 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (1.67), для чого з другого рівняння виразимо зусилля S_5 через зусилля S_7 :

$$S_5 = -\frac{S_7 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -S_7.$$

Тепер підставимо значення S_5 у перше рівняння системи:

$$S_7 \cos \alpha - (-S_7) \cos \alpha - P_2 + S_4 = 0. \text{ Звідки}$$

$$S_7 = \frac{P_2 - S_4}{2 \cos \alpha} = \frac{10 - 20}{2 \cdot 0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 7 є стиснутим із зусиллям $7,00 \text{ kH}$. Тепер маємо можливість знайти зусилля $S_5 = -S_7 = 7,00 \text{ kH}$. Стрижень 5 розтягнутий.

Для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V (рис. 1.136).

До вузла V прикладена реакція зовнішньої опори \bar{R}_V , відоме зусилля \bar{S}_7 , спрямоване до вузла, та невідоме зусилля \bar{S}_6 , яке слід направити від вузла. Складемо для вузла V рівняння

рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.20):

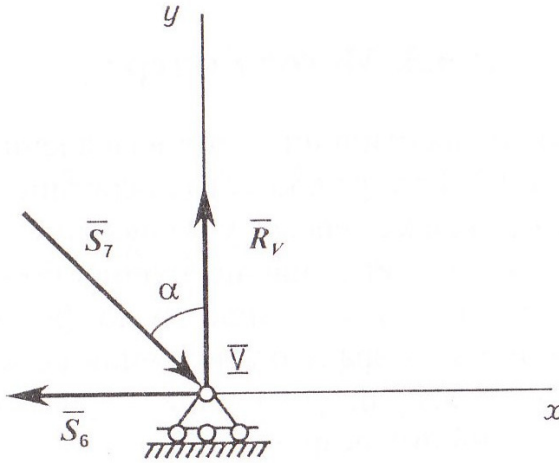


Рис. 1.136

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_7 \sin \alpha - S_6 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_V - S_7 \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля S_6 достатньо розв'язати перше рівняння системи (1.68):

$$S_6 = S_7 \cos \alpha = 7,00 \cdot 0,707 = 5,00 \text{ кН}.$$

Стрижень 6 розтягнутий із зусиллям 5,0 кН.

Дані розрахунків заносимо у табл. 1.1. Знак обчисленого зусилля у стрижні визначає характер його навантаження.

Якщо знак додатній («плюс»), то стрижень розтягнутий, а якщо від'ємний – то стиснутий.

Таблиця 1.1

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в <i>kH</i>	-35,30	+15,00	-7,00	-20,00	+7,00	+5,00	-5,00

1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину)

Розглянемо інший аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми, метод Ріттера або метод перетину.

Цей метод має декілька переваг порівняно з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. У цьому разі ставиться інша мета. Необхідно визначити реакції у стрижнях того перерізу ферми, який здається найбільш небезпечним. Тоді немає необхідності розглядати послідовно велику кількість вузлів, особливо, якщо ферма є складною. Крім того, у разі неточності розрахунку величини реакції у стрижнях, помилка в подальшому накопичуватиметься. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

Особливості застосування цього *методу* полягають у тому, що умовно робиться *перетин усієї ферми*, при цьому в зоні перетину повинно бути *не більше, ніж три стрижні* з невідомими зусиллями. Потім розглядається рівновага однієї з частин ферми, а друга частина відкидається.

Дію стрижнів, які потрапили під перетин, замінюють їхніми реакціями. Попередньо вважається, що ці стрижні розтягнуті, тобто, їх зусилля спрямовуються від вузлів.

Опорні реакції ферми визначаються так само, як і під час застосування методу вирізування вузлів.

Визначимо зусилля у 4, 5 і 6 стрижнях ферми, зробивши перетин і розглядаючи рівновагу простої правої частини ферми (рис. 1.137).

Замість перерізаних стрижнів прикладаємо у вузлі IV зусилля \bar{S}_4 і \bar{S}_5 , а у вузлі V – зусилля \bar{S}_6 . Напрями вказаних зусиль – від вузлів. До цієї частини ферми прикладена зовнішня сила \bar{P}_2 і реакція опори \bar{R}_V . Покажемо осі прямокутної системи декартових координат Vx у і кути α .

Як можна побачити, ця частина ферми перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил, а тому можна скласти для неї рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.57).

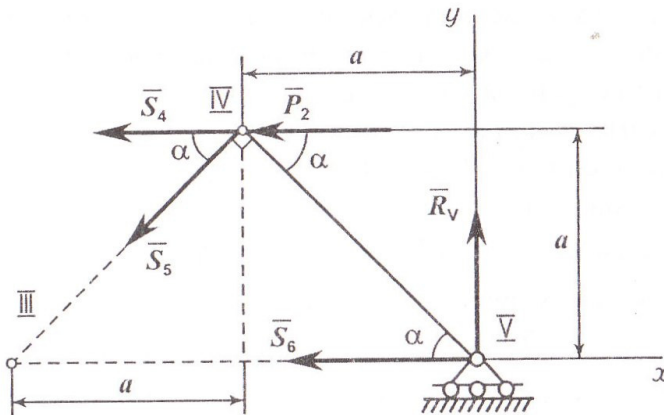


Рис. 1.137

Проте, тут доцільно застосувати *спосіб трьох моментних точок*.

Згідно з цим способом складаються рівняння рівноваги як суми моментів сил відносно тих точок, де перетинаються лінії дії двох векторів реакцій з невідомими зусиллями.

Тоді ці невідомі реакції в рівняння не входитимуть.

Перевага способу моментних точок полягає в тому, що отримані рівняння рівноваги будуть простими, з одним невідомим. У нашому випадку (рис. 1.137) такими точками

будуть вузли III і IV. Відносно цих точок складемо суми моментів сил. Проте, третьої моментної точки тут не існує, тому що вектори \vec{S}_4 і \vec{S}_6 не перетинаються (паралельні).

Перше рівняння є сумою проекцій сил на вертикаль.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_V - S_5 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{III}(\vec{P}_k) = 0; \quad P_2 \cdot a + S_4 \cdot a = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{IV}(\vec{P}_k) = 0; \quad R_V \cdot a - S_6 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Обчислимо невідомі зусилля. З першого рівняння визначимо зусилля:

$$S_5 = \frac{R_V}{\sin \alpha} = \frac{5}{0,707} = 7,00 \text{ kH}..$$

З другого рівняння:

$$S_4 = \frac{-P_2 \cdot a}{a} = -P_2 = -20,00 \text{ kH}.$$

З останнього рівняння: $S_6 = R_V = 5,0 \text{ kH}$.

Таким чином, стрижень 4 працює на стиск із зусиллям $20,00 \text{ kH}$, дійсний напрям зусилля S_4 є протилежним тому, що показано на схемі (рис. 1.137).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма є статично визначеною?
3. Що означає розрахувати ферму? Які припущення

- приймаються при цьому?
4. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
 5. У чому полягає метод перетину (метод Ріттера) під час розрахунків ферми?
 6. Скільки стрижнів із невідомими зусиллями можуть бути в зоні перетину?
 7. Відносно яких точок зручніше складати суми моментів сил частини ферми?
 8. Чому метод перетину називають ще методом трьох моментів?
 9. Який порядок розрахунку плоскої ферми?
 10. Яка різниця між реакцією і зусиллям у стрижні?

1.7. Тертя ковзання і тертя кочення

1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя.

Сили тертя ковзання

Дослід доводить, що при намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого у площині стикання тіл виникає *сила опору відносному ковзанню*.

Дослід переконує, що *тертя обумовлено* перш за все шорсткістю поверхонь контакту, що створює опір переміщенню, або *наявністю зчеплення* у притиснутих поверхонь.

Але вивчення складних фізико-механічних і хіміко-молекулярних проблем процесу тертя виходить за рамки курсу теоретичної механіки.

У цьому курсі теорією тертя ковзання користуються лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей реальних поверхонь у разі врахування сил тертя, якщо вони суттєво впливають на рух тіл.

Сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає під час руху одного тіла на поверхні іншого тіла і яка спрямована протилежно швидкості відносного руху тіла.

Розглянемо шорстку площину (рис. 1.138).

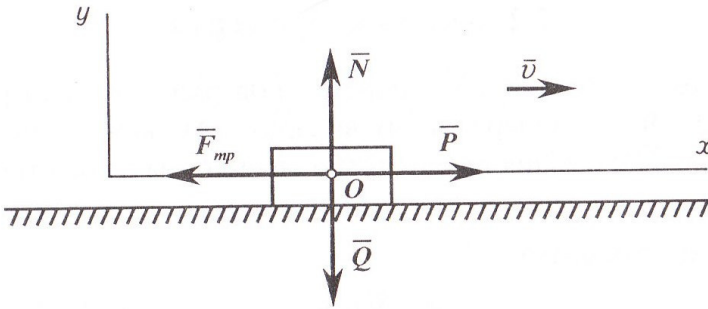


Рис. 1.138

На ній рівномірно рухається тіло вагою \vec{Q} під дією зовнішньої сили \vec{P} . Складемо розрахунково-силову схему, розглядаючи всі сили, які діють на це тіло.

Як відомо, опорна площина, яку умовно вважаємо як гладеньку площину, створює нормальну реакцію поверхні або *силу нормального тиску* \vec{N} , а в бік, що є протилежним напрямку дії сили \vec{P} , буде спрямована *сила тертя* $\vec{F}_{тр}$, що виникає внаслідок контакту шорстких поверхонь тіл, вектор якої прикладений до точки O.

Покажемо осі координат x у. Оскільки тіло перебуває у стані рівноваги, то є можливість скласти рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил. Запишемо умови і рівняння рівноваги тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad P - F_{mp.} = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

З першого рівняння отримуємо $P = F_{mp.}$, а з другого рівняння – $N = Q$. Таким чином, сила \bar{P} зрівноважується силою тертя $\bar{F}_{mp.}$, а нормальний тиск тіла на площину \bar{N} дорівнює вазі тіла \bar{Q} .

Наближені закони тертя ковзання або тертя першого роду встановили французькі фізики Гільом Амонтон (1663–1705) і Шарль Кулон (1736–1806), за одним із цих законів сила тертя $F_{mp.}$ пропорційна силі нормального тиску N і змінюється від нуля до граничної (максимальної) величини в момент зрушення тіла з місця:

$$F_{mp.} = fN, \quad (1.71)$$

де f – безрозмірний коефіцієнт пропорційності.

Як було встановлено пізніше, коефіцієнт пропорційності f є статичним *коефіцієнтом тертя ковзання* за відносного спокою, а в умовах руху величина динамічного коефіцієнта тертя ковзання трошки зменшується порівняно зі статичним.

Кулон вважав, що коефіцієнт тертя ковзання f не залежить від величини площі контакту тіл, швидкості руху тіл і інших факторів. Проте, подальші дослідження показали, що коефіцієнт тертя ковзання, навпаки, залежить від багатьох факторів: від матеріалу тіл, стану поверхонь, що контактують, температури, вологості, якостей мастил тощо.

1.7.2. Кут і конус тертя ковзання

Розглянемо горизонтальну шорстку поверхню, на якій розташоване тіло (рис. 1.139).

Як і в попередньому випадку, покажемо сили, прикладені у точці O : \bar{N} – реакція поверхні або сила нормального тиску, \bar{F}_{mp} – сила тертя. Додаючи векторно ці сили, отримаємо повну реакцію поверхні \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{mp}. \quad (1.72)$$

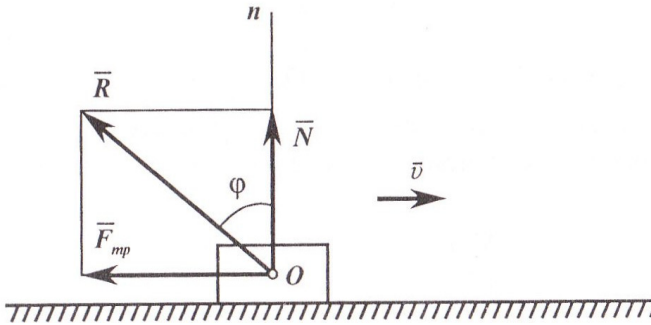


Рис. 1.139

Тепер проведемо крізь точку O , де прикладені сили, нормаль n і покажемо **кут тертя ковзання** φ , на який реакція \bar{R} відхилена від нормалі n .

Отже, **кут тертя ковзання** φ – це кут, який утворює рівнодійна \bar{R} нормального тиску \bar{N} і сили тертя \bar{F}_{mp} , тобто, повна реакція шорсткої поверхні \bar{R} з нормаллю n до поверхні в момент зрушення тіла з місця.

Визначимо кут тертя ковзання φ . Як легко побачити з рис. 1.139, його можна визначити так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.73)$$

Проте, з виразу (1.71) маємо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.74)$$

Якщо порівняти ліві частини виразів (1.73) і (1.74), то отримаємо:

$$f = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.75)$$

Таким чином, **коефіцієнт тертя ковзання f дорівнює тангенсу кута тертя φ .**

З цього випливає, що коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною. Визначити кут тертя можна також, якщо розглядати рівномірний рух тіла на похилій площині.

Нехай площина, на якій рухається тіло вагою \bar{G} (рис. 1.140), нахилена до горизонту під деяким кутом φ , таким, що рух тіла буде рівномірним.

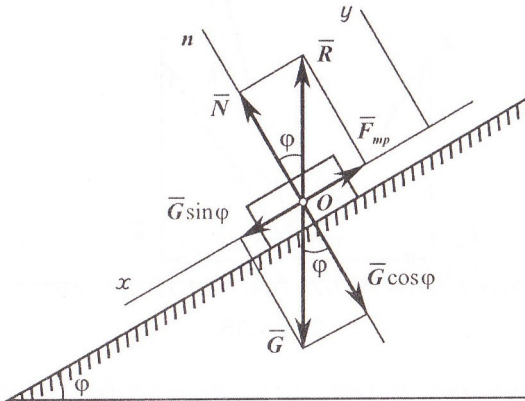


Рис. 1.140

Якщо показати осі координат x, y і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему двох рівнянь рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; & -F_{mp.} + G \sin \varphi &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; & N - G \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp.} = G \sin \varphi, \quad (1.77)$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G \cos \varphi. \quad (1.78)$$

Далі, якщо підставити вирази (1.77) і (1.78) у вираз (1.74), то матимемо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.79)$$

Звідси легко побачити, що у такому випадку кут φ і є той кут, на який відхилена від нормалі n повна реакція \bar{R} поверхні за векторного додавання векторів сил \bar{N} та $\bar{F}_{mp.}$. Цілком очевидно, якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим, ніж φ , то тіло почне рухатись з деяким прискоренням.

Якщо поступово змінювати по круту напрям горизонтальної рушійної сили \bar{P} , прикладеної до тіла, то внаслідок цього напрями сили тертя $\bar{F}_{mp.}$ також будуть послідовно змінюватись за колом. Тоді рівнодійна \bar{R} повної реакції поверхні буде повертатись навколо вектора \bar{N} , утворюючи як твірна кругову конічну поверхню (рис. 1.141).

У разі одного повного оберту реакції \vec{R} навколо вектора \vec{N} утворюється круговий конус, кут якого при вершині дорівнює 2φ .

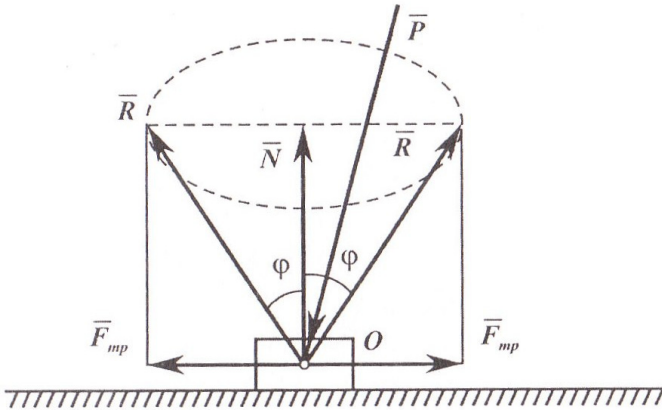


Рис. 1.141

Отже, **конус тертя ковзання** – це круговий конус, утворений реакцією шорсткої поверхні під час одного повного повороту рушійної сили, кут якого при вершині дорівнює подвійному куту тертя.

З поняття конуса тертя ковзання випливає таке правило: якщо вектор зовнішньої сили \vec{P} , прикладеної до тіла, розміщений всередині тіла конуса тертя, то, якою б великою за модулем ця сила не була, вона не зможе зрушити тіло з місця (рис. 1. 141).

Це пов'язано з тим, що в разі збільшення зовнішньої сили \vec{P} нормальна реакція \vec{N} , тобто, проекція зовнішньої сили на вертикаль, а з нею і сила тертя ковзання $\vec{F}_{тр.}$, зростатиме швидше, ніж рушійна сила, яка є проекцією сили \vec{P} на горизонталь.

Для доведення цього правила позначимо кут між вектором сили \vec{P} і вертикаллю через α . Рух тіла під час дії сили \vec{P} буде неможливий, якщо

$$\begin{aligned} P \sin \alpha < F_{mp} &\Rightarrow P \sin \alpha < f P \cos \alpha = \\ &= \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha < \varphi. \end{aligned}$$

Аналіз останнього виразу вказує на те, що поки вектор зовнішньої сили, яка тисне на тіло, перебуває у створі конуса тертя, рух неможливий. На цьому принципі працюють, наприклад, клинові або стопорні механізми у верстатах.

1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює α (рис. 1.142).

Вага тіла дорівнює \bar{Q} , до нього прикладена зовнішня сила \vec{P}_1 , яка викликає рівномірний рух тіла вгору зі швидкістю $v = \text{const}$.

Внаслідок рівномірного руху тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статки.

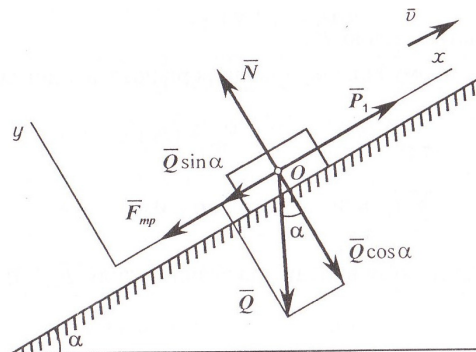


Рис. 1.142

Складемо розрахунково-силову схему. До тіла в точці O прикладена реакція поверхні \bar{N} (або сила нормального тиску), сила тертя $\bar{F}_{mp.}$, напрям якої протилежний напрямку руху тіла.

Складемо рівняння рівноваги (1.20), враховуючи, що тіло перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad P_1 - F_{mp.} - Q \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні:

$$N = Q \cos \alpha, \quad (1.81)$$

а з першого рівняння:

$$P_1 = F_{mp.} + Q \sin \alpha. \quad (1.82)$$

Оскільки $F_{mp.} = fN$, то, враховуючи вираз (1.81), матимемо:

$$F_{mp.} = fQ \cos \alpha. \quad (1.83)$$

Підставимо вираз (1.84) у вираз (1.82):

$$P_1 = fQ \cos \alpha + Q \sin \alpha = Q(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.84)$$

Якщо не прикладати силу \bar{P}_1 , то тіло рухатиметься із прискоренням донизу. А тому, визначимо таку мінімальну силу \bar{P}_2 , за дії якої рух тіла донизу був би рівномірним, що еквівалентно стану рівноваги (рис. 1.143).

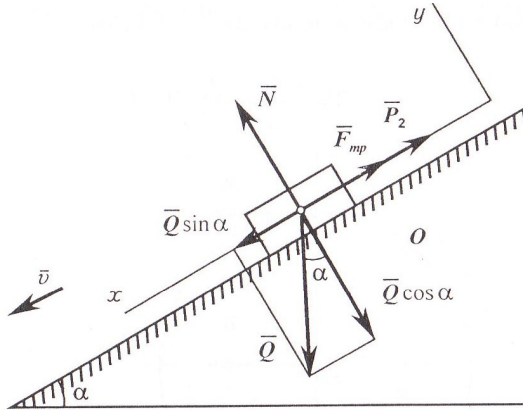


Рис. 1.143

Складемо і для цього випадку розрахунково-силову схему. Вона буде відрізнитись від попередньої схеми (рис. 1.142) тим, що сила тертя \bar{F}_{mp} збігатиметься за напрямом з силою \bar{P}_2 .

Складемо у цьому випадку рівняння рівноваги збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad -P_2 - F_{mp.} + Q \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Як і в попередньому випадку, визначимо силу тертя:

$$F_{mp.} = f Q \cos \alpha.$$

Підставимо дане значення сили тертя \bar{F}_{mp} у перше рівняння (1.85):

$$P_2 = Q \sin \alpha - f Q \cos \alpha = Q(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (1.86)$$

Порівняємо вирази (1.84) і (1.86). Як легко побачити, якщо зовнішня сила \bar{P} матиме величину в межах $P_2 < P < P_1$, то тіло буде у стані спокою, і використовувати формулу (1.71) для визначення сили тертя в цьому разі не можна. Вирази (1.84) і (1.86) можуть бути використаними під час розв'язування задач на рівновагу тіла, що перебуває на похилій площині.

1.7.4. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, який утворюється під час кочення одного тіла поверхнею іншого.

Уявимо коток радіусом R , що котиться (напрямок обертання показано стрілкою) на поверхні під дією рушійної сили \bar{P} , яка може бути прикладеною або до центра котка, або до його верхньої точки (рис. 1.144).

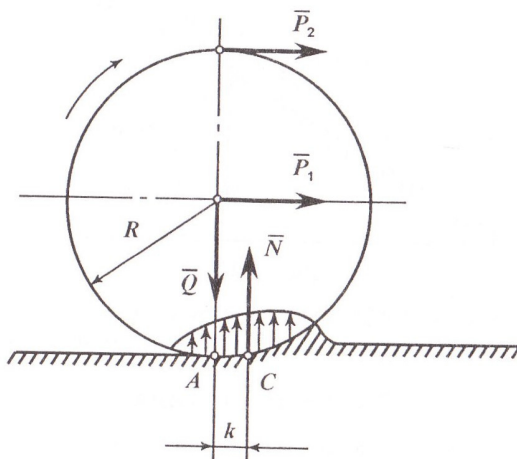


Рис. 1.144

На поверхні коток утворює колію, з боку якої діють елементарні реакції. Епюру елементарних навантажень можна

звести до зосередженої сили \bar{N} , яка буде віддалена від вертикальної осі котка на величину k в момент зрушення котка з місця (відстань AC). Ця **лінійна величина k** , яка має розмірність довжини, **називається коефіцієнтом тертя кочення** або плечем пари кочення (\bar{Q}, \bar{N}) .

Якщо коток рівномірно рухається, $v = const$, то сили, які до нього прикладені, зрівноважуються. Визначимо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A .

Розглянемо спочатку перший випадок, якщо рушійна сила \bar{P}_1 прикладена до центра котка, а рушійний момент $M_{руш.} = P_1 R$.

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad Nk - P_1 R = 0. \quad (1.87)$$

Оскільки момент опору кочення $M_{on.} = Nk$, то

$$P_1 = \frac{k}{R} N = \frac{M_{on.}}{R}. \quad (1.88)$$

Порівнюючи формулу (1.88) і вираз закону Кулона (1.71), вважаючи, що сила тертя ковзання забезпечує чисте кочення без проковзування і дорівнює \bar{P}_1 , можна побачити, що $\frac{k}{R} \ll f$. Тому колесо і застосовується, що має таку велику перевагу у зменшенні сили під час переміщення.

Розглянемо далі другий випадок, коли сила \bar{P}_2 прикладена до верхньої точки котка. У цьому випадку рівняння рівноваги матиме такий вигляд:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad (1.89)$$

$$Nk - P_2 \cdot 2R = 0.$$

Звідки
$$P_2 = \frac{Nk}{2R} = \frac{M_{on.}}{2R}. \quad (1.90)$$

Якщо порівняти вирази (1.90) і (1.88), то можна побачити, що в другому випадку для зрушення котка з місця треба прикласти вдвічі менше зусилля, ніж у першому.

1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні

Найбільш розповсюдженим типом передачі обертового руху є пасова передача, в якій рух від одного циліндричного шківів (ведучого) передається до другого (веденого) за допомогою гнучкої в'язі, тобто, пасів різноманітних конструкцій: плоский, клиновий, зубчастий... На ведучому валу, який примусово обертається і охоплюється гнучким тілом, виникають сили тертя, які і спричиняють передачу зусиль. На рис. 1.145 схематично показаний подібний ведучий шків радіуса R , який рівномірно обертається у напрямі кругової стрілки.

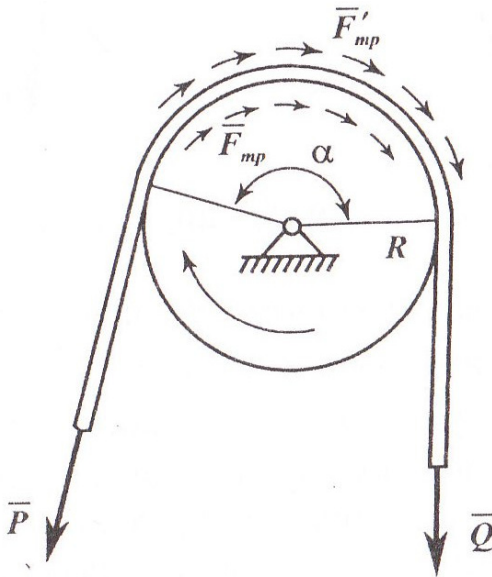


Рис. 1.145

При цьому кут обхвату шківів, що охоплюється пасом, дорівнює α . Позначимо зусилля, що створюються у гілках пасів (нитки), через \bar{P} і \bar{Q} . Умовно можна показати сили тертя \bar{F}_{mp} , які виникають на циліндричній поверхні самого шківів і мають напрям, протилежний напрямку його обертання, а на поверхні пасів (нитки) – рівні за величиною, але протилежно спрямовані сили тертя пасів (нитки) і шківів \bar{F}'_{mp} .

Розглянемо взаємодію ідеальної абсолютно гнучкої нерозтяжної нитки з циліндричною поверхнею шківів і знайдемо співвідношення між силами натягу \bar{P} і \bar{Q} за заданого кута α (радіан) обхвату шківів ниткою. Складемо розрахунково-силову схему розглядаючи шків, який рівномірно обертається, а нитка перебуває у відносному спокої.

Центр шківів позначимо літерою O , його радіус – R . Сили натягу \bar{P} і \bar{Q} прикладені відповідно в точках B і A нитки (там, де нитка сходиться зі шківів), а тому центральний кут AOB і є кутом обхвату α (рис. 1.146

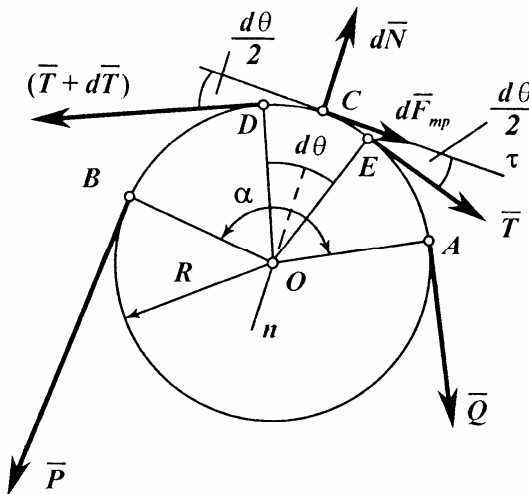


Рис. 1.146

Розглянемо рівновагу елемента DE , приклавши до нього такі сили: \bar{T} – сила натягу, прикладена у точці E ; $(\bar{T} + d\bar{T})$ – сила натягу, прикладена у точці D , де $d\bar{T}$ – різниця натягів, обумовлена наявністю сил тертя. Далі поділимо кут $d\theta$ навпіл і проведемо крізь точку C (на дузі DE) осі прямокутної натуральної системи координат τ і n (дотичну і нормаль).

Крізь точку C проходить елементарна нормальна сила тиску нитки $d\bar{N}$. Оскільки елемент DE перебуває у рівновазі, то різниця натягів $d\bar{T}$ зрівноважується силою тертя шківа і нитки $d\bar{F}_m$, яка прикладена у точці C , розміщена на дотичній τ і дорівнює:

$$dF_m = f \cdot dN, \quad (1.91)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Кути нахилу сил \bar{T} і $\bar{T} + d\bar{T}$ до осі τ дорівнюють $\frac{d\theta}{2}$.

Складемо рівняння рівноваги елемента DE під дією прикладених сил, для чого спроектуємо всі сили на осі τ і n :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_\tau = 0, & \left\{ T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0, \right. \\ \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_n = 0. & \left. \left\{ T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \right. \right\} \end{aligned} \right\} (1.92)$$

З першого рівняння системи (1.92) знайдемо dT , для чого розкриємо дужки:

$$T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (1.93)$$

Враховуючи, що $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, оскільки кут $d\theta$ дуже малий, а також на підставі виразу (1.91) з рівняння (1.93) маємо:

$$dT = f \cdot dN. \quad (1.94)$$

Перетворимо друге рівняння системи (1.92):

$$T \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \quad (1.95)$$

У виразі (1.95) доданок $dT \sin \frac{d\theta}{2}$ є величиною вищого порядку мализни, як добуток нескінченно малих, тому цим доданком можна знехтувати. Крім того, за малого кута $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ у підсумку отримуємо:

$$2T \cdot \frac{d\theta}{2} = dN, \quad (1.96)$$

$$\text{або } dN = T \cdot d\theta. \quad (1.97)$$

Підставимо отримане значення dN у вираз (1.95):

$$dT = T d\theta \cdot f. \quad (1.98)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.98), для чого відокремимо змінні величини:

$$\frac{dT}{T} = f \cdot d\theta. \quad (1.99)$$

Обчислимо визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (1.99). При цьому величина натягу \bar{T} змінюється від початкового значення Q до кінцевого P , а кут θ має початкове значення 0 і змінюється до кінцевого значення α . Отже, межі інтегрування визначені.

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\theta.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$\ln T \Big|_Q^P = f\theta \Big|_0^\alpha \Rightarrow \ln P - \ln Q = f\alpha \Rightarrow \ln \frac{P}{Q} = f\alpha \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{f\alpha}.$$

Остаточно визначимо силу натягу P :

$$P = Q \cdot e^{f\alpha}. \quad (1.100)$$

Таким чином, з останнього виразу (1.100) можна з'ясувати, що зусилля P більше від зусилля Q у $e^{f\alpha}$ разів, воно залежить від коефіцієнта тертя f і кута обхвату α , а не залежить від радіуса шківів R . Цілком зрозуміло, що за відсутності тертя ($f = 0$) зусилля Q і P рівні. Вираз (1.100) носить назву формули Ейлера і дає можливість знайти найменшу силу Q , здатну зрівноважити силу P : $Q = Pe^{-f\alpha}$.

Наведемо приклад розрахунку зусиль у вітках пасової передачі, яку показано на рис. 1.147.

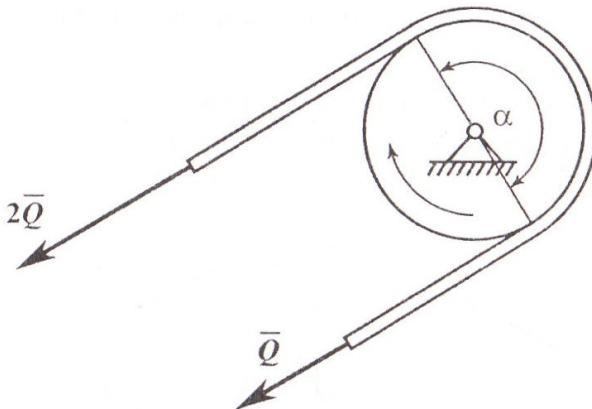


Рис. 1.147

З рисунка бачимо, що кут обхвату пасом ведучого шківa $\alpha = \pi$, коефіцієнт тертя гуми і сталі $f = 0,23$. Тоді:

$$e^{f\alpha} = 2,7^{0,23\pi} = 2. \Rightarrow P = 2Q.$$

Таким чином, натяг ведучої вітки пасової передачі вдвічі більший, ніж веденої.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають силою тертя, від яких факторів вона залежить, куди напрямлений її вектор?
2. Що таке коефіцієнт тертя ковзання, кут тертя, конус тертя?
3. Як експериментально визначити коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині?
4. Чому дорівнюють максимальна і мінімальна сили тертя у випадку рівноваги тіла на похилій площині?
5. Що таке тертя кочення?
6. Чому дорівнює коефіцієнт тертя кочення?
7. Чому дорівнює момент опору під час кочення?
8. Яка залежність між силами веденої і збіжної віток паса?
9. Як гасять енергію корабля під час причалювання?

1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі

1.8.1. Система сил у просторі

Якщо лінії дії усіх сил, що прикладені до твердого тіла, розміщені будь-як у просторі, то така система сил має назву просторової. Але розташування сил у просторі може бути різним. Це може бути просторова система збіжних сил,

паралельних сил і довільних сил.

Якщо розглянути тіло і вибрати прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, то всі ці три випадки різних систем сил можна побачити на рис. 1.148:

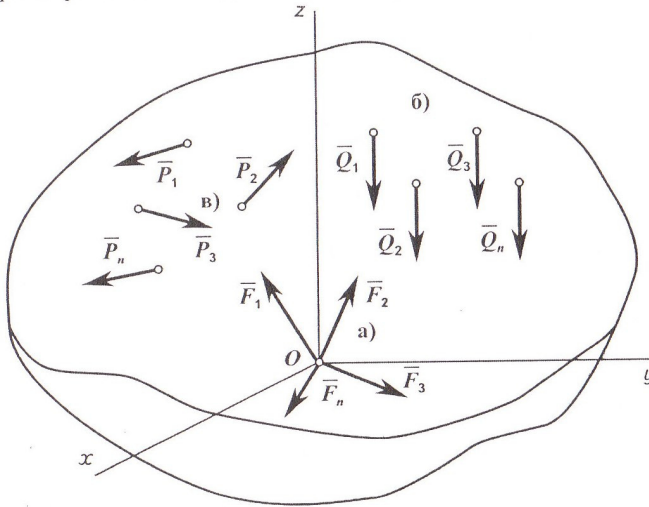


Рис. 1.148

1.8.2. Момент сили відносно осі

Розглянутий момент сили відносно центра (точки) характеризує обертальний ефект сили відносно точки.

Момент сили відносно осі характеризує обертальний ефект сили відносно осі. Якщо сила намагається повернути тіло навколо осі, то вона створює відповідний момент відносно цієї осі.

Визначимо момент відносно осі z від сили \vec{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.149).

Виберемо довільно розміщену у просторі вісь z . Розкладемо силу \vec{P} на дві складові: \vec{P}_z , яка паралельна осі z , і \vec{P}_π , яка перпендикулярна до цієї осі. Покажемо площину π , в якій буде розміщена складова \vec{P}_π . Площина π буде перпендикулярною до осі z і вектор \vec{P}_π є проекцією сили \vec{P} на площину π .

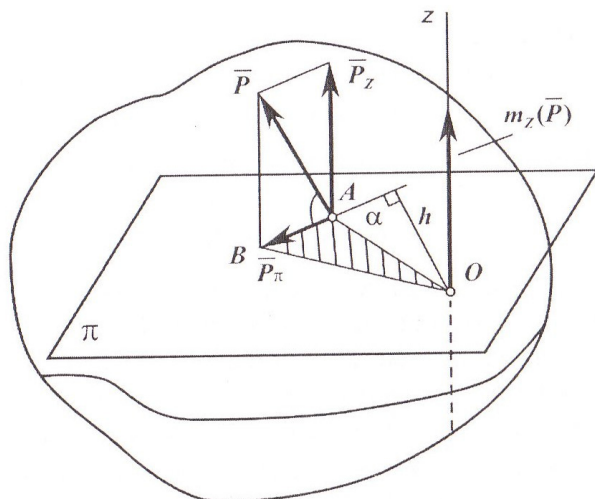


Рис. 1.149

Як можна побачити з рис. 1.149, складова \vec{P}_z не може повертати тіло відносно осі z , отже вона не створює моменту відносно цієї осі. Складова \vec{P}_π , навпаки, може повертати тіло навколо осі z з моментом:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_\pi). \quad (1.101)$$

Визначимо модуль моменту $m_z(\vec{P}_\pi)$. Проекція \vec{P}_π розташована у площині π і за величиною дорівнює:

$$P_{\pi} = P \cos \alpha, \quad (1.102)$$

де α – кут між вектором сили \vec{P} та площиною π .

Момент у площині π створюється відносно точки O , в якій перетинаються вісь z і площина π . Покажемо плече h , опускаючи перпендикуляр із точки O до лінії дії складової \vec{P}_{π} або до її продовження. Остаточно момент дорівнюватиме:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_{\pi}) = m_o(\vec{P}_{\pi}) = P_{\pi} h = P \cos \alpha \cdot h. \quad (1.103)$$

Знак моменту сили відносно осі визначається наступним чином: якщо, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити, що поворот площини під дією проекції сили на цю площину відбувається проти напрямку годинникової стрілки, то момент сили відносно осі вважається додатним і навпаки.

Остаточно сформулюємо визначення моменту:

Моментом сили відносно осі називається взята з відповідним знаком скалярна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Далі, у площині π з'єднаємо точку O з точками A і B . Утворено трикутник $\triangle OAB$, у якого основою є сила \vec{P}_{π} , а вершина знаходиться в точці O . Як уже відомо, момент проекції \vec{P}_{π} відносно точки O – це подвійна площа трикутника $\triangle OAB$, а оскільки цей момент і є моментом сили \vec{P} відносно осі z , то

$$m_z(\vec{P}) = 2S_{\triangle OAB}. \quad (1.104)$$

Відомо, що вектор моменту сили відносно точки розміщений перпендикулярно до площині трикутника і спрямований за правилом свердлика.

Тоді і алгебраїчну величину моменту сили відносно осі як напрямлений відрізок також можна розмістити

перпендикулярно до площини трикутника, який утворено проекцією \bar{P}_π і точкою O .

Оскільки вказаний трикутник розташований у площині π , то спрямований відрізок моменту $m_z(P)$ буде знаходитись на осі z (див. рис. 1.149).

Розглянемо особливі умови, за яких момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- якщо сила паралельна осі (у цьому випадку проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнюватиме нулю),
- якщо лінія дії сили перетинає цю вісь (тоді плече $h = 0$).

Звідси випливає, що якщо сила та вісь розміщені в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнюватиме нулю.

Якщо вектор сили не знаходиться з віссю в одній площині, але він перпендикулярний до осі, то момент цієї сили дорівнює добутку модуля сили на відстань між силою та віссю (з відповідним знаком).

1.8.3. Залежність між моментами сили відносно центра і відносно осі, що перетинає цей центр

Уявимо силу \bar{P} , вектор якої довільно розміщений у просторі (рис. 1.150). Момент від сили \bar{P} відносно центра O $\bar{m}_o(\bar{P})$ як вектор розміщений перпендикулярно площині трикутника OAB і спрямований за правилом свердлика.

Далі візьмемо на осі z іншу точку O_1 і проведемо крізь неї площину π , перпендикулярну цій осі. Спроекуємо на площину π силу \bar{P} , опускаючи перпендикуляри із точок A і B до перетину з площиною π , отримаємо проекцію \bar{P}_π – відрізок ab .

Визначимо момент проекції \bar{P}_π відносно точки O_1 . Так

само, як і у попередньому випадку, у площині π побудуємо трикутник, з'єднуючи точку O_1 з кінцями вектора проекції \bar{P}_π . Тоді момент проекції \bar{P}_π відносно точки O_1 дорівнюватиме:

$$m_{O_1}(\bar{P}_\pi) = 2S\Delta O_1ab. \quad (1.105)$$

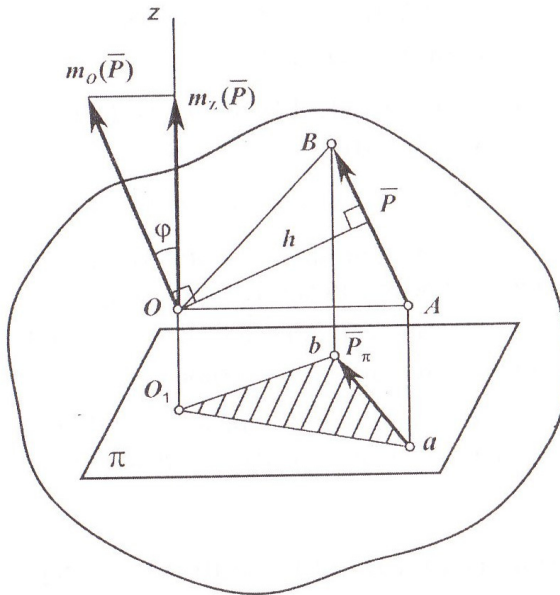


Рис. 1.150

Отже, вираз $m_{O_1}(\bar{P}_\pi)$ є моментом сили \bar{P} відносно осі z :

$$m_z(\bar{P}) = m_{O_1}(\bar{P}_\pi) = 2S\Delta O_1ab. \quad (1.106)$$

Напрявлений відрізок цього моменту буде розміщений на осі z і спрямований за правилом свердлика.

Але, як легко побачити з рис. 1.149, трикутник O_1ab є проекцією трикутника OAB на площину π . Тоді за відомою теоремою із геометрії можна записати:

$$S\Delta O_1ab = S\Delta OAB \cdot \cos \varphi, \quad (1.107)$$

де φ – кут між площинами трикутників.

Якщо підставити вираз (1.107) у вираз (1.106) і врахувати, що $2S\Delta OAB = m_o(\bar{P})$, то матимемо:

$$m_z(\bar{P}) = 2S\Delta OAB \cdot \cos \varphi = m_o(\bar{P}) \cos \varphi. \quad (1.108)$$

Оскільки кут між площинами вказаних трикутників дорівнює куту між перпендикулярами, проведеними до них, то кут φ , як раз, і буде кутом між осьовим моментом $m_z(\bar{P})$ і векторним моментом відносно центра $\bar{m}_o(\bar{P})$. А тому величина моменту сили відносно осі є проекцією на цю вісь моменту сили відносно точки.

Таким чином, момент сили \bar{P} відносно осі з дорівнює проекції на цю вісь моменту цієї сили відносно довільної точки на даній осі.

1.8.4. Формули для обчислення моментів сил відносно координатних осей

Визначимо моменти відносно координатних осей x, y, z від сили \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.51).

Позначимо кінці вектора сили \bar{P} літерами A і B . Позначимо координати точки A прикладання сили до тіла через x, y і z . Тепер, для того, щоб визначити момент сили \bar{P} відносно осі z , спроектуємо вектор цієї сили на площину xOy , для чого з точок A і B опускаємо на цю площину перпендикуляри, отримуючи на площині проекцію \bar{P}_{xy} .

Отриману проекцію можна розкласти на складові \bar{P}_x і \bar{P}_y , які є добутками проекції на відповідні орти координатної осі. Тепер визначимо момент сили \bar{P} відносно осі z як суму моментів, що

створюють складові \bar{P}_x і \bar{P}_y відносно точки O (за теоремою Вариньйона).

Як легко побачити з рис. 1.51:

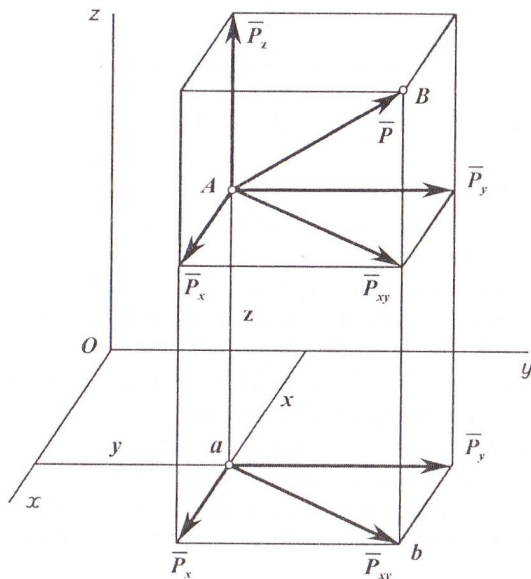


Рис. 1.51

$$m_z = P_y \cdot x - P_x \cdot y. \quad (1.109)$$

Аналогічно, для визначення моменту сили відносно осі x необхідно спроектувати силу на площину yOz , розкласти проекцію на дві складові \bar{P}_z і \bar{P}_y і знайти суму моментів цих складових відносно точки O .

Моменти сили відносно осей виражаються наступним чином:

$$m_x = yP_z - zP_y, m_y = zP_x - xP_z, m_z = xP_y - yP_x. \quad (1.110)$$

Отже, для обчислення моменту сили відносно координатних осей необхідно задати координати точки

прикладання сили і проекції сили на ці осі.

Аналізуючи вирази (1.110), можна побачити, що вони збігаються з виразами (1.29).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка система сил є просторовою системою довільних сил?
2. Як знайти момент сили відносно осі?
3. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Яка існує залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, яка проходить крізь цю точку?
5. Що таке просторова система збіжних сил?
6. Що створює момент сили відносно осі?
7. Як спроекувати векторний момент сили відносно центра на координатні осі?
8. Сформулюйте методику визначення моменту сили відносно осі.

1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор і головний момент просторової системи сил

1.9.1. Пари сил у просторі

Як відомо, *пари сил* характеризуються трьома параметрами: *модулем*, що дорівнює добутку однієї із сил пари на плече пари, *площиною дії пари і напрямом повороту тіла* у цій площині. Для пар, розміщених в одній площині, остання є загальною для всіх пар, тому її, як окремий параметр, не треба

враховувати під час перетворень. Якщо розглядати пари, які розміщені в різних площинах, то для кожної з них необхідно визначати всі три параметри.

1.9.2. Теорема про перенесення пари у паралельну площину

Не змінюючи дії пари сил на тіло, можна переносити цю пару у паралельну площину.

Доведемо це. Припустимо, що існує тіло, до якого у площині π прикладена пара сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) (рис. 1.152).

При цьому $P_1 = P_2$ і $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_2$. Позначимо точки прикладання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 літерами A і B .

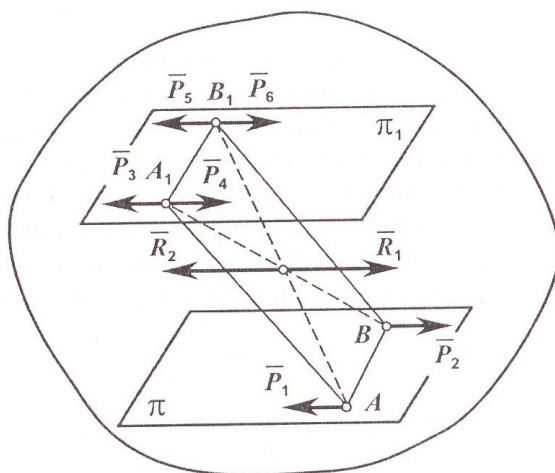


Рис. 1.152

Візьмемо на тілі іншу площину π_1 , яка є паралельною даній площині π . Відрізок AB перенесемо паралельно самому

собі у площину π_1 у положення A_1B_1 . Прикладемо у точках A_1 і B_1 зрівноважені системи сил \bar{P}_3, \bar{P}_4 і \bar{P}_5, \bar{P}_6 , які в сумі еквівалентні нулю.

При цьому модулі всіх сил виберемо однаковими. З'єднаємо всі чотири точки і отримаємо паралелограм AA_1B_1B (оскільки $AB = A_1B_1$ і $AB \parallel A_1B_1$). Покажемо діагоналі цього паралелограма. Вони перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну діагональ навпіл.

Об'єднаємо сили \bar{P}_2 і \bar{P}_4 , які прикладені на кінцях першої діагоналі і спрямовані в один бік. Оскільки вони паралельні і мають однаковий напрям, то їх можна додати, отримавши рівнодійну, яка у такому разі буде прикладена саме посередині діагоналі.

$$R_1 = P_2 + P_4 = 2P.$$

Те саме зробимо з силами \bar{P}_1 і \bar{P}_5 , одержуючи рівнодійну \bar{R}_2 , яка буде прикладена посередині другої діагоналі і спрямована у той самий бік, що і ці сили, але матиме напрям, протилежний напрямку першої рівнодійної \bar{R}_1 .

$$R_2 = P_1 + P_5 = 2P.$$

Отже, в точці перетину діагоналей паралелограма AA_1B_1B є дві сили \bar{R}_1 і \bar{R}_2 , які є зрівноваженою системою сил і які, за другою аксіомою, можна відкинути.

На рис. 1.152 залишились лише сили \bar{P}_3 і \bar{P}_6 , які є парою сил, перенесеною і прикладеною у площині π_1 .

Таким чином, пару сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) перенесено з площини π у паралельну площину π_1 . Теорему доведено.

1.9.3. Умови еквівалентності пар у просторі

Як відомо, момент пари сил є векторною величиною. Момент пари як вектор має напрям, перпендикулярний площині, у якій розташована пара сил, і спрямований таким чином, що, дивлячись з кінця вектора, можна побачити поворот площини дії пари проти напрямку руху стрілки годинника. Також було встановлено, що пару сил можна пересувати і повертати у площині її дії, а також переносити у паралельну площину, оскільки момент пари сил є вектором вільним. Таким чином, момент пари сил як вектор або векторний момент пари можна переносити вздовж лінії його дії і пересувати паралельно самому собі. На підставі викладеного можна стверджувати, що пари сил у просторі є еквівалентними, якщо їхні векторні моменти рівні за модулем, паралельні і спрямовані в один бік.

1.9.4. Додавання просторової системи пар

Додати пари сил у просторі означає знайти таку рівнодійну пару, яка буде еквівалентною заданій системі пар.

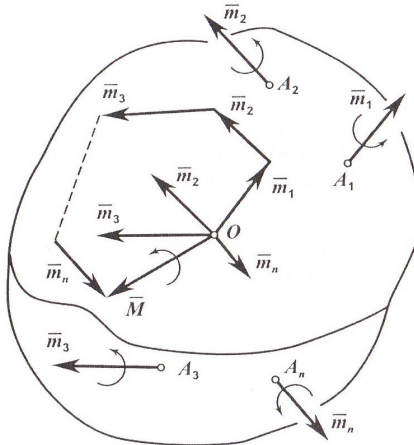


Рис. 1.153

А оскільки кожна пара сил (рис. 1.153) характеризується її моментом як вектором, то момент еквівалентної пари сил повинен дорівнювати геометричній сумі векторних моментів складових пар сил.

Уявимо тіло, до якого прикладена система пар сил, довільно розташованих у просторі (рис. 1.153).

Позначимо вектори цих моментів через $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$.

Оскільки вектори-моменти пар сил є вільними векторами, то їх можна переносити паралельно самим собі у довільну точку. Якщо звести ці вектори до одного центра, то будемо мати систему векторних моментів, як систему збіжних векторів, яку можна геометрично додати.

Як відомо, додавання векторних моментів можна здійснювати за правилом геометричного додавання векторів різної фізичної природи (сила, швидкість, прискорення тощо) методом силового многокутника. Векторну суму можна записати наступним чином:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k . \quad (1.111)$$

Таким чином, векторний момент рівнодійної або підсумкової пари дорівнює геометричній сумі векторних моментів складових пар .

1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі

Якщо на тіло діє система пар сил, довільно розташованих у просторі, то тіло буде у стані рівноваги тільки тоді, коли момент рівнодійної (еквівалентної) пари дорівнює нулю. А оскільки векторний момент рівнодійної пари визначається як геометрична сума моментів складових пар, то ця векторна сума теж повинна дорівнювати нулю. Подібна умова рівноваги запишеться так:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0. \quad (1.112)$$

Для рівноваги тіла, яке перебуває під дією довільної системи пар сил у просторі, необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів складових пар дорівнювала нулю.

1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи

Уявимо тіло, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, прикладених у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (рис. 1.154).

Виберемо довільну точку O як центр зведення і побудуємо прямокутну систему декартових координат $Oxuz$.

Послідовно перенесемо сили паралельно самим собі у центр O (метод Пуансо). При цьому до тіла необхідно кожен раз додавати моменти «приєднаних» компенсаційних пар сил, які дорівнюють моментам заданих сил відносно центра перенесення O .

Момент першої пари позначимо $\bar{m}_1 = \bar{m}_o(\bar{P}_1)$, він прикладений у точці O перпендикулярно до площини трикутника OA_1P_1 і спрямований за правилом свердлика.

Теж саме зробимо і з іншими силами, прикладеними до тіла. У результаті цього перенесення у центрі зведення O отримаємо систему збіжних сил і систему моментів пар сил у вигляді векторів, тобто, систему векторних моментів.

Головний вектор \bar{R} дорівнює геометричній сумі векторів усіх сил, прикладених до тіла, а головний момент \bar{M} дорівнює векторній сумі усіх моментів сил відносно центра зведення.

Систему збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, перенесених і прикладених у центрі O , можна перетворити на підставі відомого методу векторних перетворень для системи збіжних

сил і замінити однією підсумковою силою \bar{R} , яка називається головним вектором просторової системи довільних сил.

Аналогічні перетворення проведемо і для системи векторних моментів приєднаних пар.

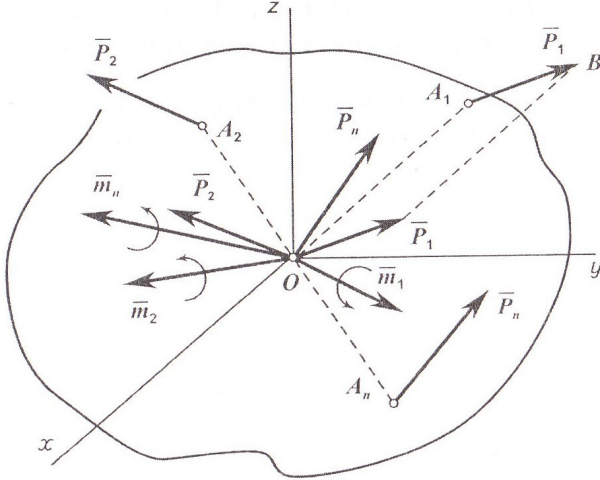


Рис. 1.154

Вектори-моменти пар $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$, які теж прикладені у центрі O , також можна замінити однією парою з підсумковим моментом \bar{M} , який називається головним моментом просторової системи довільних сил.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k, \\ \bar{M} &= \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.113)$$

Отже, будь-яка просторова система довільних сил, що діє на тіло, може бути зведена до однієї сили – головного вектора системи і однієї пари сил – головного моменту системи просторових сил.

У загальному випадку головний вектор \bar{R} не залежить від положення центра зведення O , а головний момент \bar{M} , навпаки, залежить від положення центра, тому що за іншого положення центра змінюються плечі «приєднаних» пар або рівні їм плечі заданих сил відносно центра зведення.

1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил

Визначимо аналітично головний вектор просторової системи довільних сил \bar{R} через його проєкції на осі просторової системи координат $Oxyz$.

Позначимо ці проєкції літерами з відповідними індексами R_x, R_y, R_z .

Проєкція головного вектора на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} = \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

Якщо відомі проєкції головного вектора R на осі координат, то можна визначити його величину як діагональ паралелепіпеда, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (1.115)$$

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_z}{R}.$$

Проекція головного моменту \bar{M} на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій моментів складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= [m_o(\bar{P}_1)]_x + [m_o(\bar{P}_2)]_x + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_x, \\ M_y &= [m_o(\bar{P}_1)]_y + [m_o(\bar{P}_2)]_y + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_y, \\ M_z &= [m_o(\bar{P}_1)]_z + [m_o(\bar{P}_2)]_z + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

Але проекція моменту сили відносно точки на вісь, яка проходить крізь цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі:

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P}_1)]_x &= m_x(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_x = m_x(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_x = m_x(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_y &= m_y(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_y = m_y(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_y = m_y(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_z &= m_z(\bar{P}_1), \quad [m_o(\bar{P}_2)]_z = m_z(\bar{P}_2), \quad \dots, \quad [m_o(\bar{P}_n)]_z = m_z(\bar{P}_n), \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням останнього можна остаточно визначити проекції вектора головного моменту на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x(\bar{P}_1) + m_x(\bar{P}_2) + m_x(\bar{P}_3) + \dots + m_x(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_y &= m_y(\bar{P}_1) + m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3) + \dots + m_y(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_z &= m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{P}_3) + \dots + m_z(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

Якщо відомі проекції головного моменту \bar{M} на осі координат, то неважко визначити модуль головного векторного моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.118)$$

1.9.8. Окремі випадки зведення просторової системи довільних сил до центра

Нагадаємо про те, що будь-яка просторова системи довільних сил може бути зведена до однієї сили – головного вектора системи і однієї пари, момент якої дорівнює головному моменту системи. Але можуть бути і деякі часткові випадки.

1. Головний момент системи дорівнює нулю $\bar{M} = 0$, а головний вектор не дорівнює нулю $\bar{R} \neq 0$. У цьому випадку головний вектор \bar{R} буде рівнодієюю просторової системи довільних сил.

2. Головний вектор системи дорівнює нулю $\bar{R} = 0$, а головний момент системи не дорівнює нулю $\bar{M} \neq 0$. У такому випадку просторова система довільних сил зводиться до однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту системи. Головний момент \bar{M} не залежить у цьому разі від зміни положення центра зведення.

3. Головний вектор системи $\bar{R} \neq 0$ і головний момент системи \bar{M} не дорівнюють нулю, але вектор \bar{R} перпендикулярний вектору \bar{M} .

Це означає, що головний момент як пара сил розташований у тій самій площині, що і головний вектор.

У цьому разі є можливість два вектори \bar{M} і \bar{R} замінити одним вектором – рівнодієюю, яка уже не буде проходити крізь центр зведення O .

Правомірність цього перетворення можна довести таким чином. Припустимо, що до тіла у точці O прикладені головний вектор \bar{R} і головний момент \bar{M} , кут між якими становить 90° (рис. 1.155). Головний вектор \bar{M} замінюємо парою сил $(\bar{R}'; \bar{R}'')$, до того ж, модулі сил \bar{R}, \bar{R}' і \bar{R}'' однакові, а плече $h = \frac{M}{R'}$.

Тепер маємо у точці O дві рівні і протилежно спрямовані сили \bar{R} і \bar{R}'' , а у точці A – силу \bar{R}' .

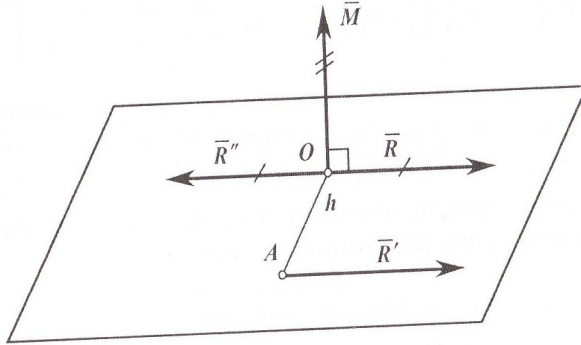


Рис. 1.155

Сили \bar{R} і \bar{R}'' утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути, а в точці A залишається сила \bar{R}' , яка дорівнює рівнодійній силі \bar{R} .

4. Головний вектор \bar{R} і вектор головного моменту \bar{M} не дорівнюють нулю, але вони паралельні (рис. 1.156).

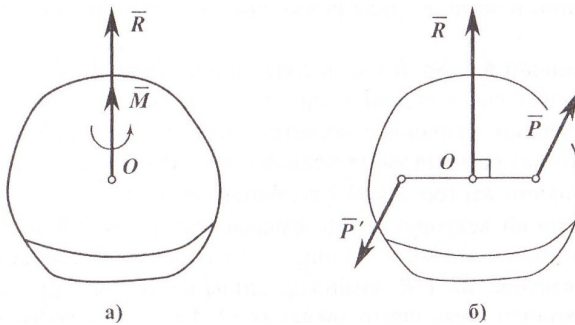


Рис. 1.156

У цьому випадку, який носить назву «динами» або «силового гвинта», тіло здійснює гвинтовий рух, оскільки в

напрямі головного вектора \vec{R} воно «рухається» поступально і одночасно обертається під дією пари у площині, яка є перпендикулярною до напрямку «руху». Вісь, на якій розміщуються вектори \vec{R} і \vec{M} і яка проходить крізь центр зведення O , має назву «вісь динами».

5. Головний вектор $\vec{R} \neq 0$ і вектор головного моменту $\vec{M} \neq 0$ не дорівнюють нулю і довільно розташовані у просторі (вектори \vec{R} і \vec{M} не перпендикулярні один до одного і не паралельні). У такому випадку просторова система довільних векторів також зводиться до «динами», але вісь динами не буде проходити крізь центр зведення O . Доведемо це.

Уявимо в центрі зведення O прикладений головний вектор \vec{R} і вектор головного моменту \vec{M} , кут між якими становить α (рис. 1.157). Розкладемо вектор головного моменту \vec{M} на два напрями – \vec{M}_1 , спрямований вздовж головного вектора \vec{R} , і \vec{M}_2 , перпендикулярний до \vec{R} . Проекції головного моменту на ці напрями:

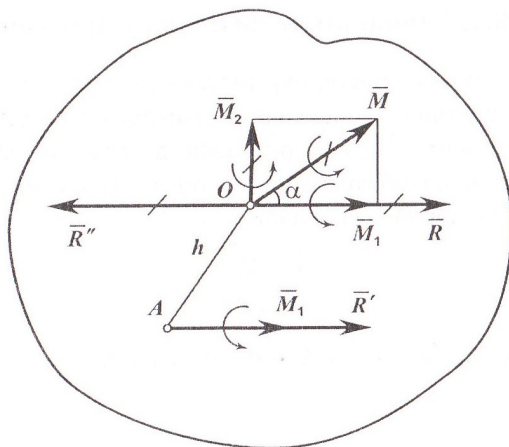


Рис. 1.157

$$M_1 = M \cos \alpha \text{ і } M_2 = M \sin \alpha .$$

Тепер, як і в випадку, коли головний вектор і головний момент були перпендикулярні, представимо момент \bar{M}_2 у вигляді пари сил $(\bar{R}'; \bar{R}'')$ з плечем $h = \frac{M_2}{R'}$. Також відкидаємо зрівноважені сили \bar{R} і \bar{R}'' , що були прикладені у центрі зведення O . Залишається прикладеною у точці A сила \bar{R}' , яка є головним вектором \bar{R} , і момент \bar{M}_1 , вектор якого прикладений у центрі зведення O . Проте, відомо, що вектор \bar{M}_1 , як вектор вільний, можна перенести у точку A .

Таким чином, задана просторова система довільних сил також зведена до «динами», але тепер «вісь динами» проходить крізь точку A .

6. Головний вектор $\bar{R} = 0$ і головний момент $\bar{M} = 0$ дорівнюють нулю. У такому випадку просторова система довільних сил перебуває у стані рівноваги.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як читається теорема про перенесення пари сил у паралельну площину?
2. Які умови еквівалентності пар у просторі?
3. Як додати пари, що довільно розташовані у просторі?
4. Яка умова рівноваги системи пар у просторі?
5. Чому дорівнює головний вектор та головний момент просторової системи сил?
6. Як обчислити аналітично головний вектор та головний момент просторової системи довільних сил?
7. До яких силових факторів можна звести просторову систему

- довільних сил?
8. Про які окремі випадки зведення просторової системи довольних сил ви знаєте?
 9. Чи можна звести до рівнодійної просторову систему довольних сил?
 10. Що таке «динама» і як звести до неї будь-яку просторову систему довольних сил?

1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил

1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі

Оскільки будь-яку просторову систему довольних сил можна звести до двох силових факторів: однієї сили, головного вектора \bar{R} і однієї пари сил, головного моменту \bar{M} , які прикладені до тіла, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент \bar{M} системи сил одночасно дорівнювали нулю:

$$\bar{R} = 0, \bar{M} = 0. \quad (1.119)$$

Умова (1.119) справджується, якщо кожен доданок під радикалом у виразах (1.115) і (1.118) теж дорівнюватиме нулю:

$$\begin{aligned} \bar{R} = 0 &\Rightarrow R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0; \\ \bar{M} = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0. \end{aligned}$$

Тоді на підставі виразів (1.119) умови рівноваги тіла під дією просторової системи довольних сил будуть мати такий вигляд:

$$R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \left. \vphantom{\sum_{k=1}^n} \right\} (1.120)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, \quad M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} (1.121)$$

На підставі цих умов складаються конкретні рівняння рівноваги тіла.

Отже, для **рівноваги тіла**, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил, **необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на кожну із трьох координатних осей і алгебраїчні суми моментів сил відносно цих же осей дорівнювали нулю.**

1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил

Якщо сили, що прикладені до тіла, розташовані у просторі, але лінії їх дії паралельні, то можна так вибрати систему координат, щоб одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна цим силам (рис. 1.158).

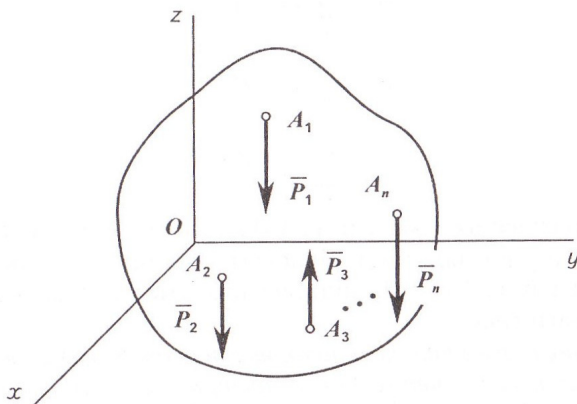


Рис. 1.158

Тоді дві інші осі (x, y) утворюють площину, яка буде перпендикулярною цим силам, тому проекції заданих сил на осі

x і y дорівнюватимуть нулю. Як паралельні сили, задані сили не створюють моментів відносно осі z .

Отже, щодо загальної системи умов рівноваги (1.120), (1.121), то для просторової системи паралельних сил три умови рівноваги випадають, а залишаються три інші. Тоді для рівноваги просторової системи паралельних сил маємо наступні умови:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.122)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи паралельних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчні суми моментів відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

1.10.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі

Допустимо, що на деяке тіло діє просторова система довільних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, зведена до рівнодійної \bar{R} , яка прикладена до тіла у точці C (рис. 1.159).

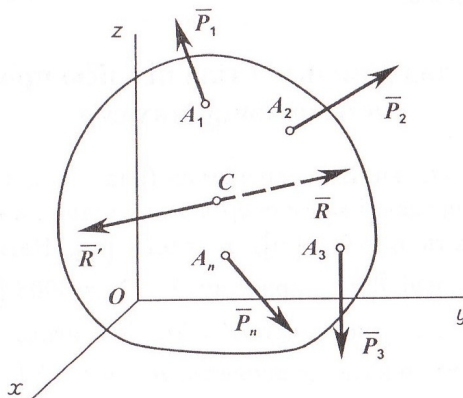


Рис. 1.159

Прикладемо до точки C зрівноважувальну силу \bar{R}' , яка за модулем дорівнює рівнодійній силі \bar{R} , розміщена з нею на одній прямій, але має протилежний напрям.

У цьому випадку тіло, що перебуває під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і зрівноважувальної сили \bar{R}' , буде у стані рівноваги, а це означає, що алгебраїчна сума моментів усіх цих сил відносно будь-якої осі декартової системи координат повинна дорівнювати нулю (вираз 1.121).

Візьмемо спочатку вісь x і для неї запишемо цю умову рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) + m_x(\bar{R}') = 0. \quad (1.123)$$

Знайдемо з цього виразу момент сили \bar{R}' відносно осі:

$$-m_x(\bar{R}') = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k). \quad (1.124)$$

Оскільки модуль сили \bar{R}' дорівнює модулю сили \bar{R} , але вони мають протилежний напрям, то $\bar{R}' = -\bar{R}$. А це означає, що $m_x(\bar{R}') = -m_x(\bar{R})$. Підставимо значення цього моменту у вираз (1.124):

$$m_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k). \quad (1.125)$$

Такі умови можна скласти відносно двох інших осей. Теорема доведена.

Якщо просторова система довільних сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної сили відносно довільної осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї осі.

1.10.4. Методика розв'язування задач і приклади для просторової системи довільних сил

Приклад 1.37

Горизонтальний вал трансмісії (рис. 1.160) несе два шківів C і D пасової передачі і може обертається у підшипниках A і B . Радіуси шківів $r_C = 0,2\text{ м}$, $r_D = 0,25\text{ м}$.

Натяги гілок паса на шківі C – горизонтальні \bar{T}_1 і \bar{t}_1 , до того ж, $T_1 = 2t_1 = 490\text{ Н}$.

Натяги гілок паса на шківі D – \bar{T}_2 і \bar{t}_2 , до того ж, $T_2 = 2t_2$, із вертикаллю вони утворюють кут $\alpha = 30^\circ$.

Лінійні розміри вала $a = b = 0,5\text{ м}$, $c = 1\text{ м}$. Система перебуває у стані рівноваги.

Визначити натяги гілок паса T_2, t_2 і реакції опорних підшипників A і B .

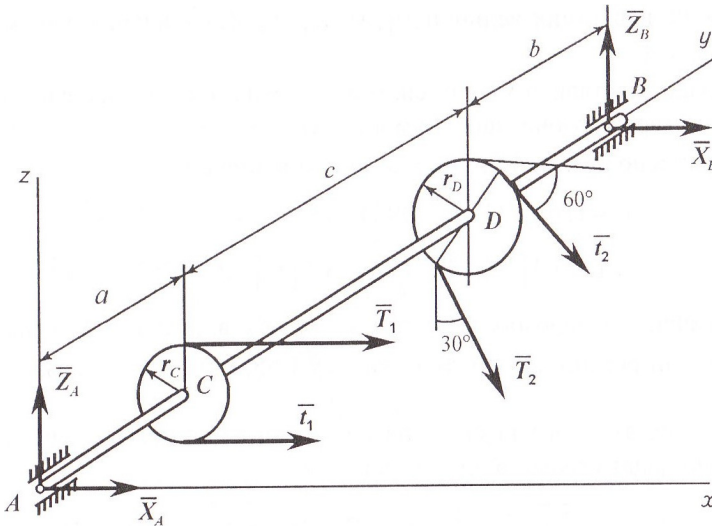


Рис. 1.160

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вала AB із шківками C і D . Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями.

У підшипниках реакції розташовані у площині, перпендикулярній осі вала AB .

Таким чином, реакції підшипників A і B розташовані відповідно у площині xAz і у площині, що паралельна до неї і проходить крізь точку B .

Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі x і z , як це показано на рис. 1.160

Після зроблених операцій на схемі отримана просторова система довільних сил, що перебуває у стані рівноваги.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.121) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил (а).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + t_1 + T_1 + t_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - t_2 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_2 \cos 30^\circ (a+c) - T_2 \cos 30^\circ (a+c) + Z_B (a+b+c) = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_1 r_C + T_1 r_C - T_2 r_D + t_2 r_D = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0; \quad -(t_1 + T_1)a - (T_2 + t_2) \cos 60^\circ (a+c) - X_B (a+b+c) = 0. \end{aligned} \right\} \text{(а)}$$

Як можна побачити із системи рівнянь (а), друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, прикладених до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь y (тобто всі сили лежать у площинах, перпендикулярних до осі y).

Проте, така система статично визначена, оскільки кількість невідомих величин $(t_2, X_A, Z_A, X_B, Z_B)$ дорівнює кількості рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у цю систему рівнянь числові значення величин, що задані (враховуючи, що за умовою задачі $T_2 = 2t_2$) і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримуємо відповіді:

$$t_2 = 1962 \text{ Н}; T_2 = 3924 \text{ Н}; X_A = -6553,9 \text{ Н}; \\ Z_A = 1275,3 \text{ Н}; X_B = -4046,7 \text{ Н}; Z_B = 3825,9 \text{ Н}.$$

Значення визначених величин X_A і X_B від'ємні, а це означає, що, фактично, ці реакції мають протилежний напрям, ніж це показано на рис. 1.160.

Для остаточного визначення реакцій підшипників в опорах A і B необхідно додати векторно їхні складові:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-6553,9)^2 + (1275,3)^2} = 6676,8 \text{ Н}; \\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-4046,7)^2 + (3825,9)^2} = 5569,8 \text{ Н}.$$

Приклад 1.38

Умова задачі. Шість невагомих стрижнів з'єднані своїми кінцями шарнірно. Вузли розміщені у вершинах прямокутного паралелепіпеда.

У двох вузлах прикладені сили \bar{Q} і \bar{P} . Сила \bar{Q} розташована в горизонтальній площині, сила \bar{P} – у площині бокової грані і утворює з вертикаллю кут α . Визначити зусилля у стрижнях $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_6$ (рис.1.161), якщо задані параметри:

$$Q = 20 \text{ кН}; P = 10 \text{ кН}; a = 2 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; c = 4 \text{ м}; \alpha = 30^\circ. \\ Q = 20 \text{ кН}; P = 10 \text{ кН}; a = 2 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; c = 4 \text{ м}; \alpha = 30^\circ.$$

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла A , де прикладена сила \bar{P} і збігаються стрижні 1,3,4.

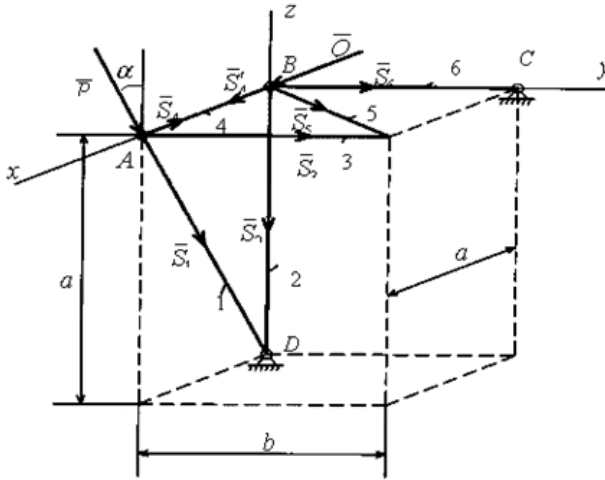


Рис. 1.161

Визначимо зусилля S_1 , S_3 , S_4 . Це просторова система збіжних сил, напрями яких перетинаються у вузлі А. Складемо три рівняння рівноваги, осі координат показані.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad -S_4 - P \sin \alpha - S_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0, \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad S_3 = 0, \quad (б)$$

$$\sum P_{kz} = 0; \quad -S_1 \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} - P \cos \alpha = 0. \quad (в)$$

Із рівняння (б) випливає, що зусилля у стрижні 3 дорівнює нулю: $S_3 = 0$.

Із рівняння (в) маємо:

$$S_1 = -\frac{P \cos \alpha \sqrt{a^2 + c^2}}{c} = -\frac{10 \cdot 0,866 \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}}{4} = -9,68 \text{ кН}.$$

Знак «мінус» інформує, що стрижень 1 стиснутий.

Із рівняння (а) визначимо:

$$S_4 = -P \sin \alpha - S_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = -10 \cdot 0,5 - (-9,68) \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} =$$

$$= -5 + 4,33 = -0,67 \text{ кН}.$$

Примітка. В рівняннях (а) і (в) величини косинусів дорівнюють:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \cos(\widehat{\bar{S}_1, \bar{S}_4}); \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \cos(\widehat{\bar{S}_1, \bar{S}_2})$$

Далі розглянемо рівновагу вузла B , де збігаються стрижні 2,4,5,6. Зусилля S_4 знайдено з вузла A , прикладемо його до вузла B : $\bar{S}'_4 = -\bar{S}_4$. Визначимо S_2, S_5, S_6 .

$$\sum P_{kx} = 0; \quad S'_4 + S_5 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + Q = 0, \quad (z)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad S_6 + S_5 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \quad (d)$$

$$\sum P_{kz} = 0; \quad S_2 = 0. \quad (e)$$

Із останнього рівняння (e): $S_2 = 0$.

Із рівняння (z):

$$S_5 = \frac{(-S'_4 - Q)\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{(0,67 - 20)\sqrt{4 + 9}}{2} = -34,8 \text{ кН}.$$

Із рівняння (d):

$$S_6 = -S_5 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -(-34,8) \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 29,0 \text{ кН}.$$

Приклад 1.39

Вал знаходиться в рівновазі під дією сил, які схематично зображені на рис. 1.162. Потрібно врахувати, що $T_2 = 0,25P_2$. Визначити реакції опор і силу P_2 , якщо задано

$$P_1 = 2\text{кН}; Q_1 = 1,5\text{кН}; T_1 = 0,5\text{кН}; a = 0,5\text{м}; b = 0,2\text{м}; c = 0,25\text{м}; \\ d_1/d_2 = 1,25\text{м}; d_1 = 0,25\text{м}; d_2 = 0,2\text{м}.$$

Ця задача – на рівновагу тіла під дією просторової системи довільних сил. Основна проблема під час розв'язування цієї задачі полягає у правильному визначенні моментів прикладених сил відносно трьох вибраних осей.

Слід врахувати, що реакція циліндричного шарніра B має дві складові у площині, яка перпендикулярна до осі шарніра, а реакція під'ятника A має три складові вздовж трьох координатних осей.

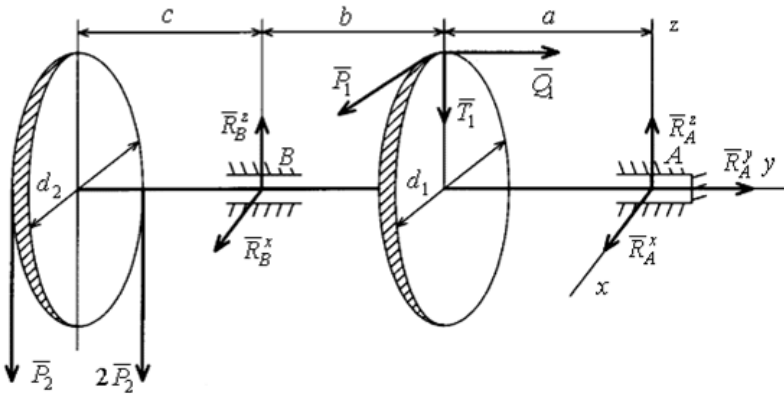


Рис. 1.162

Складемо розрахунково-силову схему. Виберемо систему координат з початком у точці A , ця опора є під'ятником, опора B – підшипник. Задані сили показані на рисунку.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.121) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил у вигляді сум проєкцій сил на три координатні осі і сум моментів усіх сил відносно цих же осей.

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_A^x + R_B^x + P_1 = 0, \quad (a)$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_A^y + Q_1 = 0, \quad (б)$$

$$\sum P_{kz} = 0; \quad -P_2 - 2P_2 + R_A^z + R_B^z - T_1 = 0, \quad (в)$$

$$\sum M_x = 0; \quad 3P_2(a + b + c) - R_B^z(a + b) + T_1a - Q_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 0, \quad (г)$$

$$\sum M_y = 0; \quad P_1 \cdot \frac{d_1}{2} + P_2 \cdot \frac{d_2}{2} - 2P_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 0, \quad (д)$$

$$\sum M_z = 0; \quad P_1 \cdot a + R_B^x(a + b) = 0. \quad (е)$$

Із рівняння (б)

$$R_A^y = -Q_1 = -1,5 \text{кН}.$$

Із рівняння (е)

$$R_B^x = -\frac{P_1 \cdot a}{a + b} = -\frac{2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,3} = -1,25 \text{кН}.$$

Із рівняння (а)

$$R_A^x = -P_1 - R_B^x = -2 - (-1,25) = -0,75 \text{кН}.$$

Із рівняння (д)

$$P_2 = \frac{P_1 d_1}{d_2} = \frac{2 \cdot 0,25}{0,2} = 2,5 \text{кН}.$$

Із рівняння (г)

$$\begin{aligned} R_B^z &= \frac{3P_2(a + b + c) + T_1a - Q_1 \cdot \frac{d_1}{2}}{a + b} = \\ &= \frac{3 \cdot 2,25(0,5 + 0,3 + 0,25) + 0,5 \cdot 0,5 - 1,5}{0,5 + 0,3} = 6,62 \text{кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (в)

$$R_A^z = T_1 + 3P_2 - R_B^z = 0,5 + 3 \cdot 2,25 - 6,62 = 1,38 \text{кН}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил? Сформулюйте їх.
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи довільних сил?
3. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи паралельних сил?
4. Як читається теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі?
5. Яка сила називається зрівноважувальною і чим вона відрізняється від рівнодійної?
7. Які умови рівноваги паралельних сил у просторі?
8. Надайте методичку розв'язання задач для просторової системи довільних сил.
9. Напишіть рівняння рівноваги для просторової системи збіжних сил.
10. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою довільних сил у просторі.
11. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою паралельних сил у просторі.

1.11. Центр паралельних сил і центр ваги

1.11.1. Центр паралельних сил

Допустимо, що до деякого тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних і однаково спрямованих векторів сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ (рис. 1.163). Додамо векторно сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , визначивши їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$:

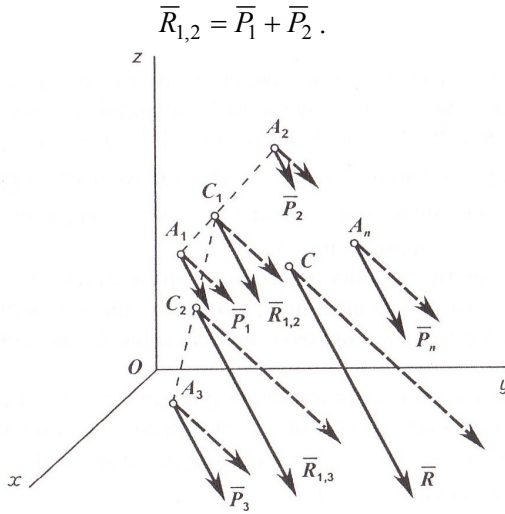


Рис. 1.163

Точка C_1 прикладання цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрям.

Оскільки вектори сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C_1 на цій прямій за відомим рівнянням або пропорцією:

$$P_1 \cdot A_1C_1 = P_2 \cdot A_2C_1. \quad (1.126)$$

Далі аналогічно додамо вектори сил $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є рівнодійною трьох сил:

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (1.127)$$

Точка C_2 прикладення цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій C_1A_3 .

Таким же чином поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил.

Вона буде прикладена в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot \quad (1.128)$$

Повернемо вектори заданих сил навколо їх точок прикладання в один бік на один і той самий кут і знову знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 . Але, як бачимо з рис. 1.163, а також з рівняння (1.126), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій A_1A_2 , не зміняться. Змінюється лише напрям, який буде паралельним новому напрямку повернутих векторів. І рівнодійна \bar{R} у такому випадку не змінює ні свого модуля, ні точки прикладання C . Змінюється лише напрям її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди збігається з точкою C , положення якої відносно положень точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення під час повороту усіх векторів сил на однаковий кут в один і той самий бік.

1.11.2. Координати центра паралельних сил

Допустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних векторів сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до вектора рівнодійної сили \bar{R} , прикладеної у точці C (рис. 1.164). Виберемо прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y, z .

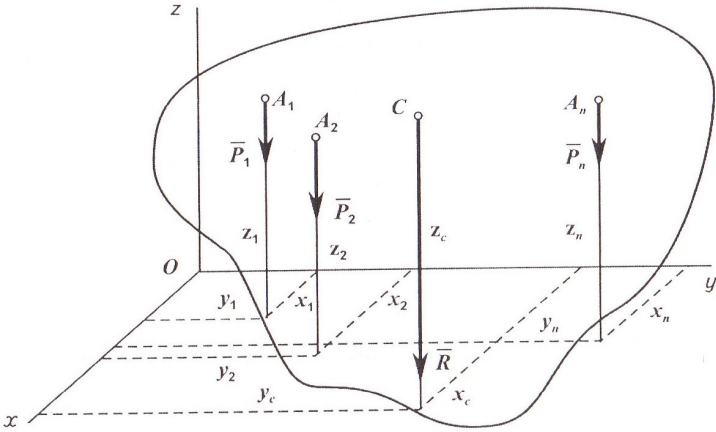


Рис. 1.164

Позначимо у прийнятій системі відліку координати точок прикладання сил $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ і точки прикладання рівнодійної $\bar{R} - C(x_C, y_C, z_C)$.

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k$, то за теоремою Варіньйона для осі запишемо:

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

$$R \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.129)$$

Звідки координата центра ваги:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.130)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x :

$$-R \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k) \quad (1.131)$$

і друга координата
$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.132)$$

Далі повернемо всі сили на один і той самий кут в один бік (наприклад, на 90° , перпендикулярно до площини yOz).

Положення точки C , як відомо, під час повороту усіх сил на однаковий кут, в один і той самий бік не змінюється. Тепер обчислимо моменти усіх сил відносно осі y :

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.133)$$

третя координата

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.134)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для *координат центра паралельних сил*:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.135)$$

1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільне тіло, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрям і називається силою ваги (рис. 1.165).

Вважаємо радіус Землі достатньо великим (приблизно 6,4 тис. км). Тоді для тіл, розміри яких є малими порівняно з цим радіусом, вектори сили ваги окремих частинок малих тіл можна

вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

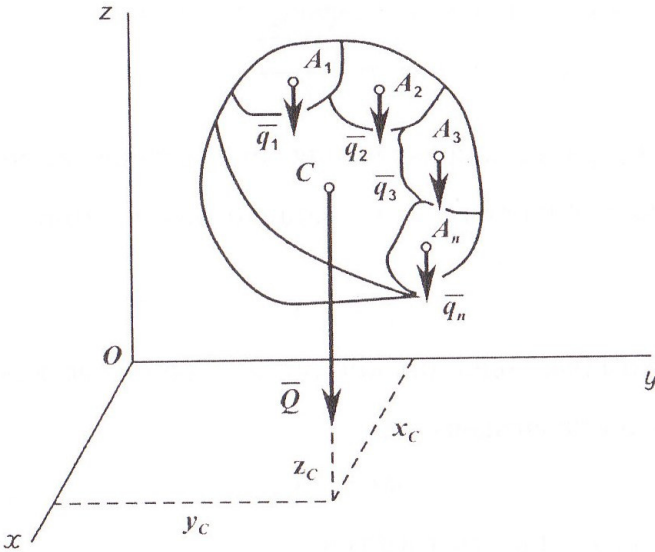


Рис. 1.165

Для визначення положення центра ваги умовно поділимо тіло на багато частинок.

Кожна частинка має свою силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$. Як легко побачити, це є система паралельних сил, рівнодійну якої \bar{Q} можна визначити, використовуючи вираз (1.128):

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k \quad (1.136)$$

За будь-якого повороту тіла сили \bar{q}_k залишаються прикладеними до тих самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрям цих сил відносно тіла. А тому рівнодійна \bar{Q} буде під час довільного повороту тіла

прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, **центр ваги тіла** – це геометрична **точка**, яка незмінно зв'язана з цим тілом, до якої прикладена сила ваги тіла і яка не змінює свого положення за довільного повороту тіла.

Визначимо **координати центра ваги** як центра паралельних сил $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ на підставі виразів (1.135):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}; \quad (1.137)$$

де x_k, y_k і z_k – координати прикладання сили ваги частинок тіла \bar{q}_k .

Розглянемо об'єм. Якщо тіло однорідне, то вага кожної частини пропорційна її об'єму:

$$q_k = \gamma \cdot V_k, \quad (1.138)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); V_k – об'єм частинки тіла.

Вага усього тіла

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.139)$$

де V – об'єм тіла; γ – питома вага тіла.

Тепер підставимо вирази (1.138) і (1.139) у вираз (1.137). До того ж питома вага γ , як загальний множник, скорочується.

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma(V_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{V} \quad (1.140)$$

Аналогічно поводимось і під час визначення двох інших координат.

Тепер розглянемо пластину (рис. 1.166), товщина якої h відносно мала, тоді координата центра її ваги $z_C = \frac{h}{2}$.

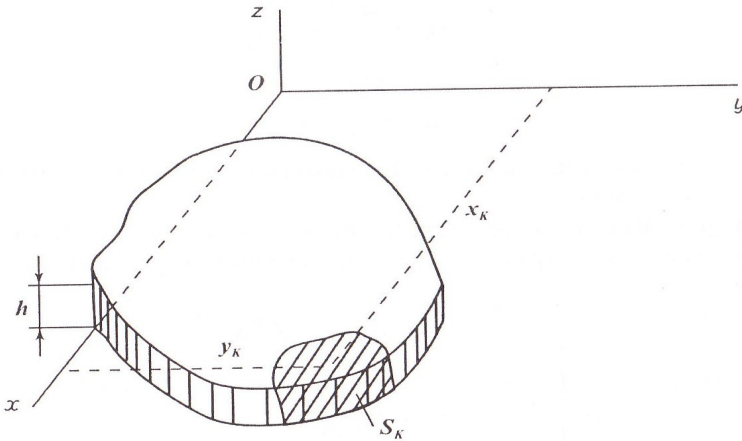


Рис. 1.166

Для визначення двох інших координат x_C, y_C використаємо вирази (1.137).

Пластину треба уявити у вигляді декількох частинок, які мають власну вагу.

Далі вважаємо, що вага кожної частинки пластини

$$q_k = \gamma \cdot v_k = \gamma \cdot h \cdot s_k, \quad (1.141)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); h – товщина пластини; s_k – площа кожної частинки пластини. Вага всієї пластини:

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot S, \quad (1.142)$$

де S – площа пластини.

Тепер підставимо вирази (1.141) і (1.142) у перші два вирази (1.137). Зробимо це спочатку для координати x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h (s_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}. \quad (1.143)$$

Аналогічно обчислимо значення і другої координати y_C .

Остаточно матимемо **координати центра ваги тонкої пластини**:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}. \quad (1.144)$$

Точка C , координати якої визначаються формулами (1.144), має назву центра ваги площі.

Далі визначимо координати центра ваги лінії (рис. 1.167). Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу.

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частки лінії і вагу всієї лінії. Вага частки лінії:

$$q_k = \gamma \cdot v_k = \gamma \cdot S \cdot l_k, \quad (1.145)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); S – площа поперечного перерізу лінії; l_k – довжина частки лінії.

Вага всієї лінії:

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot L, \quad (1.146)$$

де L – загальна довжина лінії.

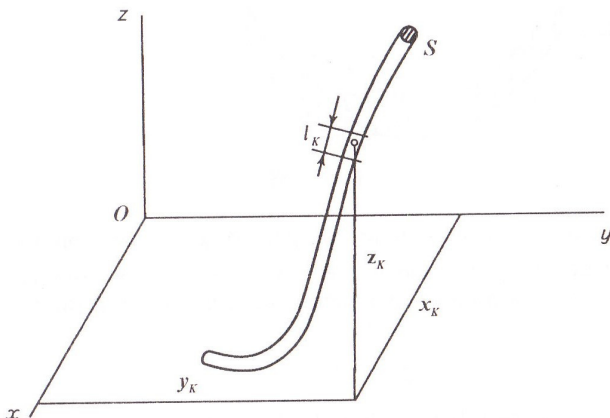


Рис. 1.167

Тепер підставимо значення виразів (1.145) і (1.146) у вираз (1.138) і визначимо спочатку координату x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S (l_k x_k)}{\gamma S \cdot L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}. \quad (1.147)$$

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії.

1.11.4. Визначення координат центра ваги тіла в інтегральній формі

Досі визначалися координати центра ваги однорідних тіл, в яких питома вага γ є величиною сталою ($\gamma = const$). Тепер визначимо координати центра ваги неоднорідного твердого тіла.

Уявимо неоднорідне тіло довільної форми. Розіб'ємо його на n елементів і виділимо із них один k -й елемент. Позначимо його вагу через $\Delta\bar{q}_k$, позначимо координати центра ваги k -го елемента: x_k, y_k і z_k .

Точка прикладання вектора сили $\Delta\bar{q}_k$ розташована всередині елемента.

Для точного визначення точок прикладання цих сил потрібно, щоб об'єм кожного елемента n прямував до нуля, а кількість елементів необмежено зростала, тобто, $n \rightarrow \infty$. Тому необхідно, щоб суми розглядались як границі або інтегральні суми:

$$x_C = \frac{\int x dq}{Q}, \quad y_C = \frac{\int y dq}{Q}, \quad z_C = \frac{\int z dq}{Q}. \quad (1.148)$$

Аналогічно можна визначити координати центра ваги в інтегральній формі об'єму, площі, лінії.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?

1.11.5. Способи визначення координат центра ваги тіла

У механіці застосовують декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи. Розглянемо послідовно ці способи.

Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, на осі симетрії або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіпеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для кожної з яких положення центра ваги легко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.137), (1.144), (1.47) і (1.148). Причому кількість доданків у чисельнику кожного із зазначених виразів дорівнюватиме кількості часток, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад 1.40

Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в міліметрах задані на рис. 1.168.

Оберемо осі координат x і y . Потрібно розбити пластину на окремі прямокутні частинки. Для кожного прямокутника проведемо діагоналі, точки перетину яких C_1, C_2

і C_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок (см): $c_1(-1, 1)$, $c_2(1, 5)$, $c_3(5, 9)$.

Площі кожного тіла дорівнюють, відповідно: $s_1 = 4 \text{ см}^2$; $s_2 = 20 \text{ см}^2$; $s_3 = 12 \text{ см}^2$.

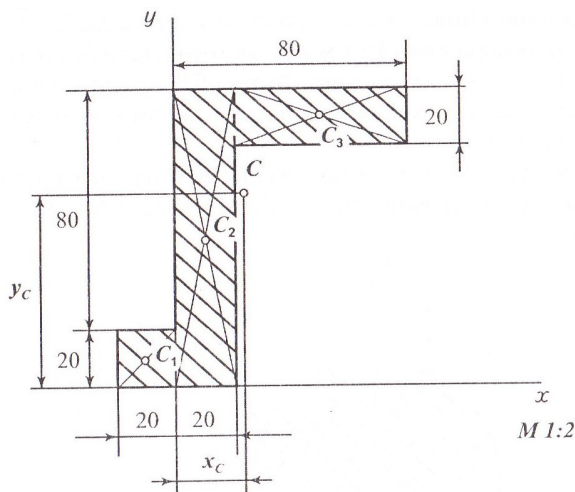


Рис. 1.168

Площа всієї пластини $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.144). Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку $C(2,1; 5,9)$ на рис. 1.168.

Отже, *центр ваги* пластини, як *геометрична точка*, розміщений в конкретному випадку за межами цієї пластини.

Метод доповнення

Спосіб, про який йдеться далі, є частковим випадком способу розбиття площі тіла. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому для всього тіла без урахування вирізу або вирізаної частини тіла положення центра ваги відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад 1.41

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий отвір радіуса r (рис. 1.169). Відстань між точками C_1 і C_2 дорівнює a .

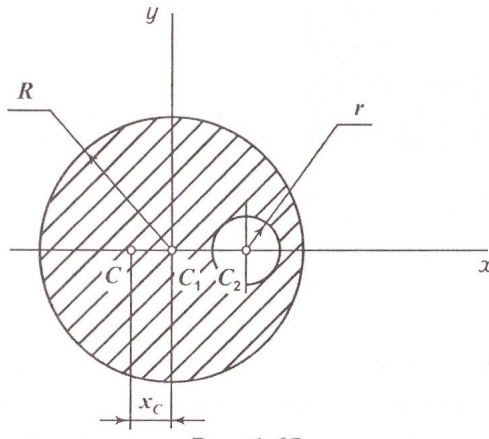


Рис. 1.169

Розв'язання

Як можна побачити з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка з'єднує точки C_1 і C_2 .

Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_C , оскільки друга координата y_C дорівнює нулю. Покажемо осі координат x, y .

Прийmemo, що пластинка складається з двох тіл – з повного круга (без урахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом, площа якого віднімається.

У прийнятій системі координати x для центрів вказаних тіл дорівнюватимуть: $x_1 = 0$; $x_2 = C_1C_2 = a$.

Площі тіл $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$. Загальна площа всього тіла дорівнюватиме фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме: $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.145). Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Оскільки значення координати x_C від'ємне, а друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки C_1 .

Експериментальні способи

Ці способи знайшли широке застосування під час відшукування положення центра ваги тіл складної форми і конфігурації, для яких інші способи майже непридатні внаслідок громіздкості та складності. До таких тіл, в першу чергу, належать автомобілі, комбайни, трактори, складні сільськогосподарські машини та знаряддя.

У разі застосування експериментальних способів відшукування положення центра ваги найбільш широко використовують методи підвішування та зважування тіл.

У разі застосування методу підвішування тіло на тросі підвішують за різні його точки. Напрямок троса позначатиме кожного разу напрям вектора сили ваги тіла. Тоді точка перетину цих напрямів і визначає положення центра ваги тіла. Цей метод зручно використовувати для плоских тіл.

Використання другого методу – зважування – вимагає вимірювання ваги всього тіла, а також окремих його частин. Розглянемо приклад застосування цього методу (рис. 1.170).

Приклад 1.42

Визначимо повздовжню координату центра ваги трактора, у якого повздовжня база становить l .

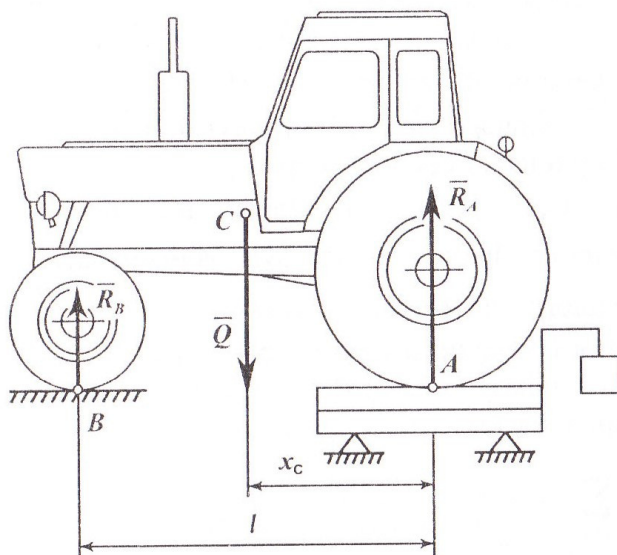


Рис. 1.170

Спочатку поставимо на платформу терезів задні колеса трактора, як це показано на рис. 1.170. Визначимо силу тиску задніх коліс на платформу або реакцію платформи \bar{R}_A . Аналогічно визначимо вагу переднього мосту або реакцію ґрунту \bar{R}_B . Цілком зрозуміло, що сума цих реакцій дорівнює загальній вазі трактора: $Q = R_A + R_B$.

Тепер складемо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A і прирівняємо її до нуля:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -R_B \cdot l + Q \cdot x_C = 0.$$

Звідси визначаємо поздовжню координату центра ваги:

$$x_C = \frac{R_B l}{Q}.$$

Для визначення поперечної координати центра ваги трактора необхідно знати реакції лівих коліс (переднього і заднього) і правих, а також поперечну базу трактора. Далі за аналогічним виразом визначають поперечну координату центра ваги трактора.

1.11.6. Центри ваги деяких однорідних тіл

Визначимо далі координати центрів ваги деяких простих однорідних тіл.

Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.171).

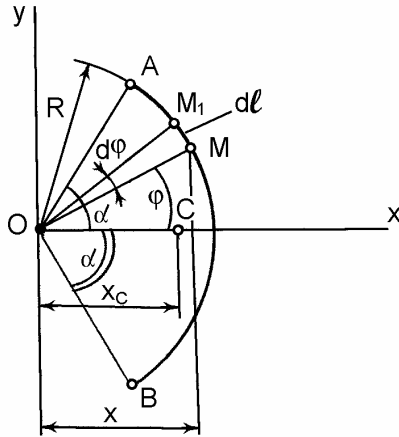


Рис. 1.171

Покажемо осі координат x, y , початок яких розмістимо у точці O . Оскільки дуга має вісь симетрії Ox , то центр її ваги буде розміщений саме на цій осі ($y_C = 0$).

Залишається обчислити тільки координату x_C . Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (1.147), замінивши вагу Q на довжину лінії L :

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl. \quad (1.149)$$

Визначимо складові, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі AB елемент MM_1 довжиною dl :

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.150)$$

Якщо кут φ визначає положення елемента MM_1 на дузі AB , то координата x цього елемента MM_1 дорівнюватиме:

$$x = R \cos \varphi. \quad (1.151)$$

Загальна довжина дуги AB :

$$L = 2\alpha \cdot R. \quad (1.152)$$

Підставимо значення (1.151) і (1.152) у рівняння виразу (1.150). вважають, що інтеграл у чисельнику цього виразу має бути визначеним по всій довжині дуги:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L} \int_A^B x \, dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[\sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, координата центра ваги дуги:

$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.153)$$

Центр ваги трикутника

Уявимо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат $Ox y$ відповідають точкам із координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 1.172).

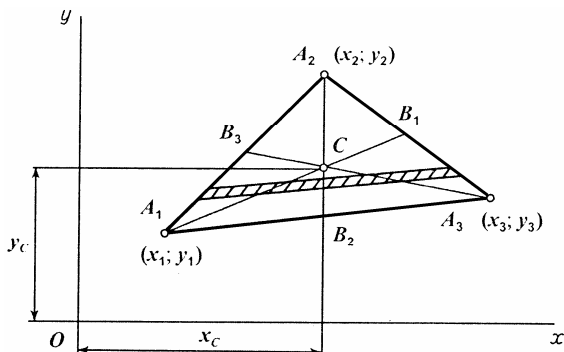


Рис. 1.172

Якщо провести достатню кількість прямих, паралельних основі A_1A_3 , то вся площа трикутника складатиметься із смуг нескінченно малої ширини, тобто, ліній, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника знаходитиметься на його медіані.

А якщо провести лінії, паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника C буде розташований у точці перетину його медіан.

Визначимо аналітично координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями:

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad (1.154)$$

де x_1, x_2, \dots, y_3 – координати вершин трикутника.

Центр ваги сектора

Розглянемо коловий сектор OAB радіуса R , центральний кут якого дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.173).

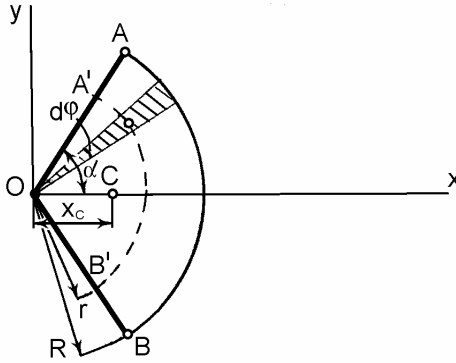


Рис. 1.173

Центр ваги сектора розміщується на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута AOB .

Прийнемо її за вісь x і знайдемо на цій осі положення центра C .

Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велику кількість елементарних секторів із центральними кутами $\Delta\varphi$. Розглядатимемо кожний сектор як трикутник з основою $R \cdot \Delta\varphi$ і висотою R .

Центр ваги кожного трикутника знаходиться на відстані $r = \frac{2}{3}R$ від центра сектора.

Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі $A'B'$.

Отже, якщо спрямувати кут до нуля $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то центри ваги утворять дугу $A'B'$, на якій розміщений центр ваги сектора, і тоді залишається тільки знайти центр ваги дуги $A'B'$.

Використаємо формулу, за якою визначається центр ваги

дути кола радіусом r :

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}, r = \frac{2}{3} R, x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.155)$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
2. Як визначити координати центра ваги дути кола?
3. Як визначити координати центра ваги трикутника?
4. Як визначити координати центра ваги сектора?
5. Що таке метод симетрії і як ним користуються?
6. Що ви знаєте про методику застосування способу розбиття тіла на частки?
7. Як і в яких випадках використовують метод підвішування плоских тіл?
8. Як визначають координати центра ваги складних машин?
9. На перетині яких прямих ліній розміщений центр ваги трикутника?
10. Чому дорівнює відстань від центра ваги трикутника до вершини?

РОЗДІЛ II

КІНЕМАТИКА

2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки

2.1.1. Предмет кінематики

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл, як геометричних образів (матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, матеріальна система) з геометричної точки зору, без урахування причин, що викликають цей рух. Тобто, *вивчаються геометричні властивості механічного руху* незалежно від фізичних факторів, що спричиняють ці рухи. Такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик: маси і моменту інерції, сили і моменту сили.

Кінематика спирається на основні положення геометрії, які визначають просторові співвідношення, необхідні під час вивчення механічного руху. На відміну від геометрії тут береться до уваги ще і час руху, оскільки *механічний рух відбувається у просторі і часі* як об'єктивно реальних формах існування матерії. Отже, вивчаються залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії, – одним із наслідків взаємодії матеріальних тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Тільки на початку ХХ ст. створюється нова система просторово-часових відношень, яка базується на постулатах теорії відносності Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна і встановлює

більш точний взаємозв'язок матеріальних об'єктів, що рухаються, з простором і часом.

Вперше чітко сформульовано ідею суто геометричного дослідження руху твердого тіла у творі Л. Ейлера «Теорія руху твердого тіла» (1775 р.). Деяко пізніше Г. Монж і Л. Карно вказують на необхідність виділити із механіки в окремий розділ вчення про геометричний рух у зв'язку з дослідженням кінематики машин. Цими ідеями скористувався А. Ампер, коли у праці «Дослід по філософії наук» (1834) запропонував термін «Кінематика», а вже в 1837 р. Ж. Понселе вперше створив курс кінематики і дванадцять років читав його у Паризькому університеті.

Згідно з основами класичної механіки, сформульованими І. Ньютоном, *простір*, в якому відбувається рух геометричних моделей у формі перелічених матеріальних об'єктів, *вважається абсолютним*, метричні особливості його незалежні від руху матерії у різних точках і напрямках (*однорідність і ізотропність простору*).

За цими уявленнями простір і час, у якому відбувається рух, як би формально відокремлений від властивостей матерії. Метричні властивості цього простору повністю описуються системою аксіом Евкліда, де, наприклад, відстані між двома точками простору завжди визначено у вигляді довжини відрізка прямої.

Такий *простір* сприймається як *тривимірний*, тобто, у відповідній системі відліку *кожній точці* абсолютного простору відповідають *три координати*. Одиницею вимірювання простору у Міжнародній системі одиниць СІ є *метр* (м).

Властивості *абсолютного часу* – *однорідність і універсальність*. Час однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Вимір часу базується на відповідності між послідовними моментами часу і множиною дійсних чисел. Тому можна довільно вибирати початок відліку часу і вимірювати інтервали між окремими моментами часу. Одиницею

вимірювання часу є *секунда (с)*.

За абсолютним простором і часом вводиться поняття *системи відліку*. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку і пристроєм із періодичним процесом для вимірювання часу (годинник). Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

Хоча теорія відносності має інші уявлення про простір і час, ніж класична механіка, проте, для випадків звичайних рухів тривимірний евклідів простір і універсальний час є досить точним відображенням реального часу і простору.

У множині систем відліку, в яких можна вважати простір і час як абсолютні, вибираються так звані *інерціальні* системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку є інерціальною із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної системи поступально, рівномірно та прямолінійно.

Під час розв'язування задач небесної механіки, обчислення траєкторій супутників приймається *геліоцентрична система відліку* з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на «нерухомі» зірки. У разі розв'язування багатьох технічних задач за інерціальну приймають *геоцентричну систему* відліку, яка пов'язана з центром Землі.

Рух тіла або закон руху тіла відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити положення цього тіла відносно даної системи у будь-який момент часу. При цьому розрізняють момент часу і проміжок часу. *Проміжок часу* – це перебіг часу між двома фізичними явищами. *Момент часу* – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її *рух* –

кінематичними рівняннями, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

Основна задача кінематики полягає у тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху, що визначають закон руху даного геометричного образу, *знайти кінематичні характеристики цього руху*: траєкторії різних точок, їхні лінійні швидкості і прискорення; кутові швидкості і кутові прискорення тіла.

Очевидно, що рух геометричного образу щодо прийнятої системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього образу відносно цієї самої системи відліку. Тому вивченню руху будь-якого геометричного образу передує вивчення руху однієї його точки, зумовлюючи поділення кінематики на два розділи: кінематику точки і кінематику твердого тіла.

2.1.2. Основні положення кінематики точки

Обмежимося спочатку вивченням руху точки відносно нерухомої системи координат. **Законом руху** матеріальної точки називають спосіб її переходу з одного положення у просторі і часі в інше положення. Введемо поняття переміщення і руху точки.

Під *переміщенням точки* розуміють перехід із одного положення у просторі в друге за визначений елементарний проміжок часу. Тобто, переміщення точки повністю визначається початковим і кінцевим положеннями і елементарним проміжком часу Δt .

Під *рухом точки* розуміють перехід із одного (початкового) положення у просторі в друге (кінцеве) деяким способом у певній залежності від часу.

Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає *рівняння руху точки*. Основними кінематичними *характеристиками руху точки* є її *положення*,

швидкість і прискорення.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способу задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з цього, знаходження методів визначення її кінематичних характеристик.

Задати рух кінематично або задати закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

2.1.3. Способи задання руху точки.

Векторний спосіб

У відповідності до основної задачі кінематики точки розглянемо способи задання руху точки у просторі: векторний, координатний і натуральний.

Векторний спосіб знайшов широке застосування у теоретичних дослідженнях.

Розглянемо суть цього способу.

Допустимо, що довільна матеріальна точка M рухається у просторі за деякою кривою AB , яку називають траєкторією (рис. 2.1).

Візьмемо у просторі довільну нерухому точку O і проведемо до рухомої точки M радіус-вектор \vec{r} , який однозначно визначає положення точки.

Під час руху точки M її радіус-вектор \vec{r} змінюється за величиною (модулем) та напрямом, тобто, кожному моменту часу відповідає свій радіус-вектор. Моменту часу t_1 відповідає радіус-вектор \vec{r}_1 точки M_1 .

Таким чином, якщо задається закон зміни радіуса-вектора \vec{r} рухомої точки M у функції часу, то вважається заданим закон руху матеріальної точки *векторним способом*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

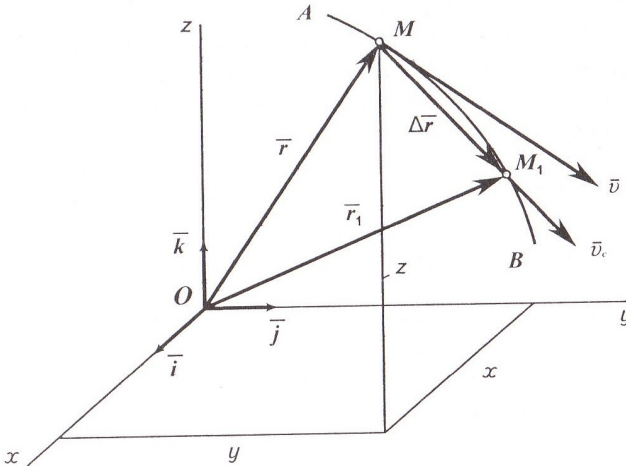


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1) називається **кінематичним рівнянням руху** матеріальної точки у векторній формі і визначає положення точки у просторі в будь-який момент часу. Одночасно цей вираз можна розглядати як **рівняння траєкторії** точки або **рівняння просторової кривої** у векторній формі. Функція $\vec{r}(t)$ повинна бути монотонною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою функцією часу.

Траєкторія точки і годограф векторної функції

Траєкторією точки називається **геометричне місце положень** точки під час руху в заданій системі відліку.

Введемо поняття годографа векторної функції $\vec{r}(t)$ (2.1) по скалярному аргументу t (час). Це крива, яка викреслюється кінцем радіуса-вектора \vec{r} у разі неперервного зміння аргументу t за умови, якщо початки цих векторів поєднані у

фіксованій нерухомій точці O (рис. 2.1).

Тобто, годограф описують кінці векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, які відповідають конкретним положенням точки M у процесі руху. Це стосується не тільки радіусів-векторів, а й векторів швидкостей, прискорень тощо. У такому разі годограф збігається з траєкторією точки AB . Щоб знайти рівняння годографа в параметричному вигляді, досить знайти проєкції радіуса-вектора \vec{r} на ортогональні осі координат $Oxyz$ (рис. 2.1), розклавши його за ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}. \quad (2.2)$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2.3)$$

Рівності (2.3) є **скалярними рівняннями годографа векторної функції $\vec{r}(t)$ в параметричній формі**.

Як відомо із векторної алгебри, похідна $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ від векторної функції $\vec{r}(t)$ є вектором, напрямленим за дотичною до годографа. За фізичним змістом **похідна** векторної функції $\vec{r}(t)$ визначає змінення вектора \vec{r} за часом і напрямлена за **дотичною до годографа** цієї функції.

Швидкість точки

Швидкість точки – це фізична векторна величина, яка характеризує міру змінення з часом радіуса-вектора точки у просторі за модулем і напрямом.

Одиницею швидкості у Міжнародній системі одиниць СІ є $[м/с]$.

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки M за довільною траєкторією (рис. 2.1).

За деякий елементарний проміжок часу Δt точка переміщується із положення M у положення M_1 , яке характеризується радіусом-вектором \vec{r}_1 . Для того, щоб визначити *переміщення* точки M за проміжок часу Δt , з'єднаємо точки M і M_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta \vec{r}$, який є геометричною різницею між векторами \vec{r}_1 і \vec{r} . Тоді середня наближена швидкість точки M за елементарний проміжок часу Δt (згідно з визначенням):

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

За напрямком вектор середньої швидкості \bar{v}_c збігається з вектором $\Delta \vec{r}$, тобто він розміщений вздовж хорди MM_1 і спрямований у бік руху точки M , що відповідає зростанню часу t .

Якщо перейти до границі $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсну швидкість точки M у будь-який момент часу t :

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

За векторного способу задання руху швидкість матеріальної точки дорівнює першій похідній від радіуса-вектора за часом у заданій системі відліку.

Якщо наближати точку M_1 до M , коли $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсний напрям вектора швидкості \bar{v} точки – за дотичною до траєкторії (годографа) і спрямований у бік її руху.

Прискорення точки

Прискорення точки в інерціальній системі відліку – це векторна величина, яка характеризує міру змінення модуля і напрямку вектора швидкості з часом у заданій системі відліку.

Одиницею прискорення точки у системі СІ є 1 м/с^2 .

Визначимо прискорення матеріальної точки M . Розглянемо рух точки за довільною траєкторією AB (рис. 2.2).

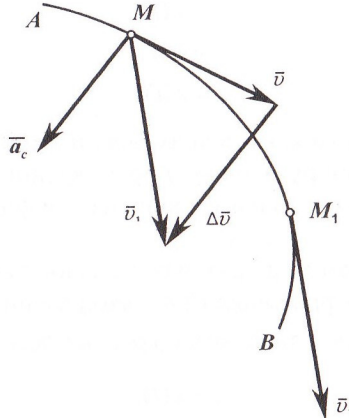


Рис. 2.2

У положенні M швидкість точки була \bar{v} , а у близькому положенні $M_1 - \bar{v}_1$.

Знайдемо приріст швидкості за даний проміжок часу. Для цього перенесемо паралельно вектор швидкості \bar{v}_1 у положення M .

З'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta \bar{v}$. Відношення приросту $\Delta \bar{v}$ до проміжку часу Δt є середнім прискоренням рухомої матеріальної точки M :

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Для отримання дійсного прискорення матеріальної точки в даний момент часу необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу, а для виразу (2.5) здійснити перехід до границі $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.6)$$

Підставимо у вираз (2.6) значення швидкості точки (2.4)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (2.7)$$

За векторного способу задання руху матеріальної точки **прискорення** дорівнює **першій похідній від вектора швидкості** за часом або **другій похідній від радіуса-вектора рухомої точки** у заданій системі відліку.

Оскільки прискорення дорівнює похідній за часом від швидкості, то вектор прискорення \bar{a} матеріальної точки спрямований за дотичною до годографа векторної функції $\bar{v}(t)$.

2.1.4. Координатний спосіб задання руху точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовують під час аналітичного розв'язування задач у технічних розрахунках.

Якщо вибрати у просторі нерухому ортогональну систему декартових координат $Oxyz$, то під час руху точки M всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 2.1).

Необхідно задати координати як функції часу, однозначні, неперервні і, принаймні, двічі диференційовані:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє скалярний аргумент часу t , є **кінематичними рівняннями руху** точки в ортогональній системі декартових координат (або **законом руху** точки у координатній формі) і визначають суть цього способу.

Одночасно ці рівняння визначають зміну з часом

просторового положення точки і є рівняннями траєкторії точки у параметричній формі.

Для одержання рівняння траєкторії в явній формі треба виключити з цих рівнянь час t .

Слід зауважити, якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині xOy , то рівняння (2.8) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t).\tag{2.10}$$

Зв'язок між векторним і координатним способами має вигляд (2.2):

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Крім декартової системи в механіці використовують сферичну, циліндричну, полярну і інші системи координат.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за такого способу задання її руху.

Траєкторія точки

Рівняння (2.8) і (2.9) є рівняннями траєкторії матеріальної точки у параметричній формі, де роль параметра відіграє час t .

Для знаходження *рівняння траєкторії* у координатній формі необхідно **виключити** з рівнянь руху *параметр часу t* . Це можна зробити декількома способами: підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату і почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Наприклад, розв'язуючи останнє рівняння системи (2.8)

відносно параметра часу t і підставляючи це співвідношення у два перші рівняння, дістанемо:

$$t = \varphi(z); \Rightarrow x = x[\varphi(z)]; \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (2.11)$$

Останні два рівняння визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь, що проєктують траєкторію на координатні площини xOz і yOz .

Приклад 2.1

Рух матеріальної точки здійснюється у площині xOy і заданий рівняннями:

$$x = 2t \text{ м}, \quad y = 12t^2 \text{ м}.$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним із двох способів:

- а) задати різні моменти часу і зобразити координати точки x, y на графіку;
- б) виключити час t із заданих рівнянь руху.

Так, з першого рівняння визначаємо час $t = \frac{x}{2}$. і підставляємо у друге рівняння:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з віссю симетрії Oy і з вершиною на початку координат.

Приклад 2.2

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:

$$x = 3 \sin t \text{ см}, \quad y = 3 \cos t \text{ см}, \quad \text{де } t - \text{в секундах.}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо

видлучити час t з рівнянь руху.

Перетворимо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{y}{3}.$$

Піднесемо до квадрату і додамо почленно ліві і праві частини цих виразів:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, траєкторією руху матеріальної точки є коло радіусом $R=3$ см з центром у початку координат.

Швидкість точки

Для визначення швидкості матеріальної точки за координатного способу задання скористаємось основними положеннями векторного способу.

З цією метою підставимо вираз (2.2) у вираз (2.4):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.12)$$

Розкладаючи вектор швидкості \bar{v} по осях прийнятої ортогональної системи декартових координат $Oxyz$:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}, \quad (2.13)$$

і порівнюючи вирази (2.12) і (2.13), отримуємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2.14)$$

Проекції вектора швидкості матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють першим похідним від функцій відповідних координат за часом.

Модуль вектора швидкості \bar{v} матеріальної точки визначається геометричною сумою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.15)$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається напрямними косинусами кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат. Напрямні косинуси – це проекції ортів на відповідні осі координат.

$$\cos(\bar{i}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{j}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{k}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_z}{v}. \quad (2.16)$$

Рівності (2.14), (2.15), (2.16) визначають вектор швидкості точки за координатним способом опису її руху.

Прискорення точки

Для визначення прискорення матеріальної точки за координатного способу поведимося аналогічно, як для швидкості руху. Значення радіуса-вектора \bar{r} (2.2) підставимо у вираз (2.7) і визначимо другу похідну за часом:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}]}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (2.17)$$

Вектор прискорення \bar{a} можна розкласти по ортах ортогональної системи координат $Oxyz$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (2.18)$$

Якщо порівняти вирази (2.17) і (2.18), то можна написати такі співвідношення:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (2.19)$$

Проекції вектора прискорення матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють другим похідним функцій відповідних координат рухомої точки або першим похідним проекцій швидкостей за часом.

Модуль вектора прискорення матеріальної точки визначається геометричною сумою проекцій:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.20)$$

Напрямок вектора прискорення \bar{a} визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\hat{i}, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\hat{j}, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\hat{k}, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.21)$$

Таким чином, за координатного способу задання руху матеріальної точки вектор прискорення \bar{a} визначається за допомогою рівностей (2.19), (2.20) і (2.21).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає кінематика? Які незалежні змінні в кінематиці?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи задання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?
5. Яка залежність між радіусом-вектором точки і її координатами? Що таке годограф векторної функції?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?
7. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за векторного способу задання руху?
8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за координатного способу задання руху?
9. Як визначити рівняння годографа?
10. Як визначити рівняння траєкторії точки за координатного способу?

2.1.5. Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральний спосіб застосовують, коли попередньо відома траєкторія точки. Тоді положення точки у просторі визначиться заданням таких елементів (рис. 2.3):

– просторова або плоска крива AB , яка може бути задана рівнянням, графічно чи з вказівкою, наприклад: точка рухається вздовж кола радіусом R ;

– початок відліку O дугової координати s на траєкторії руху з вказівкою напрямів додатних (+) і від'ємних (-) значень. Крім того, приймають початковий момент відліку часу $t_0 = 0$;

– закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії як функцію дугової координати від часу:

$$s = s(t). \quad (2.22)$$

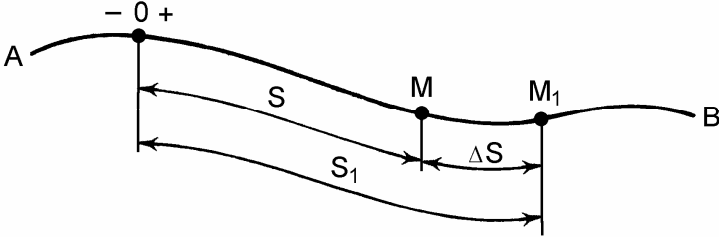


Рис. 2.3

Функція закону руху має бути однозначною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою.

Співвідношення (2.22) називається **кінематичним рівнянням** руху матеріальної точки **у натуральній формі** (або законом зміни дугової координати). Дугова координата s у рівнянні (2.22) визначає положення точки на траєкторії точки. Дугову координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу: напрям шляху може бути як у бік відліку додатних, так і у бік відліку від'ємних дугових координат. Шлях є монотонно зростаючою функцією часу.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за натурального способу задання її руху.

Швидкість точки

Розглянемо схему руху матеріальної точки M (рис.2.3). Положення точки M відповідає моменту часу t , а положення M_1 – моменту часу t_1 . Тоді елементарному проміжку часу $t_1 - t = \Delta t$ відповідає елементарна зміна дугової координати

$$s_1 - s = \Delta s.$$

Звідси можна визначити середню швидкість точки за елементарний проміжок часу Δt :

$$v_c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Дійсну швидкість точки в момент часу t можна визначити, якщо перейти до границі, коли елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2.23)$$

Модуль швидкості матеріальної точки за натурального способу задання її руху дорівнює **першій похідній** за часом від закону руху точки вздовж траєкторії.

Напрямок вектора швидкості – за дотичною до траєкторії матеріальної точки.

Похідна за часом визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості: якщо модуль швидкості додатний ($v = \dot{s} > 0$), то вектор швидкості спрямований у додатному напрямі відліку дугової координати, а якщо $v = \dot{s} < 0$, то – протилежно.

Приклад 2.3

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням $s = 4t^2 + t$ м. Визначити переміщення і швидкість руху точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання

Визначимо спочатку положення точки на траєкторії руху якщо $t_1 = 1$ с. Відлік часу почався з початком моменту руху $s(0) = 0$. Підставимо у рівняння руху значення заданого моменту часу:

$$s = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості руху точки візьмемо похідну за часом від рівняння руху:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \Rightarrow v(1) = 8 \cdot 1 + 1 = 9 \text{ м/с.}$$

2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами

Для переходу від одного способу завдання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів. На підставі виразу (2.22) можна записати

$$ds = v \cdot dt \Rightarrow s = \int_0^t v dt. \quad (2.24)$$

Оскільки за координатного способу завдання руху матеріальної точки її швидкість визначається згідно з виразом (2.14): $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, то, підставляючи його у попередній вираз, остаточно знайдемо залежність між дуговою координатою і проекціями швидкості на декартові осі координат:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (2.25)$$

2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які необхідні для подальшого визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки натуральним способом.

Побудуємо рухомий координатний базис $M\tau nb$ –

натуральний тригранник. Припустимо, що крива AB є траєкторією точки M (рис. 2.4).

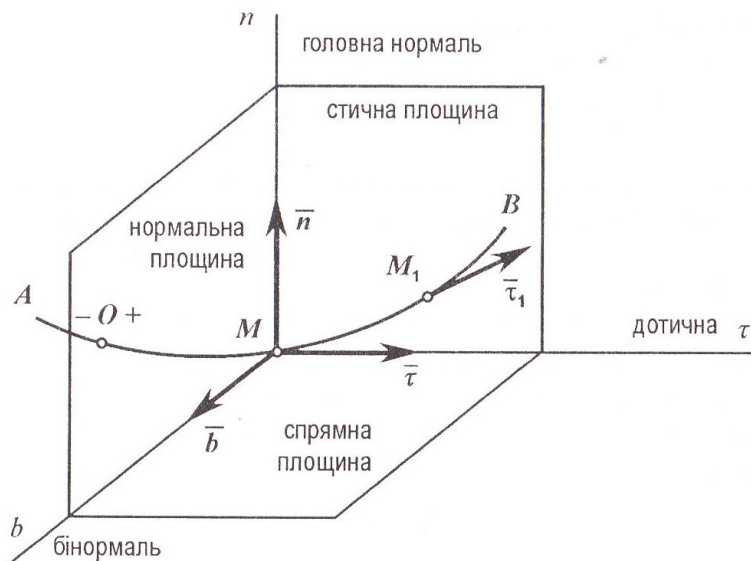


Рис. 2.4

Крізь довільну точку M і нескінченно наближену до неї точку M_1 проведемо дотичні до траєкторії. Орти, які відповідні цим дотичним, позначимо через $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$. Потім перенесемо вектор $\bar{\tau}_1$ паралельно самому собі у точку M і проведемо через вектори $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ площину.

*Граничне положення площини, проведеної крізь дотичні двох близьких точок, якщо проміжок часу прямує до нуля, а точка M_1 наближається до точки M , називається **стичною площиною**.*

Крізь точку M проведемо площину, перпендикулярну до дотичної $\bar{\tau}$, яка називається **нормальною площиною**.

*Лінія перетину нормальної і стичної площин визначає **головну нормаль кривої**.*

Отже, **головна нормаль** – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці M , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називається **спрямною**.

*Лінія перетину спрямної і нормальної площин визначає **бінормаль кривої**.*

Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести **дотичну** у бік зростання дугової координати (орт $\bar{\tau}$), **головну нормаль** – у бік угнутості кривої (орт \bar{n}), **бінормаль** з відповідним ортом \bar{b} , спрямовану так, що орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} утворюють праву ортогональну трійку векторів.

*Ортогональна система координатних осей з ортами $\bar{\tau}$, \bar{n} і \bar{b} , з початком у рухомій точці M називається **натуральним координатним базисом** або **натуральним рухомим тригранником $M\tau nb$** .*

Зауважимо, що плоска крива розміщена у стичній площині, а головна нормаль є нормаллю до кривої у цій площині.

На відміну від інших систем відліку, натуральний триєдр рухається разом із точкою і змінює свою орієнтацію у просторі відповідно до характеру траєкторії.

2.1.8. Кривина кривої

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривини траєкторії, тому

розглянемо цю характеристику кривої.

На рис. 2.5 зображена траєкторія AB точки і два близькі положення точок M і M_1 .

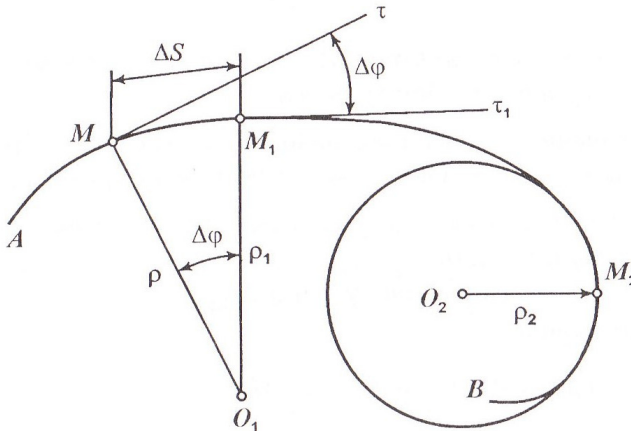


Рис. 2.5

Проведемо крізь точки M і M_1 дотичні τ і τ_1 . Елементарна відстань між цими точками вдовж траєкторії дорівнює Δs .

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними у двох близьких точках називається кутом суміжності.

Кривиною кривої k у даній точці M називається границя відношення кута суміжності до дуги Δs , яка його стягує, якщо ця дуга прямує до нуля.

Відношення $\Delta\varphi$ до Δs є середньою кривиною:

$$k_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

а зведення k_c до границі дає дійсне значення кривини кривої:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.26)$$

Розглянемо коло радіусом R . Зробимо аналогічну геометричну побудову.

Виразимо Δs за відомою формулою $\Delta s = R \cdot \Delta \varphi$, або $ds = R \cdot d\varphi$ і підставимо у вираз (2.26):

$$k = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \cdot \Delta \varphi} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow k = \frac{1}{R}. \quad (2.27)$$

Коло є кривою сталої кривини, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.

Для визначення кривини довільної кривої в даній точці досить **підібрати коло кривини**, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці.

Радіус кола кривини є радіусом кривини кривої, а центр кола – центром кривини.

На рис. 2.5 позначені такі геометричні характеристики кривої:

ρ_2 – радіус кривини кривої у точці M_2 ; O_2 – центр кривини;

$k_2 = \frac{1}{\rho_2}$ – кривина кривої у точці M_2 .

2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат

В ортогональній системі декартових координат ми визначали прискорення точки у проєкціях на координатні осі x, y, z . В натуральних осях координат визначимо проєкції вектора прискорення на дотичну τ і головну нормаль n . Але спочатку доведемо, що проєкція вектора прискорення на

бінормаль b дорівнює нулю. Для цього звернемося до рис. 2.6. Швидкості близьких точок M і M_1 – вектори \bar{v} і \bar{v}_1 напрямлені за дотичними $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ у цих точках.

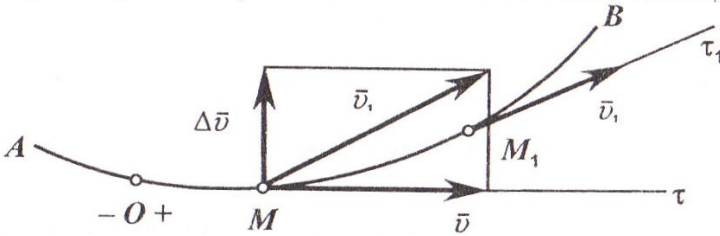


Рис. 2.6

Перенесемо паралельно вектор \bar{v}_1 у точку M і з'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 . Побудувавши паралелограм, з'ясуємо, що вектор $\Delta\bar{v}$ як різниця векторів швидкостей, що формує вектор прискорення, розміщений у стичній площині.

Паралельно $\Delta\bar{v}$ спрямований і вектор середнього прискорення \bar{a}_c , а вектор дійсного прискорення \bar{a} в даний момент часу дорівнює границі:

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розміщений у стичній площині. Це означає, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю. Знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього розглянемо схему, представлену рис. 2.7, де: $M\tau$ – дотична до траєкторії; Mn – головна нормаль; Mb – бінормаль; C – центр кривини траєкторії; ρ – радіус кривини траєкторії.

Припустимо, що в момент часу t точка M має швидкість \bar{v} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ швидкість буде \bar{v}_1 .

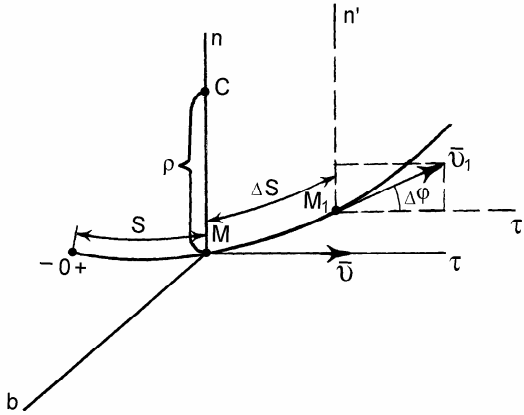


Рис. 2.7

Тоді прискорення точки:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

Переходимо до проєкцій прискорення матеріальної точки на натуральні осі координат τ і n :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad (2.28)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (2.29)$$

Враховуючи, що проєкції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_1\tau'$ і M_1n' , паралельні відповідним осям $M\tau$ і Mn , і позначимо кут суміжності $\Delta\varphi$.

Знайдемо проекції векторів \bar{v} і \bar{v}_1 на осі $M\tau$ і Mn :

$$v_\tau = v, v_n = 0, v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi, v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi.$$

Підставимо значення проекцій у вирази (2.28) і (2.29):

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (2.30)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Якщо проміжок часу Δt прямує до нуля, то

$$M_1 \rightarrow M, \Delta\varphi \rightarrow 0, \Delta s \rightarrow 0, v_1 \rightarrow v, \cos \Delta\varphi \rightarrow 1.$$

Тоді за рівнянням (2.30) дотичне прискорення дорівнює:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.32)$$

Дотичне прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за величиною і дорівнює *першій похідній від функції швидкості* або *другій похідній за часом від дугової координати*.

Визначимо нормальне прискорення a_n . Перетворимо вираз для нормального прискорення (2.31), помноживши чисельник і знаменник на добуток $\Delta\varphi \cdot \Delta s$:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \quad (2.33)$$

Перепишемо вираз (2.33):

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

$$\begin{aligned} \text{Якщо } \Delta t \rightarrow 0: \quad \lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1, \\ \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v. \end{aligned}$$

Підставимо значення цих границь у вираз для нормального прискорення:

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.34)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за напрямом і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривини траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення $\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n}$ спрямований вздовж нормалі до центра кривини кривої в даній точці. За знаком нормальне прискорення a_n додатне, тому що містить у чисельнику вираз v^2 . Вектор дотичного прискорення $\bar{a}_\tau = a_\tau \cdot \bar{\tau}$ направлений за дотичною до кривої і за знаком може бути як додатним, так і від'ємним.

Модуль повного прискорення \bar{a} може бути визначений геометричною сумою \bar{a}_τ та \bar{a}_n . Він є діагоналлю прямокутника, побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 2.8).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (2.35)$$

Напрямок вектора прискорення визначається кутом φ між вектором \bar{a} і нормаллю n :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

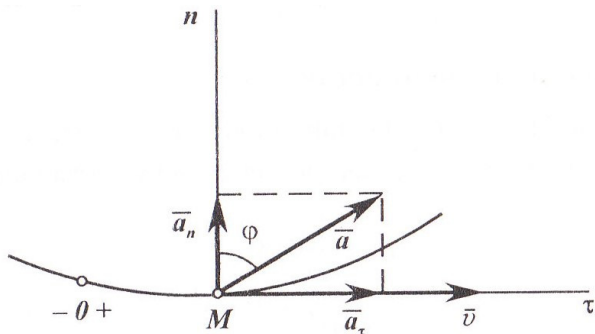


Рис. 2.8

Вектор прискорення \vec{a} може бути розкладений по ортах натурального триєдра a_τ і a_n :

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}, \quad (2.36)$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau, \quad \vec{a}_n = \vec{n} \cdot a_n, \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.37)$$

2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки

Прямолінійний рух

Радіус кривини траєкторії, якою є пряма лінія, прямує до нескінченності: $\rho \rightarrow \infty$. Тому,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким чином, в умовах прямолінійного руху вектор швидкості \vec{v} матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем (нормальна проекція прискорення дорівнює нулю).

Дотичне прискорення a_τ характеризує зміну вектора швидкості за модулем.

А якщо цей рух є ще і рівномірним, $\bar{v} = const$, то прискорення матеріальної точки дорівнює нулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad a = 0.$$

Рівномірний криволінійний рух

У цьому випадку модуль швидкості сталий $v = const$, а радіус кривини траєкторії є кінцевою величиною $\rho \neq \infty$. Визначимо проекції прискорення \bar{a} руху матеріальної точки на натуральні осі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, модуль повного прискорення \bar{a} матеріальної точки в цьому випадку дорівнює нормальному прискоренню a_n . Вектор нормального (в даному випадку повного) прискорення \bar{a} напрямлений вздовж нормалі \bar{n} до траєкторії. Оскільки прискорення \bar{a} з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості \bar{v} , то звідси випливає наступна інформація:

Нормальне прискорення a_n характеризує змінення вектора швидкості за напрямом.

Рівнозмінний криволінійний рух

У цьому випадку рух точки криволінійний, але прискорення a_τ є сталою величиною. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного руху матеріальної точки. Оскільки $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, то звідси є можливість визначити швидкість руху точки:

$$dv = a \, dt.$$

Швидкість \bar{v} перебуває тут під знаком диференціала, а тому візьмемо визначений інтеграл:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt \Rightarrow v - v_0 = a_\tau t \Rightarrow v = v_0 + a_\tau t. \quad (2.38)$$

Використаємо далі вираз: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt.$

Замість v підставимо в останній вираз отримане значення (2.38):

$$ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення s , взявши визначений інтеграл від лівої і правої частин виразу.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt, \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \quad (2.39)$$

Таким чином під час рівнозмінного руху матеріальної точки її швидкість і переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів (2.38), (2.39).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (перед a_τ) визначає характер рівнозмінного руху. Якщо знак додатний, то рух точки рівноприскорений, а якщо від'ємний, то – рівносповільнений.

Приклад 2.4

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно до заданих параметрично рівнянь:

$$x = b \sin \omega t,$$

$$y = b \cos \omega t,$$

де x і y – в метрах; t – в секундах; b і ω – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення пальця.

Розв'язання

Для визначення рівняння траєкторії пальця кривошипа

треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо із заданих рівнянь тригонометричні функції:

$$\sin \omega t = \frac{x}{b}, \quad \cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і почленно додамо. Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тому:

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості знайдемо спочатку проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

З останнього виразу легко побачити, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипу через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні за часом від заданих координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто, за криволінійною траєкторією руху сталого радіуса b , то його прискорення можна визначити за натуральним способом задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця

кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість $b\omega = \text{const}$:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному: $a = a_n = b\omega^2$.

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипу, визначена різними способами, збігається.

Приклад 2.5

Точка на ободі барабана зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно з рівнянням $s = 0,1 \cdot t^3$ (s – в метрах, t – в секундах). Радіус барабана дорівнює $R = 0,5$ м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ м/с.

Розв'язання

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість дорівнює:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

За заданим значенням швидкості точки $v = 30$ м/с знайдемо момент часу. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо час t :

$$30 = 0,3 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

У функцію дотичного прискорення точки підставимо час:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3 \cdot t^2) = 0,6t,$$

$$a_\tau(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак «плюс» перед дотичним прискоренням a_τ означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Приклад 2.6

Рух точки відбувається згідно з рівняннями в координатній формі:

$$x = A \cos kt; \quad y = A \sin kt; \quad z = Bt;$$

де x , y , z – у метрах, t – у секундах.

Визначити:

- швидкість точки; закон руху точки вздовж траєкторії;
- рівняння годографа швидкості; прискорення точки;
- радіус кривини траєкторії точки.

Розв'язання

Виберемо систему координат, як показано на рис. 2.9. M_0 – початкове положення точки на траєкторії.

Складові швидкості точки дорівнюють похідним від координат:

$$v_x = \dot{x} = -Ak \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = Ak \cos kt, \quad v_z = \dot{z} = B.$$

Модуль швидкості:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{A^2 k^2 + B^2} = \text{const.}$$

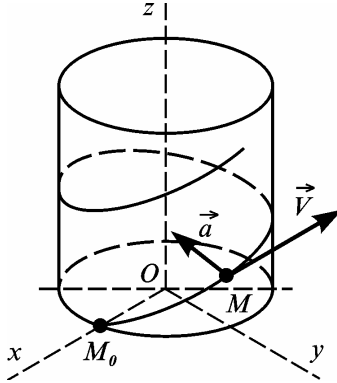


Рис. 2.9

Траєкторією точки є гвинтова лінія. Напрямок швидкості, тобто напрям дотичної до гвинтової лінії (рис. 2.9), визначаємо за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{v}, \wedge Ox) = -\frac{Ak}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}} \sin kt;$$

$$\cos(\vec{v}, \wedge Oy) = \frac{Ak}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}} \cos kt;$$

$$\cos(\vec{v}, \wedge Oz) = \frac{B}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}}.$$

Рівняння годографа швидкості знаходимо на підставі формул:

$$x_1 = v_x = -Ak \sin kt; \quad y_1 = v_y = Ak \cos kt; \quad z_1 = v_z = B.$$

Звідси $x_1^2 + y_1^2 = A^2k^2; \quad z_1 = B$ – рівняння годографа швидкості (рис. 2.10).

Отже, годографом швидкості є коло радіуса Ak з центром у точці $z_1 = B$ на осі Oz_1 .

Знайдемо закон руху точки вздовж траєкторії $s = s(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad ds = vt; \quad s = \sqrt{A^2k^2 + B^2}t + C.$$

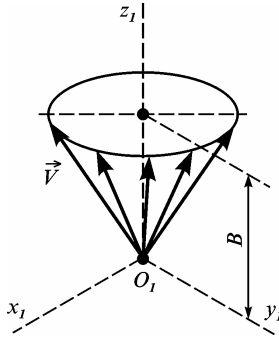


Рис. 2.10

Якщо $t = 0$, $s = 0$, то $C = 0$.

$$s = \sqrt{A^2 k^2 + B^2} t.$$

Для визначення проєкцій, модуля та напрямку прискорення скористаємося наведеними вище формулами:

$$a_x = \ddot{x} = -Ak^2 \cos kt; \quad a_y = \ddot{y} = -Ak^2 \sin kt;$$

$$a_z = \ddot{z} = 0; \quad \Rightarrow a = Ak^2;$$

$$\cos(\vec{a}, \hat{Ox}) = -\cos kt; \quad \cos(\vec{a}, \hat{Oy}) = -\sin kt;$$

$$\cos(\vec{a}, \hat{Oz}) = 0.$$

Вектор прискорення розміщений у горизонтальній площині і спрямований від точки M до осі Oz (рис. 2.9).

Радіус кривини точки знаходимо на підставі формули (2.34). Нормальне прискорення визначаємо через повне і тангенціальне за формулами (2.35) і (2.32):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Оскільки $v_\tau = \text{const}$ і $a_\tau = \dot{v}_\tau = 0$, то $a_n = a$. Знаходимо радіус кривини:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{A^2 k^2 + B^2}{Ak^2} = A + \frac{B^2}{Ak^2}.$$

Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1. Рух точки відбувається за законом

$$x = \frac{1}{3}t^2 + 1; \quad y = \frac{2}{3}t^2.$$

Визначити швидкість v , прискорення точки a , радіус кривини траєкторії ρ і закон руху точки вздовж траєкторії s .

$$\text{Відповідь: } v = \frac{2\sqrt{5}}{3}t; \quad a = \frac{2\sqrt{5}}{3}; \quad \rho = \infty; \quad s = \frac{\sqrt{5}}{3}t^2.$$

Задача 2. У деякий момент часу повне прискорення точки дорівнює $2,6 \text{ м/с}^2$. Точка рухається по кривій з дотичним прискоренням $1,4 \text{ м/с}^2$.

Знайти для даного моменту часу нормальне прискорення точки.

$$\text{Відповідь: } a_n \approx 2,2 \text{ м/с}^2.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає зміст натурального способу визначення руху точки?
2. Що називають дуговою координатою?
3. Як знайти шлях, що його проходить точка?
4. Як знайти зв'язок між натуральним і координатним способом?
5. Визначте швидкість точки натуральним способом завдання руху?
6. Як знайти прискорення точки натуральним способом задання руху?
7. У чому полягає фізичний зміст тангенціального і нормального складових прискорення?
8. Які особливості має натуральний координатний базис?
9. Напишіть формулу рівномірного і рівнозмінного руху точки?

10. Які потрібні умови для задання руху точки натуральним способом?
11. З'ясуйте різницю між дуговою координатою і шляхом, пройденим точкою.

2.2. Кінематика твердого тіла

Переходимо до вивчення руху абсолютно твердого тіла. Якщо на тіло ніяких в'язей не накладено, то воно рухається вільно. Закріпимо одну точку тіла (три в'язі), воно буде обертатись навколо цієї точки (три ступеня вільності). Закріпимо дві точки (п'ять в'язей), тіло буде обертатись навколо нерухомої осі, маючи один ступінь вільності. Закріпимо три точки і тіло опиниться нерухомим (шість в'язей).

Відповідно до згаданого в механіці розглядаються такі рухи твердого тіла: *поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний або плоский, обертальний навколо нерухомої точки або сферичний, вільний і складний рухи.*

Основна задача кінематики твердого тіла полягає в установленні способу задання руху і вивченні кінематичних характеристик тіла загалом і окремих його точок. Спосіб вважається встановленим, якщо визначено метод, що вказує положення довільної точки тіла в будь-який момент часу щодо вибраної системи координат.

Розглянемо спочатку найпростіші види руху: поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.

2.2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно її початковому положенню.

Приклади поступального руху твердого тіла: рух планки мотовила зернозбирального комбайна за прямолінійного руху останнього; рух клавіші соломотряса (шарнірного паралелограма O_1ABO_2 рис. 2.9а),

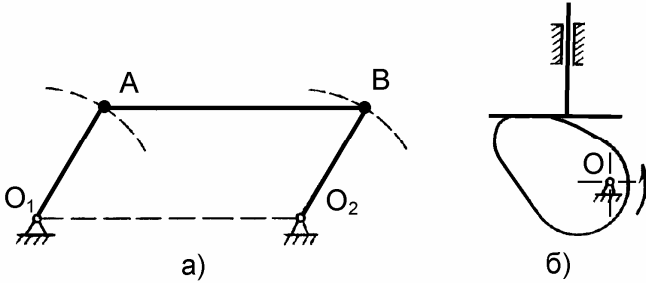


Рис. 2.11

яка здійснює коловий поступальний рух; рух штовхача кулачкового механізму (рис. 2.11б), який здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух кузова автомобіля вздовж прямої дороги тощо.

З наведених прикладів легко побачити, що *траєкторією* точки тіла у разі поступального руху може бути як *пряма*, так і *крива* лінія. Термін «поступальний рух» стосується тільки тіла, а не точки. Для дослідження поступального руху твердого тіла доведемо теорему:

|| Під час *поступального руху тіла* всі його точки рухаються конгруентними траєкторіями і мають у кожен момент часу *однакові швидкості і прискорення*.

Розглянемо в твердому тілі дві довільні точки A та B і визначимо їхні рухи векторним способом (рис. 2.12):

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t). \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.40)$$

Функції $\vec{r}_A(t)$ і $\vec{r}_B(t)$ визначають векторним способом траєкторії точок A і B .

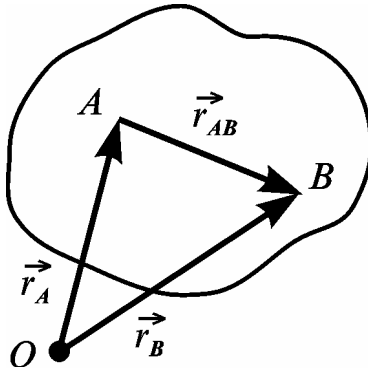


Рис. 2.12

Вектор \vec{r}_{AB} не змінюється з часом ні за величиною, ні за напрямом (тверде тіло). Отже, із виразу (2.40) видно, що траєкторію точки B можна отримати з траєкторії точки A за допомогою паралельного переносу. Напрямок і величину переносу визначає сталий вектор \vec{r}_{AB} . Оскільки вибір двох точок був довільний, то це означає, що всі *точки тіла рухаються конгруентними траєкторіями*.

Знайдемо похідну за часом t від виразу (2.40):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Вектор $\vec{r}_{AB} = \text{const}$, тому $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$.

Диференціюючи останній вираз швидкості за часом t , дістанемо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Поступальний рух тіла цілком визначається рухом однієї довільної точки, оскільки всі точки тіла рухаються однаково.

Швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла, а рівняння руху будь-якої його точки є рівнянням руху тіла.

Внаслідок повної тотожності руху всіх точок тіла більшість задач із кінематики поступального руху розв'язуються методами кінематики матеріальної точки.

2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі найбільш широко використовується в техніці.

*Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого **пряма, проведена крізь дві довільні точки тіла, під час руху тіла залишається нерухомою.** Ця пряма, що проходить крізь ці дві нерухомі точки, називається **віссю обертання тіла.***

Вісь обертання може знаходитись як всередині самого тіла, так і зовні його. Для того, щоб здійснити обертальний рух твердого тіла, необхідно закріпити, наприклад, у підшипниках, дві точки цього тіла.

Визначення положення і закону обертального руху тіла

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z . Проведемо крізь нерухому вісь обертання z дві півплощини, одна з яких π_1 є нерухомою, а друга півплощина π_2 незмінно поєднана з тілом і обертається разом із ним. (рис. 2.13).

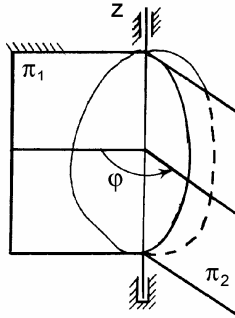


Рис. 2.13

Тоді *положення тіла* у будь-який момент часу t однозначно *визначається* двогранним кутом φ між півплощинами π_1 і π_2 , який називається *кутом повороту* тіла φ .

Отже, положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається одним параметром, кутом повороту, тобто, тіло має один ступінь вільності.

Під час обертання тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ безперервно змінюється і є однозначною функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.41)$$

Вираз (2.41) називається *законом обертального руху* тіла або кінематичним рівнянням обертання навколо нерухомої осі. Якщо маємо цю функцію, то положення тіла визначено однозначно. Тобто, кожному значенню параметра часу t відповідає лише одне значення кута повороту.

Напрямок відліку кута повороту вибирається так. Суміщаємо координатну вісь z з віссю обертання. Кут φ вважається *додатним* ($\varphi > 0$), якщо з додатного кінця осі z перехід рухомої площини π_2 від нерухомої π_1 відбувається *проти ходу годинникової стрілки* (для правої системи координат). І навпаки, від'ємний ($\varphi < 0$), якщо, – *за ходом годинникової стрілки*.

Кут повороту тіла вимірюється в радіанах. Відомо, що один оберт відповідає 2π рад. А тому зв'язок між кутом повороту φ в радіанах і числом обертів N такий:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість

Кутова швидкість ω характеризує кінематичну міру змінення кута повороту тіла φ за одиницю часу. Якщо за деякий малий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість ω_c тіла за цей проміжок часу дорівнює:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження дійсної кутової швидкості тіла ω у будь-який момент часу t необхідно взяти границю, до якої наближається ω_c , якщо елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута його повороту і характеризує кінематичну міру змінення кута повороту в часі.

Знак кутової швидкості ω визначає напрям обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту φ . Якщо

$\omega > 0$, то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямі зростання кута повороту, тобто, проти ходу годинникової стрілки і – навпаки. Якщо кутова швидкість є сталою величиною, то обертальний рух тіла рівномірний. Одиницею кутової швидкості ω є $\text{рад}/\text{с}$; $1/\text{с}$; с^{-1} .

Кутове прискорення

Введемо фізичну величину, що характеризує міру змінення кутової швидкості ω в часі.

Нехай за елементарний проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, тоді відношення

$$\Delta\omega \text{ до } \Delta t \text{ уявляє собою середнє кутове прискорення } \varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Для знаходження дійсного кутового прискорення тіла ε у будь-який момент часу t переходимо до границі, якщо Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.43)$$

Кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла і характеризує кінематичну міру змінення кутової швидкості в часі.

Одиницею кутового прискорення ε прийнятий радіан за секунду в квадраті: $\text{рад}/\text{с}^2$; с^{-2} .

Якщо модуль кутової швидкості $\omega > 0$, то тіло обертається в додатному напрямі відліку кута повороту. Якщо кутова швидкість зростає з часом, то $\varepsilon > 0$ і обертальний рух тіла є прискореним, а якщо зменшується $\varepsilon < 0$, то – сповільненим. Якщо під час обертання тіла кутове прискорення залишається

весь час сталою величиною, то обертальний рух тіла є рівнозмінним (рівноприскореним або рівносповільненим).

Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

Залежно від того, які кінематичні характеристики має тіло під час обертання навколо нерухомої осі, можливі деякі окремі випадки.

Рівномірне обертання

Якщо кутова швидкість тіла залишається сталою за весь період часу руху тіла, то таке обертання називається рівномірним ($\omega = const$, $\varepsilon = 0$). Тоді кут повороту тіла визначається за формулою:

$$\varphi = \omega \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2.44)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають *частотою обертання* n в обертах за хвилину: *об/хв*.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n. \quad (2.45)$$

Рівнозмінний обертальний рух

У цьому випадку кутове прискорення стає $\varepsilon = const$, тобто, кутова швидкість тіла ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного обертального руху. Оскільки $\varepsilon = const$, то згідно з (2.43)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt.$$

Для знаходження кутової швидкості ω використаємо

визначений інтеграл в означених границях:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.46)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.42)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Підставимо (2.46) в останній вираз:

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \quad (2.47)$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (2.48)$$

де φ_0 – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, під час рівнозмінного обертального руху твердого тіла кутова швидкість ω і кут повороту φ визначаються за формулами (2.46) і (2.48).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (плюс чи мінус перед ε) інформує про рівноприскорене або рівносповільнене обертання.

Приклад 2.7

Приводний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$.

Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди, а також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

Розв'язання

За умовою прикладу кутове прискорення вала є сталою додатною величиною, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала можна скористатись виразами (2.46) і (2.48).

Слід відразу зазначити: оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість дорівнює нулю.

Початковий кут повороту дорівнює нулю, якщо суміщені початок відліку кута повороту з початком руху:

$$\omega_o = 0, \quad \varphi_o = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15 \text{ с}$.

Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с}.$$

Якщо підставити у вираз для кута повороту φ відомі величини, то отримаємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад}.$$

Для знаходження загальної кількості обертів вала скористаємось таким виразом: $\varphi = N \cdot 2\pi$.

Звідси кількість обертів N вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі, – кутової швидкості ω і кутового прискорення ε – визначимо *лінійні або колові швидкості* і *лінійні або колові прискорення точок тіла*.

З визначення обертового руху тіла випливає, що траєкторією довільної точки обертового тіла є накреслене точкою коло з радіусом, який дорівнює відстані до осі обертання тіла.

Площини кіл перпендикулярні до осі. Центри цих кіл знаходяться в точках перетину нерухомої осі обертання з указаними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла.

Лінійна (колова) швидкість

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.14). Напрямок обертання показаний стрілкою. Виберемо в тілі будь-яку точку M , яка розміщується на відстані радіуса обертання R від осі z .

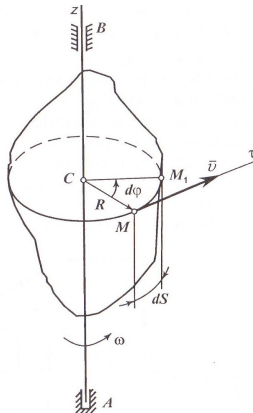


Рис. 2.14

Точка M окреслює показане на рисунку коло радіусом R , площина якого перпендикулярна осі z обертання, а центр C розміщений на самій осі z .

За деякій проміжок часу dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, при цьому точка M здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення в положення M_1 на величину:

$$ds = R d\varphi.$$

Визначимо лінійну або колову швидкість точки M за відомим виразом (2.22):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

$$v = \omega R. \quad (2.49)$$

Лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор лінійної швидкості \vec{v} напрямлений вздовж дотичної $\vec{\tau}$ до кола (перпендикулярно радіусу обертання), яке окреслюється точкою M під час руху, і спрямований у напрямі обертання.

Оскільки для всього тіла кутова швидкість ω у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок тіла прямо-пропорційні їх відстаням до осі обертання.

Тому для діаметра KL картина розподілу швидкостей точок тіла має лінійний характер (рис. 2.15).

Як легко побачити, лінійна швидкість точки O , що розміщена на осі обертання, дорівнює нулю.

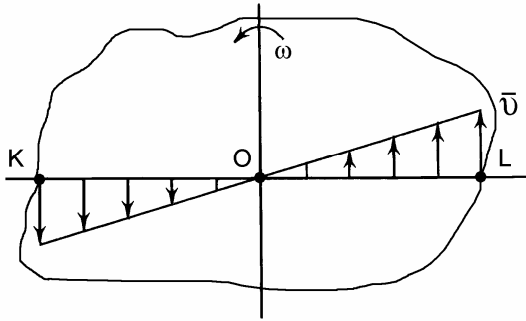


Рис. 2.15

Лінійне прискорення

Визначимо далі прискорення точки M , (рис. 2.14) за формулами (2.32) і (2.34).

У даному випадку радіус кривини кола $\rho = R$. Підставляючи вираз (2.49), матимемо формулу обертального або дотичного прискорення:

$$a_{\tau} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \quad (2.50)$$

і доцентрового або нормального прискорення:

$$a_n = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.51)$$

Дотичне прискорення \bar{a}_{ϕ} спрямоване за дотичною до траєкторії руху точки M у бік обертання, якщо рух тіла прискорений ($\varepsilon > 0$), і протилежно, якщо рух сповільнений ($\varepsilon < 0$).

Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і спрямоване за нормаллю (радіусом) до центра кола, за яким рухається точка.

Визначимо модуль повного прискорення \bar{a} точки M .

Воно дорівнюватиме геометричній сумі складових дотичного \bar{a}_τ і нормального a_n прискорень:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \Rightarrow a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.52)$$

Аналізуючи вираз (2.50), легко переконатися, що величина повного лінійного прискорення точки прямо пропорційна радіусу і не залежить від того, обертається тіло прискорено чи сповільнено.

Визначимо напрям вектора повного прискорення \bar{a} точки M тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 2.16).

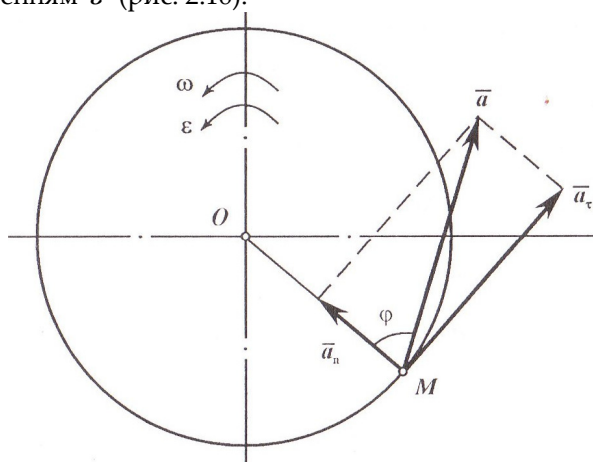


Рис. 2.16

Відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі (радіуса) визначається кутом φ , який може бути обчислений за виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (2.53)$$

Як випливає з виразу (2.51), кут відхилення від нормалі вектора повного лінійного прискорення \bar{a} не залежить від радіуса обертання і в кожний даний момент часу однаковий для всіх точок тіла.

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла

Кутову швидкість ω і кутове прискорення ε обертового тіла зображують векторами.

Вектори кутових швидкості і прискорення обертового тіла розміщуються на осі обертання і спрямовані так, що, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити поворот тіла у напрямі проти ходу годинникової стрілки.

Вказаний напрям вважається додатним у правій системі координат і від'ємним – у лівій.

Значимо, що вектор кутового прискорення спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості, якщо обертання прискорене, і навпаки.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, то напрями векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на рис. 2.17.

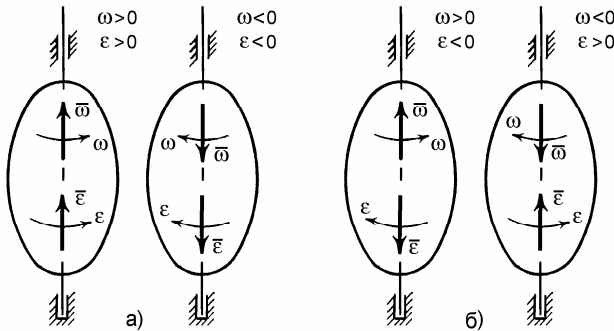


Рис. 2.17

Вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ є **ковзними** векторами. Вектор $\bar{\omega}$ напрямлений по нерухомій осі обертання, його годографом є пряма лінія. Вектор $\bar{\varepsilon}$ як похідна від $\bar{\omega}$ повинний мати напрям за дотичною до годографа $\bar{\omega}$. Але годографом останнього є пряма, тому і вектор $\bar{\varepsilon}$ для обертового тіла з нерухомою віссю обертання напрямлений також вздовж осі обертання.

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення одночасно визначають наступні **три елементи**:

положення осі обертання даного тіла в нерухомій системі координат; величини, які характеризують значення швидкості і прискорення; напрямок обертання тіла.

Якщо позначити вісь обертання z з ортом \bar{k} , то вектори $\bar{\omega}$ та $\bar{\varepsilon}$ можна уявити: $\bar{\omega} = \bar{k} \cdot \omega$; $\bar{\varepsilon} = \bar{k} \cdot \varepsilon$; то проєкції цих векторів на три осі координат із ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ дорівнюють:

$$\omega_x = 0; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega; \quad \varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_z = \varepsilon.$$

Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла. Формула Ейлера

Лінійну швидкість точки обертового тіла можна уявити у вигляді векторного добутку. Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі z у напрямі, показаному стрілкою (рис. 2.18).

Довільна точка M рухається по колу радіусом R . Виберемо на осі обертання z довільну точку відліку O і проведемо із цієї точки вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$, спрямовуючи його вгору (за визначенням), і радіус-вектор \bar{r} цієї точки M , який визначає її положення відносно точки відліку.

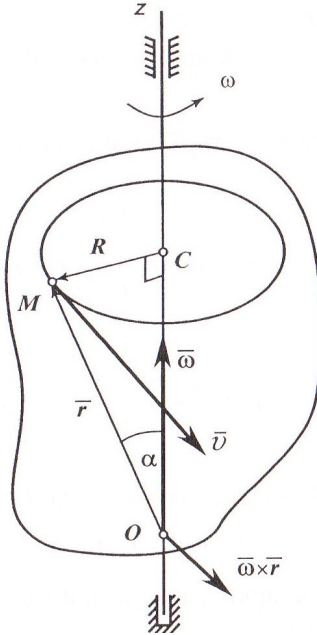


Рис. 2.18

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла на радіус-вектор \vec{r} точки M .

Визначимо модуль лінійної швидкості v точки M :

$$v = \omega R, \quad R = r \sin \alpha \Rightarrow v = \omega \cdot r \sin \alpha, \quad (2.54)$$

де α – кут між векторами $\vec{\omega}$ і \vec{r} .

Вектор \vec{v} лінійної швидкості точки M спрямований за дотичною до кола, яке є траєкторією руху точки M , тобто перпендикулярний площині трикутника OMC .

Далі визначимо модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.55)$$

Напрямок векторного добутку $\bar{\omega} \times \bar{r}$ також перпендикулярний площині трикутника OMC , що безпосередньо впливає з визначення векторного добутку двох векторів $\bar{\omega}$ і \bar{r} .

Із цього можна дійти висновку, що не тільки збігаються модулі лінійної швидкості і векторного добутку (формули (2.54), (2.55)), але і їх напрямки. Звідси:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.56)$$

Лінійна швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку двох векторів: кутової швидкості і радіуса-вектора цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Формула (2.56) надає можливість отримати картину розподілу швидкостей точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

З'ясуємо, чому ця формула інваріантна відносно довільності вибору точки відліку O на осі обертання.

Для цього звернемо увагу на модуль векторного добутку (2.55) і легко з'ясуємо, що результат коректує синус кута α між векторами: зі зміною положення точки відліку змінюється і сам кут і, відповідно, величина швидкості.

Визначимо лінійну швидкість точки M тіла, вісь обертання якого довільно розміщена у просторі відносно системи координат $Oxyz$ (рис. 2.19). Виразимо лінійну швидкість \bar{v} за допомогою визначника векторного добутку:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k}. \quad (2.57)$$

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.$$

Користуючись виразом (2.56), дістанемо результат, який свідчить про універсальність формули Ейлера:

$$v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0, v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.$$

Приклад 2.8

Закон обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням $\varphi = \frac{t^3}{3}$, де t – в секундах, φ – в радіанах.

Визначити модуль і напрям прискорення точки, розміщеної на відстані 50 см від осі обертання, в момент, коли її швидкість $v_1 = 8$ м/с.

Розв'язання

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.52): $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Кутові швидкість і прискорення руху маховика двигуна визначимо, використавши вирази (2.42) і (2.43):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2, \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки.

Для цього, на підставі виразу (2.49), визначимо кутову швидкість обертання маховика:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість $\omega = t^2$, то можемо визначити час:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ с}.$$

У формулу $\varepsilon = 2t$ підставимо час t_1 і отримаємо величину кутового прискорення у даний момент часу:

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ с}^{-2}.$$

Підставимо значення ω_1 і ε_1 у вираз для повного прискорення і матимемо шуканий результат:

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора \vec{a} визначимо згідно з виразом (2.53):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}, \text{ звідки } \varphi = 1^\circ 48',$$

де φ – кут між радіусом обертання і вектором повного прискорення \vec{a} .

Векторний вираз лінійного прискорення точки обертового тіла

Для визначення векторного виразу лінійного (колового) прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, складемо розрахункову схему (рис. 2.20) і скористаємося натуральним способом задання руху.

З точкою M зв'язаний вектор лінійної швидкості \vec{v} , спрямований за дотичною, проведеній крізь точку M до кола, утвореного траєкторією її руху. На цій же дотичній показаний вектор \vec{a}_τ тангенціальної складової лінійного прискорення точки M , напрямлений у той же бік, що й вектор \vec{v} . Вздовж радіуса R кола показаний вектор \vec{a}_n нормальної складової лінійного прискорення. Візьмемо похідну за часом від виразу швидкості, підставляючи в нього формулу (2.56):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

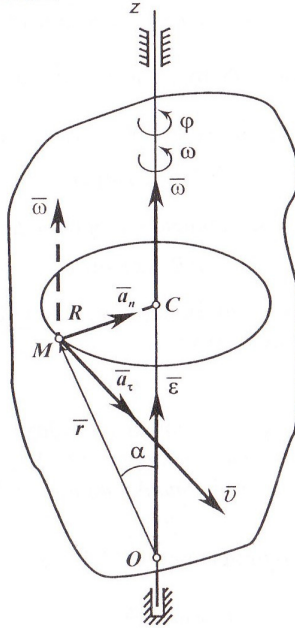


Рис. 2.20

Аналізуючи останню рівність і розглядаючи рис. 2.20, можна записати:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} \quad - \text{вектор кутового прискорення, який напрямляється}$$

аналогічно вектору кутової швидкості $\bar{\omega}$, (якщо дугові стрілки співпадають),

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad - \text{вектор лінійної швидкості.}$$

Підставивши останні значення у попередню формулу, отримуємо:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.59)$$

Вираз (2.59) називають формулою Ривальдса. Проведемо

аналіз формули. Модуль першого векторного добутку:

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Модуль обертального прискорення:

$$a_\tau = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Як легко побачити, збігаються не тільки їх модулі, але й напрями у зв'язку з їхньою перпендикулярністю трикутнику *ОМС*. Тому можна записати:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (2.60)$$

Обертальне або тангенціальне прискорення точки твердого тіла, дорівнює векторному добутку вектора кутового прискорення на радіус-вектор цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Модуль доосьового прискорення

$$a_n = \omega^2 R = \omega v.$$

Модуль векторного добутку

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega v, \text{ оскільки } (\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = 90^\circ \text{ і } \vec{v} \perp \vec{\omega}.$$

Порівнюючи значення модулів векторів \vec{a}_n , $\vec{\omega} \times \vec{v}$ і їхні напрями, можна дійти висновку, що другий доданок у виразі (2.59) є доосьовим прискоренням:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.61)$$

Доосьове або нормальне прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості на вектор лінійної швидкості цієї точки.

Передача обертального руху

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя тощо. Простою передачею називають такий механізм, до складу якого входять тіла, що здійснюють тільки найпростіші рухи: поступальний або обертальний відносно нерухомої осі (рис. 2.21).

Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі, яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей.

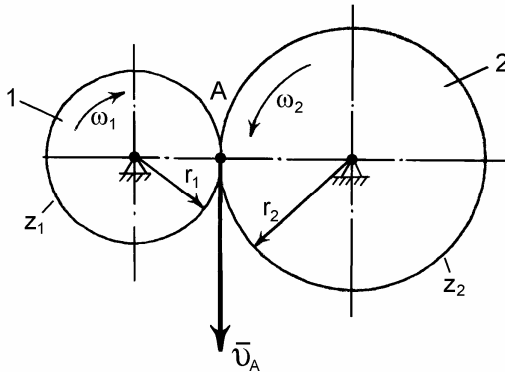


Рис. 2.21

Назвемо перше колесо (з меншим діаметром) ведучим (шестернею). Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус – r_1 , кількість зубів – z_1 , кутова швидкість – ω_1 , частота обертання – n_1 .

Друге колесо, яке є веденим, має такі параметри: радіус – r_2 , кількість зубів – z_2 , кутова швидкість – ω_2 , частота обертання – n_2 . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою.

Якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість

точки контакту (точка A), яка належить одночасно двом колесам, має бути однаковою.

Лінійна швидкість точки A для першого колеса $v_A = \omega_1 \cdot r_1$, а лінійна швидкість точки A другого колеса $v_A = \omega_2 \cdot r_2$. Порівняємо обидва вирази для точки A :

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Перетворимо останній вираз

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Якщо вважати, що передаточне відношення – це відношення кутових швидкостей $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, то можна остаточно

написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Передаточне відношення прямо пропорційне відношенню кутових швидкостей і частот обертання ведучого і веденого коліс. Воно обернено пропорційне величинам радіусів і кількості зубців відповідних коліс.

Вказані основні положення про передачу обертового руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач.

Методика і приклади розв'язання задач

Приклад 2.9

Два шківів I і II з'єднано нескінченним пасом (рис. 2.22). Радіуси шківів відповідно $R_1 = 0,25$ м і $R_2 = 0,5$ м. Внутрішній радіус шківів II $r_2 = 0,2$ м.

Знайти швидкість v точок паса і кутові швидкості обох шківів, якщо рівняння руху тягаря $x = 4t^2$ (x – в сантиметрах, t – в секундах).

Оскільки трос, на якому підвішений тягар III, є нерозтяжним, то швидкість точки M шківів II дорівнює швидкості тягара III.

З рівняння руху тягара ця швидкість:

$$v_M = \dot{x} = 8t \text{ см/с.}$$

Отже, кутова швидкість шківів II:

$$\omega_{II} = \frac{v_M}{r_2} = \frac{8t}{20} = 0,4t \text{ рад/с.}$$

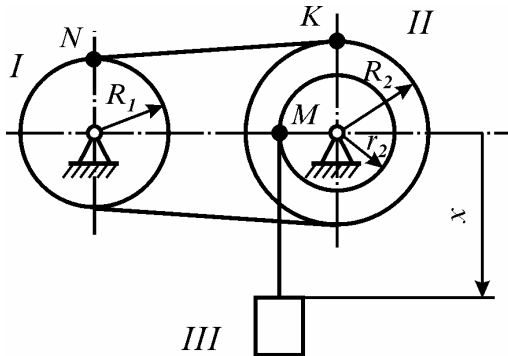


Рис. 2.22

Оскільки пас нерозтяжний і рухається без ковзання, то точки обводів шківів мають однакову швидкість $v_N = v_K = v$, тобто:

$$v = \omega_I R_1 = \omega_{II} R_2 = 0,4t \cdot 50 = 20t \text{ см/с,}$$

$$\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_I = \frac{\omega_{II} R_2}{R_1} = \frac{0,4t \cdot 0,5}{0,25} = 0,8t \text{ рад/с.}$$

Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = t^2$.

Визначити швидкість точки тіла на відстані $r=0,5$ м від осі обертання в момент, коли $\varphi=25$ рад.

Відповідь: 5 м/с.

Задача 2. Кутова швидкість колеса 1 змінюється за законом $\omega_1=2t$.

Визначити прискорення тягара 3 у момент часу $t=2$ с, якщо радіуси $R_1=1$ м, $R_2=0,8$ м і $r_2=0,4$ м (рис. 2.23).

Відповідь: $a=1$ м/с².

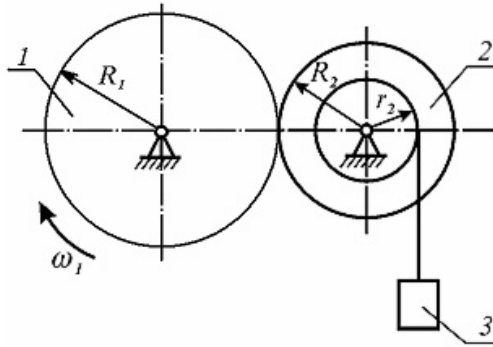


Рис. 2.23

Задача 3. Закон обертального руху тіла $\varphi=1+4t$.
Визначити прискорення точки тіла, що знаходиться на відстані $r=0,2$ м від осі обертання.

Відповідь: $a=3,2$ м/с².



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла.
2. Чи можна звести кінематику поступального руху до кінематики точки?

3. Як визначити положення обертового тіла? Що таке закон обертання?
4. Означте кутові швидкості і кутові прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру. Визначте частоту обертання.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Що таке передаточне відношення пари зубчастих коліс?
8. Як спрямувати вектори кутових швидкості і прискорення?
9. Запишіть і проаналізуйте формулу Ейлера.
10. В яких одиницях вимірюється кут повороту тіла?

2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух широко розповсюджений у техніці і його вивчення має велике значення. Багато механізмів, що зустрічаються на практиці, належать до, так званих, плоских механізмів.

*Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла рухаються паралельно деякій заданій нерухомій площині, яку називають **напрямною** або **основною**.*

Розглянемо вказаний рух. Нехай всі точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, рухаються паралельно деякій нерухомій площині π (рис. 2.24).

Якщо перетнути тіло площиною xOy , яка паралельна нерухомій площині π , то у перерізі отримаємо плоску фігуру S .

Фігура S під час руху тіла довільно переміщується, залишаючись весь час у площині xOy .

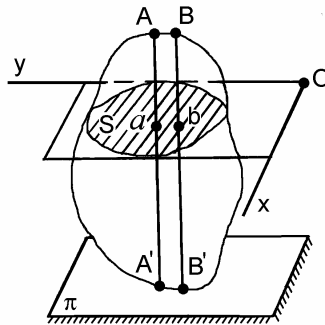


Рис. 2.24

У разі плоскопаралельного руху всі точки перпендикуляра до площини фігури AA' рухаються однаково, як і точка a перерізу, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально.

Якщо взяти на перерізі другу точку b та провести перпендикуляр BB' , то всі і його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення. Але загалом швидкості і прискорення точок перпендикулярів є різними:

$$\bar{v}_A \neq \bar{v}_B \text{ і } \bar{a}_a \neq \bar{a}_b.$$

Якщо на перерізі тіла (фігура S) взяти велику кількість точок, то рух фігури перерізу S може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла.

З вищенаведеного випливає, що для визначення плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перетином тіла площиною xOy , паралельною заданій напрямній нерухомій площині π . Проте, рух плоскої фігури у площині визначається рухом відрізка прямої, проведеної на цій фігурі.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла, фактично, зводиться до розглядання руху відрізка прямої на площині.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи

Нехай маємо плоску фігуру S , яка рухається у площині Oxy і за деякий малий проміжок часу переміщується із положення I у положення II (рис. 2.25).

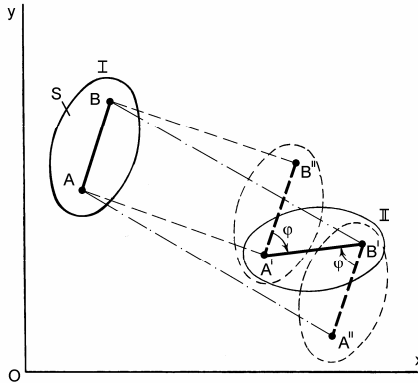


Рис. 2.25

Виберемо на фігурі S дві точки A і B і з'єднаємо їх прямою. Прослідкуємо за рухом відрізка AB .

Легко переконатися, що переміщення фігури S та незмінно пов'язаного з нею відрізка AB можна вважати складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення відрізка AB у положення $A'B'$ можна розглядати як поступальне переміщення у положення $A'B''$ і наступний поворот навколо точки A' , яку приймаємо за полюс, на деякий кут φ . Або як поступальне переміщення в положення $B'A''$ і наступний поворот на той же кут φ навколо точки B' , яку в цьому разі приймаємо за полюс.

Як видно з рис. 2.25, кут φ повороту фігури S навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковим буде і напрям повороту – за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, кут повороту φ і напрям повороту фігури не залежать від вибору полюса. Слід зауважити, що такого ж самого кінцевого результату можна досягнути, якщо здійснити спочатку поворот тіла, а потім – поступальний рух.

Переміщення фігури S в її площині із одного положення у друге, яке нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – поступальним і обертальним.

Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла розглянемо у площині руху фігури S ортогональну систему декартових координат Oxy , яка є нерухомою відносно цієї площини (рис. 2.26).

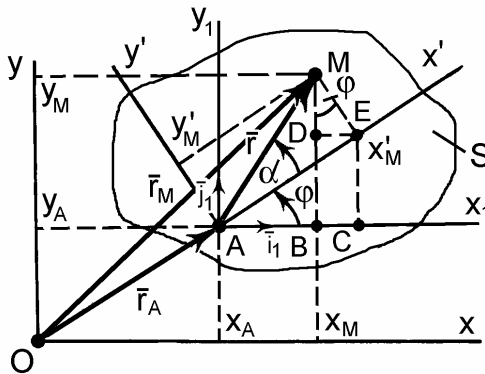


Рис. 2.26

Візьмемо на фігурі S будь-яку точку A за полюс і за початок рухомої системи координат $Ax'y'$, яка жорстко зв'язана

з фігурою S . Положення рухомої системи координат $Ax'y'$, як і усієї плоскої фігури S , буде визначатися положенням полюса A і кутом повороту φ осі x' щодо нерухомої осі x .

Протягом часу координати полюса A і кут повороту тіла φ змінюються як однозначні функції часу, тому їх можна описати системою рівнянь:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.62)$$

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

Якщо координати полюса A і кут повороту φ відомі у будь-який момент часу, то можна визначити і положення будь-якої довільної точки M тіла у площині її руху.

Якщо з'єднати точку M з полюсом A радіусом-вектором \vec{r} , то у рухомій системі координат $Ax'y'$ її координати будуть x'_M і y'_M , а кут нахилу α визначатиме нахил радіуса-вектора \vec{r} до осі x' . Як можна побачити з рис. 2.24, координати x_M і y_M точки M у нерухомій системі координат Oxy дорівнюють:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + r \cos(\alpha + \varphi), \\ y_M &= y_A + r \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Враховуючи, що

$$r = \frac{x'_M}{\cos \alpha}, \quad r = \frac{y'_M}{\sin \alpha}$$

і підставляючи у вираз (2.63) ці величини, а також тригонометричні функції суми двох кутів, матимемо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \sin \varphi, \\ y_M &= y_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Після відповідних скорочень остаточно маємо:

$$\begin{aligned}x_M &= x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi, \\y_M &= y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi.\end{aligned}\tag{2.64}$$

Рівняння (2.64) і є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині.

Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Для визначення швидкостей довільної точки M фігури, що здійснює плоскопаралельний рух, введемо ортогональну систему координат Ax_1y_1 , яка рухається поступально відносно нерухомої системи координат (рис. 2.26).

Від центра O у нерухомій системі координат Oxy покажемо радіуси-вектори: полюса A – r_A і точки M – r_M . Радіус-вектор точки M відносно полюса A позначимо через \bar{r} .

Під час плоскопаралельного руху фігури зберігається векторна рівність:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}.$$

Диференціюємо за часом цю рівність

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

У цьому виразі:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_M; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A.$$

Доданок $\frac{d\bar{r}}{dt}$ є швидкістю точки M відносно рухомої

системи координат Ax_1y_1 , яку позначимо: $\bar{v}_{MA} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Рух фігури тіла відносно системи координат Ax_1y_1 є поворотом фігури навколо осі Az_1 , спрямованої

перпендикулярно площині креслення (на рис. 2.26 не показана). Таким чином, швидкість \bar{v}_{MA} є відносною швидкістю точки M під час обертання тіла навколо осі Az_1 , для визначення якої можна скористуватись формулою Ейлера (2.54):

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість фігури відносно точки A , яку прийняли за полюс і яка, як відомо, не залежить від вибору полюса.

Тоді вираз для швидкості точки у плоскому русі приймає вигляд:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.65)$$

Швидкість довільної точки M плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса A і відносної швидкості точки M під час обертання фігури навколо полюса A .

Перший доданок у виразі (2.65) визначає поступальну швидкість фігури разом із полюсом, другий доданок – відносну швидкість точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Оскільки, $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$, то модуль швидкості дорівнює $v_{MA} = \omega \cdot AM$, а вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярний площині креслення.

Вектор \bar{v}_{MA} перпендикулярний AM : $\bar{v}_{MA} \perp \overline{AM} \perp \bar{r}$ і спрямований у бік обертання фігури S .

Якщо необхідно визначити швидкість іншої точки, наприклад, точки B , то вираз (2.65) запишемо так:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

На рис. 2.27 показано графічне розв'язання останнього векторного рівняння для визначення прискорення точки B .

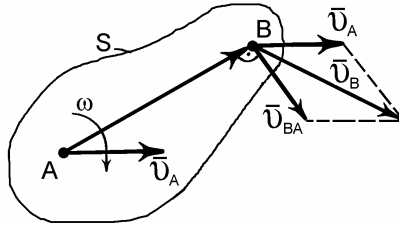


Рис. 2.27

**Теорема про проекції швидкостей
двох точок тіла на лінію, що їх з'єднує**

На підставі одержаних результатів розглянемо теорему про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на лінію, що їх з'єднує.

Проекції швидкостей двох довільних точок плоскої фігури на пряму лінію, що з'єднує ці точки, рівні між собою.

Це твердження логічно випливає із таких міркувань. Оскільки плоска фігура належить твердому тілу, то відстань між двома точками зберігається. Це можливо, якщо проекції швидкостей цих точок на цю відстань однакові. Проте, доведемо теорему аналітично.

На тілі, що рухається плоскопаралельно (рис. 2.28), покажемо швидкості точок A і B . Вважаємо точку A полюсом, навколо якого у відносному русі рухається вздовж кола радіусом AB точка B .

Згідно з виразом (2.65) визначимо вектор швидкості точки B :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Знайдемо проекції швидкостей \bar{v}_A та \bar{v}_B на пряму, яка з'єднує точки A і B .

$$\text{пр.}_{AB} \bar{v}_A = |Aa| = v \cdot \cos \alpha.$$

Проекція вектора швидкості \bar{v}_B на пряму AB дорівнює:

$$np_{.AB} \bar{v}_B = np_{.AB} \bar{v}_A + np_{.AB} \bar{v}_{BA} = |Bb|,$$

але $np_{.AB} \bar{v}_{BA} = 0$, оскільки $\bar{v}_{BA} \perp AB$.

Отже, $|Bb| = np_{.AB} \bar{v}_A = |Aa|$, тобто $|Bb| = |Aa|$,

або

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta. \quad (2.66)$$

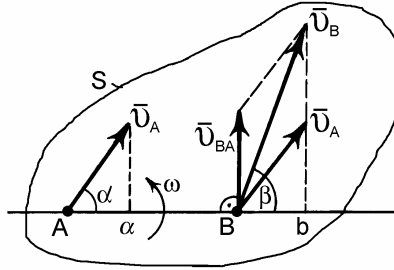


Рис. 2.28

Знаючи модуль v_A швидкості даної точки A і кут нахилу α вектора цієї швидкості, а також напрям вектора шуканої швидкості будь-якої іншої точки B (кут β), можна визначити модуль цієї швидкості:

$$v_B = \frac{v_A \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Визначення прискорень точок плоскої фігури

Для визначення прискорення довільної точки M плоскої фігури S візьмемо похідну за часом від векторного виразу (2.65):

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Аналізуємо цей вираз, де:

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A - \text{прискорення полюса } A;$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} - \text{кутове прискорення в обертальному русі}$$

фігури S відносно полюса A ;

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} - \text{відносна швидкість точки } M \text{ в}$$

обертальному русі фігури навколо полюса A .

Отже, вираз для прискорення точки M перепишемо так:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (2.67)$$

де $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MA}^{\tau}$ - обертальне прискорення точки M відносно полюса A ; $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MA}^n$ - доцентрове прискорення точки M відносно полюса A .

Повне відносне прискорення (рис. 2.29):

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n.$$

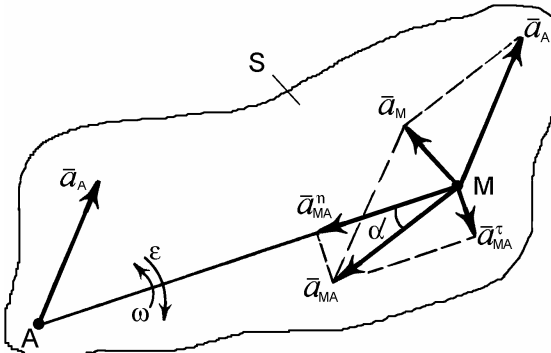


Рис. 2.29

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM.$$

Модуль повного відносного прискорення точки M навколо полюса A :

$$a_{MA} = AM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.68)$$

Остаточно, прискорення довільної точки M плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n. \quad (2.69)$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і відносного прискорення цієї точки у обертальному русі точки разом із фігурою навколо полюса. Останнє складається із двох доданків.

Напрями векторів зазначених складових прискорення:

– обертальне прискорення \bar{a}_{MA}^{τ} розміщене перпендикулярно до прямій AM і спрямоване у бік кутового прискорення ε , тобто, у бік напрямку відносної швидкості розглядуваної точки,

– доцентрове прискорення \bar{a}_{MA}^n розміщене на прямій AM і спрямоване у бік полюса A ,

– вектор повного прискорення \bar{a}_{MA} складає з прямою AM кут α (рис. 2.29), тангенс якого визначається так :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки величини ω і ε належать до всієї фігури S , то кут α для всіх точок фігури той самий. Відкладається кут завжди за напрямом кутової швидкості ω .



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?

2.2.4. Графоаналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла

Теорема про кінцеве переміщення плоскої фігури

Довільне переміщення плоскої фігури в її площині з одного положення в інше можна здійснити шляхом одного повороту в цій площині навколо точки, яка є центром кінцевого обертання.

Доведемо це твердження. Припустимо, що фігура з відрізком AB , незмінно зв'язаним з нею, рухаючись у площині рисунка, перейшла із першого положення в друге, а вказаний відрізок зайняв положення A_1B_1 (рис. 2.30).

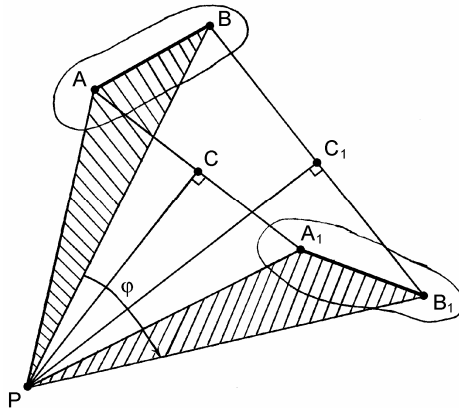


Рис. 2.30

З'єднаємо прямими лініями точки A , A_1 , і B , B_1 . Поділимо навпіл відрізки A_1B_1 і BB_1 , отримуючи точки C і C_1 , через які поставимо перпендикуляри до прямих AA_1 і BB_1 . Перпендикуляри перетинаються у точці P . З'єднаємо з точкою P кінці відрізків AB , A_1B_1 , отримуючи на схемі два трикутники ABP і A_1B_1P . Доведемо, що вказані трикутники дорівнюють. По-перше, вони рівнобедрені, оскільки для них відстані CP і C_1P є одночасно і висотою, і медіаною ($AP = A_1P$, $BP = B_1P$). По-друге, вони мають спільну вершину – точку P . Якщо врахувати, що $AB = A_1B_1$ (один і той же відрізок), то легко переконалися, що трикутник ABP дорівнює трикутнику A_1B_1P і якщо повернути трикутник ABP на кут φ , то він буде пристайним з трикутником A_1B_1P .

Отже, доведено, що з одного положення в друге фігура переведена шляхом одного повороту на кут φ .

Тим самим, доведена можливість існування і визначено положення центра кінцевого обертання (точка P).

Цілком очевидно, що у випадку відсутності перетину вказаних перпендикулярів центр знаходиться у нескінченності.

Це можливо тільки тоді, коли відрізки AB, A_1B_1 паралельні і лінії, що з'єднують їх відповідні точки, взагалі не перетинаються.

Миттєвий центр швидкостей

У разі плоскопаралельного руху тіла може існувати одна точка плоскої фігури, що розташована на самій фігурі або на її уявному продовженні, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Доведемо це.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоско-паралельний рух (рис. 2.31).

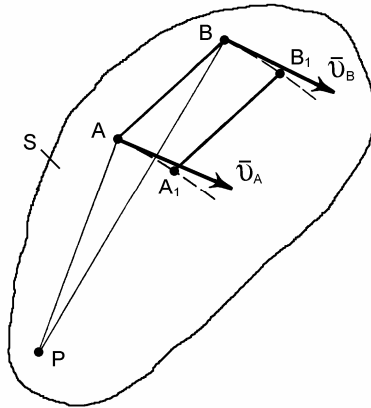


Рис. 2.31

Покажемо на тілі дві точки A і B та з'єднаємо їх прямою. За деякий елементарний проміжок часу Δt фігура переміститься у нове положення, а пряма AB займе положення A_1B_1 . Траєкторії руху точок A і B покажемо пунктирними лініями.

Оскільки положення відрізка прямої AB є нескінченно близьким до положення A_1B_1 , то хорди AA_1 і BB_1 прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані вектори швидкостей точок

A і B цієї фігури \bar{v}_A і \bar{v}_B . Поставивши перпендикуляри до векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , отримаємо точку їх перетину P . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей (МЦШ). Швидкість точки P за такого руху тіла дорівнює нулю і тверде тіло в даний момент часу обертається навколо цієї точки.

Вибравши точку A за полюс, дістанемо для швидкості точки P :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0 \Rightarrow \bar{v}_A = -\bar{v}_{PA};$$

$$v_A = \omega \cdot PA \Rightarrow PA = \frac{v_A}{\omega}.$$

Таким чином, із останнього виразу випливає, що МЦШ розміщений на перпендикулярі, проведеному з початку вектора швидкості точки A на відстані AP .

Миттєвим центром швидкостей називається точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю ($\bar{v}_P = 0$).

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрями швидкостей двох точок плоскої фігури. Для отримання картини швидкостей плоскої фігури в заданий момент часу потрібно знати швидкість однієї точки і напрям вектора швидкості іншої точки фігури.

Отже, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок фігури, то можна визначати величину і напрям швидкості будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей (рис. 2.32).

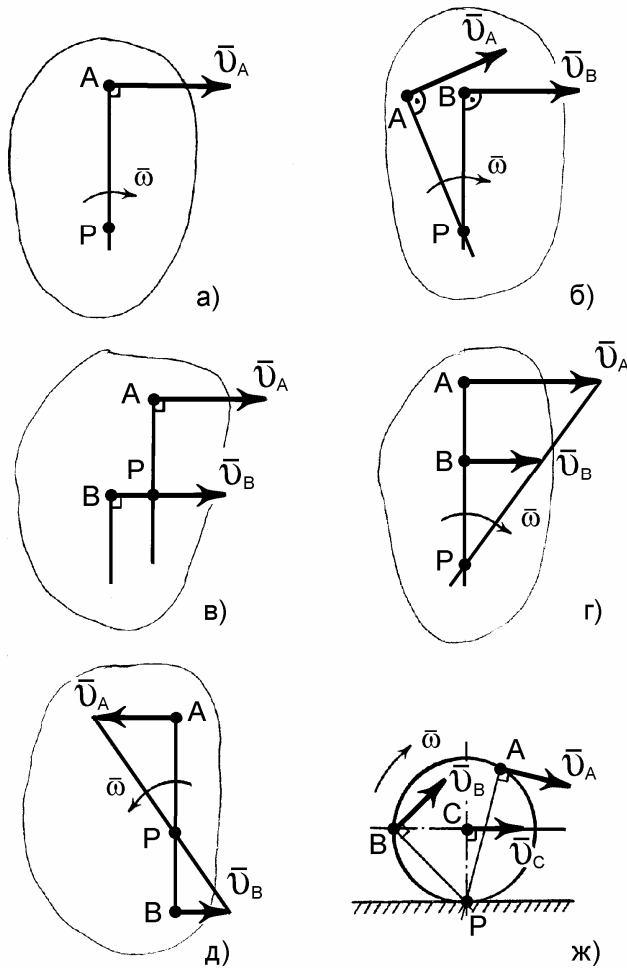


Рис. 2.32

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розміщений на перпендикулярі, який проведено до напрям вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.32а).

2. Миттєвий центр швидкостей фігури знаходиться в точці

перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямів векторів швидкостей цих точок (рис. 2.32б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.32в), а самі точки не розміщені на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє і фігура здійснює «миттєво-поступальний» рух, а швидкості усіх точок фігури в цей момент рівні. Це є ознакою миттєво-поступального руху тіла.

Зазначимо, миттєво-поступальний і «дійсно» поступальний рухи мають відмінності. Під час поступального руху має місце рівність швидкостей і прискорень усіх точок тіла на кінцевому проміжку часу. У разі миттєво-поступального руху рівними є лише швидкості точок тіла і тільки в заданий час, тобто лише в цю мить.

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані у один і той самий бік (рис. 2.32г) і відкладені у певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей розміщується у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з рис. 2.32г, можна записати:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані в різні боки (рис. 2.32д) і відкладені в певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також (як в п. 4) розміщений в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

6. У разі кочення фігури (наприклад, колеса) без проковзування по деякій нерухомій лінії миттєвим центром швидкостей є точка контакту фігури з цією лінією (рис. 2.32ж), а

швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки дотику P : $v_A \perp PA$; $v_B \perp PB$; $v_C \perp PC$.

Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстаней до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі практичні випадки визначення швидкостей точок фігури, що здійснює плоскопаралельний рух. Вибираючи миттєвий центр швидкостей за полюс і маючи на увазі, що швидкість його в даний момент часу дорівнює нулю, можна для будь-яких точок A і B цієї фігури скласти такі співвідношення:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює обертальній, **коловій швидкості** цієї точки відносно **миттєвого центра швидкостей**.

Якщо це так, то легко знайти модуль і напрям швидкості кожної точки фігури (якщо відомі положення МЦШ і кутова швидкість фігури):

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP,$$

звідки можна записати таке співвідношення:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Модулі швидкостей різних точок фігури в кожний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей.

Напрями векторів швидкостей різних точок фігури перпендикулярні прямим, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей, і спрямовані у бік обертання фігури (рис. 2.32ж).

Таким чином, швидкості різних точок плоскої фігури в будь-який момент часу розподіляються так, як би фігура обертається в цей момент часу навколо миттєвого центра швидкостей.

Це обертання відбувається навколо так званої осі обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до площини, в якій цей рух відбувається.

Значимо, що під час руху тіла положення миттєвого центра швидкостей змінюється в кожний момент.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, віднесене до рухомої або нерухомої системи координат, називають рухомою або нерухомою центроїдою.

Таким чином, нерухома центроїда – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на нерухомій площині Oxy (рис. 2.26), а рухома – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на рухомій площині $Ax'y'$.

Наприклад, нерухомою центроїдою для колеса (рис. 2.32ж), яке котиться без ковзання горизонталлю, є сама нерухома горизонтальна пряма, а рухомою центроїдою – коло, зв'язане з рухомою системою координат. У кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику – миттєвий центр швидкостей P .

Таку геометричну інтерпретацію плоско-паралельного рух надає теорема Пуансо:

|| *Під час руху плоскої фігури рухома центроїда котиться нерухомою без ковзання.*

Приклад 2.10

Кривошип OA довжиною 20 см обертається рівномірно з кутовою швидкістю $\omega = 10\text{ с}^{-1}$ і надає рух шатуну AB довжиною 100 см ; повзун B рухається по вертикалі.

Знайти кутову швидкість і кутове прискорення шатуну, а також прискорення повзуна B у момент, коли кривошип і шатун взаємно перпендикулярні і утворюють із горизонтальною віссю кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 2.33).

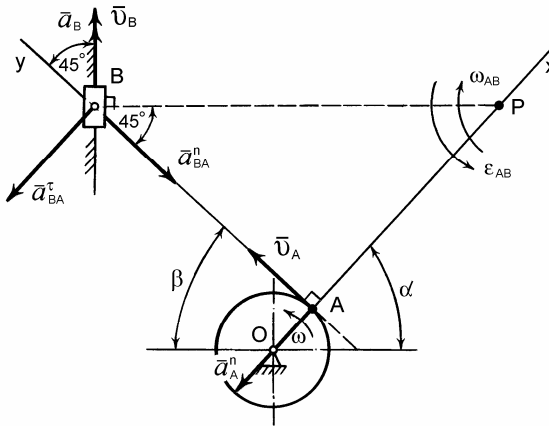


Рис. 2.33

Розв'язання

Відповідно до заданого напрямку обертання кривошипа OA визначимо спочатку модуль і напрям швидкості точки A кривошипа:

$$v_A = \omega \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200\text{ см/с} = 2,0\text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки B скористаємося теоремою про проєкції швидкостей двох точок на пряму, яка співпадає з шатуном AB . На підставі вихідних даних можемо записати:

$$v_A = v_B \cdot \cos 45^\circ.$$

Звідси знаходимо шукану швидкість:

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{0,707} = 2,83 \text{ м/с.}$$

Кутову швидкість шатуна AB визначимо за допомогою миттєвого центра швидкостей, положення якого в даний момент розміщується на перетині перпендикулярів, поставлених до векторів \vec{v}_A і \vec{v}_B :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2}{1} = 2,00 \text{ с}^{-1},$$

де $AP = AB = 1 \text{ м}$ – із трикутника ABP .

Якщо б з початку була визначена кутова швидкість ω_{AB} шатуна AB , то швидкість точки B можна було б знайти таким чином:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с.}$$

Як можна побачити, величина швидкості v_B , що визначена різними способами, однакова.

Визначимо далі прискорення точки B і кутове прискорення шатуна AB .

Запишемо векторне рівняння для прискорення точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n,$$

де $a_A^\tau = 0$, тому що кутова швидкість $\omega = const$;

$a_A^n = \omega^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 0,2 = 20 \text{ м/с}^2$ – нормальна складова прискорення точки A кривошипа AO , що спрямована до центра O (рис. 2.33);

$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$ – нормальна складова прискорення точки B у обертанні разом із шатуном відносно полюса A . Ця складова завжди спрямована до полюса A .

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ – дотична складова прискорення точки B під час обертання разом із шатуном відносно полюса A . Для

цього прискорення відомий тільки напрям: вектор \bar{a}_{BA}^{τ} перпендикулярний до відрізка AB . Зобразимо його на рис. 2.33 у припущенні, що кутове прискорення ε_{AB} спрямоване проти ходу стрілки годинника.

Що стосується прискорення точки B , то для нього також відомий тільки напрям. Очевидно, що вектор \bar{a}_B направлений вздовж напрямної повзуна B . Припускаємо, що спрямовано цей вектор догори (рис. 2.33).

Запишемо рівняння, що визначає прискорення точки B , на підставі виразу (2.69):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n.$$

Це рівняння є векторним і, як векторна величина, несе в собі подвійну інформацію – це модулі і напрями їх складових.

Перетворимо це рівняння з векторного на два алгебраїчних шляхом проєктування цього рівняння на осі координат, вибравши їх раціонально, щоб хоча б одне рівняння мало одну невідому. Наприклад, система координат Ax , як показано на рис. 2.33, задовольняє зазначеним вимогам. Знайдемо проєкції рівняння на осі Ax і Ay вибраної системи координат.

Проєкція на вісь Ax :

$$a_B \cdot \sin 45^\circ = -a_A^n - a_{BA}^{\tau},$$

проєкція на вісь Ay :

$$a_B \cdot \cos 45^\circ = -a_{BA}^n.$$

Останнє рівняння однозначно розв'язується відносно a_B :

$$a_B = -\frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = -\frac{4}{\cos 45^\circ} = -5,657 \text{ м/с}^2.$$

Знак мінус означає, що прискорення повзуна B спрямовано протилежно обраному раніше напрямку.

З першого рівняння визначимо a_{BA}^{τ} :

$$a_{BA}^{\tau} = -a_B \sin 45^{\circ} - a_A^n,$$

$$a_{BA}^{\tau} - (-5,657) \cdot \sin 45^{\circ} - 20 = -16,00 \text{ м/с}^2.$$

Отже, і дотична складова a_{BA}^{τ} спрямована протилежно прийнятому напрямку, оскільки вона також має знак мінус. Ця складова дорівнює: $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{BA} \cdot BA$,

звідси визначимо кутове прискорення ε_{BA} :

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{BA} = \frac{-16}{1} = -16,0 \text{ с}^{-2}.$$

Кутове прискорення ε_{BA} спрямоване протилежно прийнятому на рис. 2.33 напрямку.

Миттєвий центр прискорень

Миттєвим центром прискорень називається точка плоскої фігури, прискорення якої у цей момент часу дорівнює нулю.

Розглянемо спосіб знаходження положення миттєвого центра прискорень Q (рис. 2.34).

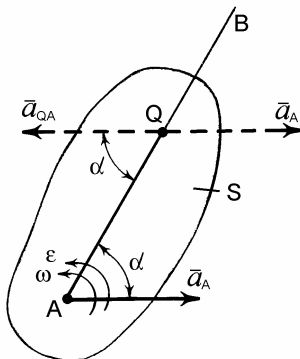


Рис. 2.34

За означенням $\vec{a}_Q = 0$. Беручи точку A за полюс, на підставі формули (2.69) запишемо:

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}; \Rightarrow 0 = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} \Rightarrow \bar{a}_A = -\bar{a}_{QA},$$

де \bar{a}_{QA} – повне прискорення точки в обертальному русі навколо полюса A , яке за напрямом протилежне \bar{a}_A , за модулем на підставі (2.68) дорівнює:

$$a_{QA} = a_A = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

На основі цього співвідношення визначимо відстань миттєвого центра прискорень від заданої точки A :

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (2.70)$$

З вектором прискорення \bar{a}_A точки A пряма AB утворює кут α , який визначається за формулою (2.53): $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

Таким чином, для визначення положення миттєвого центра прискорень Q (рис. 2.34) потрібно прискорення довільної точки фігури, наприклад точки A , повернути на кут α і на отриманій прямій відкласти відрізок, довжина якого визначається за формулою (2.70). Ця точка і є миттєвим центром прискорень.

Крім того, вектор \bar{a}_{QA} повинен відхилитись від прямої QA на кут α , тому, вектор \bar{a}_{QA} має бути паралельним вектору \bar{a}_A , але спрямованим у протилежний бік. Вектори прискорень всіх точок плоскої фігури спрямовані під однаковим кутом α до відрізків прямих, що з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень.

Кут повороту α відкладається у напрямі обертання фігури, якщо обертальний рух прискорений і – навпаки.

Для будь-якої іншої точки M тіла аналогічно можна записати:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ},$$

$$a_M = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Прискорення будь-якої точки тіла дорівнює її прискоренню у обертальному русі навколо миттєвого центра прискорень.

З наведених міркувань випливає:

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} = \frac{a_C}{QC} = \dots .$$

Прискорення точок тіла пропорційні їх відстаням до миттєвого центра прискорень.

Значимо, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей у загальному випадку руху тіла не збігаються.

Плани швидкостей і прискорень

Побудова планів швидкостей і прискорень – це один із способів графічного визначення швидкостей і прискорень точок плоскої фігури або плоского механізму. Розрізняють плани швидкостей і прискорень для окремої його ланки і для всього механізму загалом.

Плани будуються на підставі теореми про швидкості і прискорення точок тіла, що рухається плоскопаралельно.

План швидкостей

Планом швидкостей називається графічне зображення в масштабі **векторів швидкостей** точок системи тіл у даний момент часу, які відкладені з **полюса** (при цьому вектори відносних швидкостей з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей).

Нехай маємо плоску фігуру S , для якої задані швидкості трьох її точок A, B, C , що дорівнюють, відповідно, $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ (рис. 2.35а).

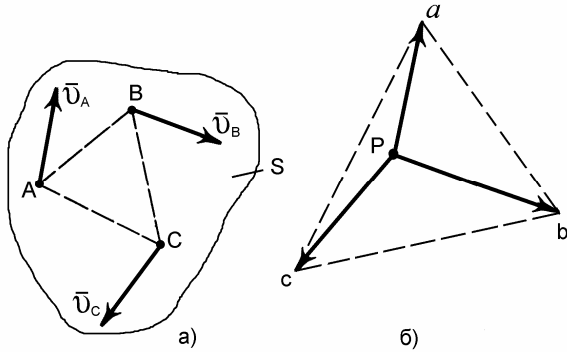


Рис. 2.35

Побудуємо план швидкостей для цієї фігури, для чого проведемо з довільного центра (полюс P) вектори \overline{Pa} , \overline{Pb} , \overline{Pc} , які зображують у деякому прийнятому масштабі швидкості точок A, B, C .

Отже, побудовано план швидкостей заданої фігури (рис. 2.35б). Для визначення модулів швидкостей зазначених точок необхідно прийняти масштабний коефіцієнт плану швидкостей. Тоді шукані швидкості:

$$\overline{v}_A = \overline{Pa}, \quad \overline{v}_B = \overline{Pb}, \quad \overline{v}_C = \overline{Pc}.$$

Розглянемо деякі властивості побудованого плану швидкостей. Так, з векторного трикутника Pab випливає, що:

$$\overline{Pb} = \overline{Pa} + \overline{ab} \quad \text{або} \quad \overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}.$$

З наведеної векторної рівності:

$$\overline{ab} = \overline{v}_{BA}.$$

Як легко побачити зі схеми (рис. 2.35а), вектор швидкості \overline{v}_{BA} перпендикулярний до прямої AB , а тому $\overline{ab} \perp \overline{AB}$.

Цілком аналогічно: $\overline{ac} \perp \overline{AC}$, $\overline{bc} \perp \overline{BC}$.

Звідси можна сформулювати першу властивість плану швидкостей.

Відрізки, що з'єднують кінці векторів на плані швидкостей, перпендикулярні до відрізків, які з'єднують відповідні точки тіла.

Знайдемо далі величини відносних швидкостей:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB, \quad v_{CA} = \omega \cdot AC, \quad v_{CB} = \omega \cdot BC,$$

Отже, їхні відрізки на плані швидкостей (рис. 2.35б):

$$ab = \omega \cdot AB, \quad ac = \omega \cdot AC, \quad bc = \omega \cdot BC.$$

З отриманих співвідношень можна скласти наступну пропорцію:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \omega.$$

На підставі цього можна сформулювати другу властивість плану швидкостей.

Відрізки, що з'єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, пропорційні відповідним відрізкам тіла, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює кутовій швидкості тіла.

Таким чином, трикутник ABC на тілі і Δabc на плані швидкостей подібні. Ця підстава дозволяє сформулювати третю властивість плану швидкостей.

Одноіменні фігури на плані швидкостей і на тілі подібні і повернуті відносно одна одної на прямий кут 90° у напрямі відносного обертання.

Якщо будувати план швидкостей для плоского механізму, то слід вважати, що це буде сукупність планів швидкостей окремих точок (шарнірів або точніше кінематичних пар) на ланках механізму з загальним полюсом P . Більш докладно методика побудови плану швидкостей надається далі на

конкретному прикладі кінематичного дослідження плоского механізму.

План прискорень

Планом прискорень називається сукупність векторів прискорень точок тіла або системи тіл, в якому з довільного центра, полюса плану, відкладені в масштабі вектори прискорень точок у даний момент часу.

План прискорень може бути побудований як для ланки механізму, так і для всього механізму, причому всі вектори відкладаються від загального полюса.

Побудова плану прискорень дещо подібна побудові плану швидкостей і зводиться до графічного розв'язування векторних рівнянь, які записують для кожної точки плоскої фігури, що рухається плоскопаралельно. Якщо взяти за приклад плоску фігуру S (рис. 2.35) і вважати, що відомо прискорення точки A , яку приймемо за полюс, то для визначення прискорення точки B необхідно скласти, а потім графічно розв'язати векторне рівняння (2.69):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Таким чином, для побудови плану прискорень, тобто для визначення прискорення точки B , необхідно визначити величини і напрями векторів: \bar{a}_A , \bar{a}_{BA}^n , \bar{a}_{BA}^τ .

Після цього необхідно будувати план прискорень. Так, спочатку необхідно з полюса плану прискорень π відкласти у масштабі відоме за напрямом прискорення точки A – \bar{a}_A .

Потім знайти величину \bar{a}_{BA}^n і до кінця вектора \bar{a}_A приєднати напрям вектора \bar{a}_{BA}^n і відкласти його величину також у прийнятому масштабі з напрямом від точки B до точки A .

До кінця вектора \bar{a}_{BA}^n приєднуємо напрям вектора \bar{a}_A^τ .

Після цього з полюса π необхідно провести відомий напрям прискорення точки B до перетину з напрямом попереднього вектора і векторний многокутник замкнеться.

Виконавши наведене, вважаємо, що план прискорень для двох точок A і B побудований. У даному випадку повністю розв'язане векторне рівняння.

Докладно методику побудови плану прискорень для конкретного плоского механізму наведено нижче на прикладі.

Методика побудови планів швидкостей і прискорень

Розглянемо докладно методику побудови плану швидкостей і прискорень на прикладі простого кривошипно-шатунного механізму для положення, яке визначається кутом φ повороту кривошипа OA , зображеного на схемі (рис. 2.36).

Вважаються заданими кутова швидкість ω , напрям обертання кривошипа OA і лінійні розміри механізму.

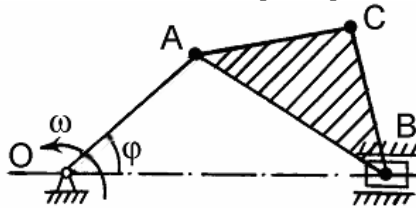


Рис. 2.36

У цьому механізмі шатун ABC виготовлений у вигляді твердого трикутного тіла, до якого в шарнірі C можна приєднати ще один додатковий шатун. Оскільки повзун B розташований на одній прямій з віссю обертання кривошипа (точка O), то такий механізм називається аксіальним.

Для побудови планів швидкостей і прискорень кінематична схема або план кривошипно-шатунного механізму

мають бути зображені у масштабі.

Необхідно визначити за допомогою планів швидкостей і прискорень швидкості і прискорення точок A , B і C , що належать різним ланкам механізму, а також кутові швидкість і прискорення шатуну ABC .

Відразу слід зауважити, що у кривошипно-шатунному механізмі кривошип OA здійснює рівномірний обертальний рух, шатун ABC – плоскопаралельний, а повзун B – поступальний рух.

План швидкостей

Починати побудову плану швидкостей необхідно з визначення швидкості точки A , що належить кривошипу, який обертається рівномірно.

$$v_A = \omega \cdot l_{OA}, \text{ де } l_{OA} - \text{довжина кривошипа } OA.$$

Вектор швидкості \bar{v}_A напрямлений перпендикулярно до радіусу OA і спрямований у бік обертання кривошипа. Для зображення цього вектора (як і інших векторів швидкостей) обираємо масштабний коефіцієнт швидкостей і в цьому масштабі з деякого центра P відкладаємо вектор \bar{Pa} (рис. 2.37) довжиною: $Pa = \frac{v_A}{k_v}$, де $k_v \left[\frac{м/с}{мм} \right]$ – масштабний коефіцієнт швидкостей. Напрямок цього вектора знімаємо зі схеми механізму (рис. 2.36).

Переходимо далі до визначення швидкостей інших точок механізму. Для точки B , прийнявши точку A за полюс, можна скласти і далі графічно розв'язати таке рівняння:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA},$$

де \bar{v}_B – вектор швидкості точки B (його напрям горизонтальний); \bar{v}_A – швидкість полюса A (її вектор

перпендикулярний OA і вже зображений на плані швидкостей); \bar{v}_{BA} – швидкість точки B під час відносного обертового руху шатуна навколо полюса A (вектор цієї швидкості спрямований перпендикулярно до шатуна AB). Вектор швидкості \bar{v}_B точки B спрямований паралельно напрямним, в яких встановлено повзун B , – горизонтально.

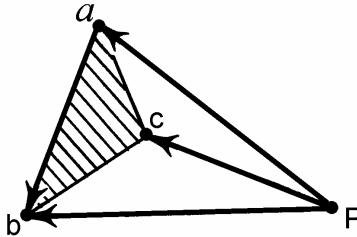


Рис. 2.37

Розв'яжемо графічно наведене рівняння, для чого на плані швидкостей з полюса P проводимо пряму, паралельну напрямку вектора швидкості \bar{v}_B , а з точки a – пряму, паралельну вектору \bar{v}_{BA} , до перетину з прямою Pb .

Тоді вектор \overline{ab} в обраному масштабі зображує швидкість точки u відносному обертовому русі шатуна навколо полюса A – \bar{v}_{BA} , а вектор \overline{Pb} – швидкість точки B в поступальному русі – \bar{v}_B .

Точка C належить шатуну ABC , для якого вже знайдені швидкості двох точок, тому можна знайти і швидкість u_C . Використовуючи метод подібності, складаємо пропорції:

$$\frac{AB}{|ab|} = \frac{BC}{|bc|} = \frac{AC}{|ac|}.$$

У цій пропорції невідомими є відрізки $|bc|$ і $|ac|$, які

можна визначити: $|bc| = \frac{BC \cdot |ab|}{AB}$, $|ac| = \frac{AC \cdot |ab|}{AB}$.

Довжиною відрізків $|bc|$ і $|ac|$ з точок a і b плану швидкостей робимо засічки до їх перетину.

Одержаний в результаті такої побудови Δabc буде подібним ΔABC на схемі механізму.

Але тут потрібно зауважити, що відкладання вказаних відрізків можна зробити як зліва від лінії ab , так і справа. Правильним буде той варіант, у якому послідовність літер при обході контуру ΔABC на схемі механізму і Δabc на плані швидкостей або прискорень ідентична.

Якщо розставити вказаним чином на плані швидкостей стрілки, то можна переконатись, що план швидкостей кривошипно-шатунного механізму побудовано.

Насамкінець, визначимо кутову швидкість ω_{ABC} шатуна ΔABC . Для цього необхідно використати співвідношення:

$$\omega_{ABC} = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}.$$

З плану швидкостей (рис. 2.37) необхідно заміряти відрізок ba , помножити його на масштабний коефіцієнт k_v і тим самим знайти значення відносної швидкості v_{BA} .

План прискорень

Як і план швидкостей, план прискорень починаємо будувати з визначення прискорення точки A . Враховуємо, що кривошип OA обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω , тому дотична складова його прискорення a_A^τ дорівнюватиме нулю, а повне прискорення:

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot l_{AO}.$$

Вектор прискорення \bar{a}_A спрямований вздовж кривошипа

OA до центра O . Обираємо масштабний коефіцієнт прискорень і в цьому масштабі з деякого центра (полюса) π (рис. 2.38) відкладаємо відрізок $\overline{\pi a}$:

$$\pi a = \frac{a_A}{k_a}, \text{ де } k_a \left[\frac{m/c^2}{mm} \right] - \text{масштабний коефіцієнт плану прискорень.}$$

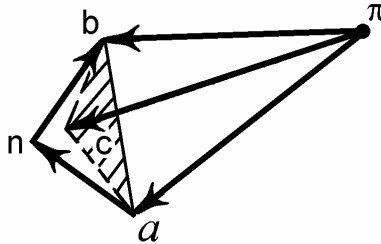


Рис. 2.38

Далі визначаємо прискорення точки B . Приймаємо точку A за полюс, складаємо і графічно розв'язуємо векторне рівняння:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^{\tau},$$

де \bar{a}_B – вектор прискорення точки B (має горизонтальний напрям, оскільки повзун рухається в горизонтальних напрямках); \bar{a}_A – вектор прискорення полюса A ; \bar{a}_{BA}^n – вектор нормального прискорення точки B у відносному обертальному русі навколо полюса A (спрямоване вдовж ланки AB до полюса A); \bar{a}_{BA}^{τ} – вектор дотичного прискорення точки B навколо полюса A (спрямоване перпендикулярно до нормального).

Визначаємо складові наведеного векторного рівняння. Модуль нормального (доцентрового) прискорення

$$a_{BA}^n = \omega_{ABC}^2 \cdot AB.$$

Відрізок $an = \frac{a_{BA}^n}{k_a}$ відкладаємо паралельно прямій AB із

точки a і, якщо дивиться на схему механізму, то спрямовуємо його від точки B до точки A .

Далі з точки n поставимо перпендикуляр до $|an|$, тобто, проводимо напрям дотичного прискорення \bar{a}_{BA}^τ до перетину з прямою $|pb|$, яка паралельна вектору прискорення \bar{a}_B .

Вектор $\bar{\pi b}$ зображує прискорення \bar{a}_B точки B в обраному масштабі, а вектор $|\bar{nb}|$ – прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Для знаходження прискорення точки C використовуємо метод подібності, як це зроблено для плану швидкостей.

Використовуючи значення лінійних розмірів механізму, а також відрізка ab , що у прийнятому масштабі зображує прискорення a_{BA} , складемо пропорцію і визначимо відповідні відрізки:

$$\frac{AB}{|ab|} = \frac{BC}{|bc|} = \frac{AC}{|ac|}.$$

Використовуючи значення відрізків bc і ac на плані прискорень, методом засічок знаходимо положення точки c .

З'єднавши точку c з полюсом π знаходимо величину і напрям прискорення точки C кривошипно-шатунного механізму. І в даному разі Δabc буде подібним ΔABC .

Насамкінець, знайдемо кутове прискорення ε_{ABC} шатуна ABC за допомогою співвідношення: $\varepsilon_{ABC} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}$.

З плану прискорень (рис. 2.38) необхідно виміряти відрізок nb , помножити його на масштабний коефіцієнт і тим самим знайти значення відносного дотичного прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.11

Розглянемо приклад застосування викладених вище способів визначення розподілу швидкостей у плоскій фігурі.

Механізм, зображений на рис. 2.39, складається з кривошипа OA , який обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю $\omega_0 = 0,5$ рад/с.

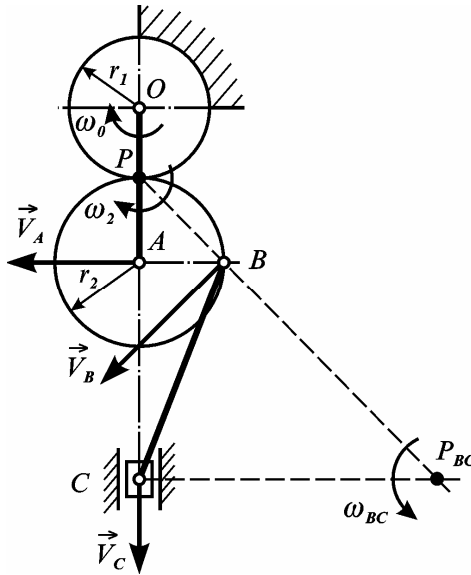


Рис. 2.39

Зубчасте колесо радіусом $r_2 = 20$ см котиться без проковзування по поверхні нерухомого колеса радіусом $r_1 = 10$ см і приводить до руху з'єднаний із ним шарнірно шатун $BC = 20\sqrt{26}$ см. Повзун C рухається вздовж вертикалі.

Визначити кутову швидкість шатуна і швидкості його точок B і C в момент, коли радіус AB перпендикулярний до кривошипа OA .

Розв'язання

Кутову швидкість шатуна, що здійснює плоско-паралельний рух, можна знайти, якщо відомі швидкості двох його точок. Точка B є спільною для шатуна і рухомого колеса. Тому необхідно розглянути спочатку розподіл швидкостей у рухомому колесі. Точка P зчеплення рухомого і нерухомого коліс є миттєвим центром швидкостей рухомого колеса, що є підставою, щоб записати:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Швидкість точки A легко знайти, розглядаючи обертальний рух кривошипа OA :

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0(r_1 + r_2) = 0,5 \cdot 30 = 15 \text{ см/с.}$$

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP}{AP} = \frac{v_A \cdot r_2 \sqrt{2}}{r_2} = 15\sqrt{2} \text{ см/с.}$$

Цей самий результат можна дістати, якщо скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки:

$$(\bar{v}_A)_{np. AB} = (\bar{v}_B)_{np. AB}, \quad \text{або} \quad v_A = v_B \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для визначення швидкості точки C і кутової швидкості шатуна побудуємо миттєвий центр швидкостей шатуна BC . Він знаходиться в точці P_{BC} перетину прямих BP_{BC} і CP_{BC} , перпендикулярних до векторів швидкостей точок B і C . На підставі методу подібності:

$$\frac{v_B}{BP_{BC}} = \frac{v_C}{CP_{BC}} = \omega_{BC}.$$

$$v_C = \frac{v_B CP_{BC}}{BP_{BC}}.$$

Елементарні геометричні розрахунки дають змогу визначити $CP_{BC} = 120 \text{ см}$, $BP_{BC} = 100\sqrt{2} \text{ см}$:

$$v_C = \frac{15\sqrt{2} \cdot 120}{100\sqrt{2}} = 18 \text{ см/с};$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_C}{CP_{BC}} = \frac{18}{120} = 0,15 \text{ рад/с}.$$

Приклад 2.12

Розглянемо застосування теореми про розподіл прискорень у тілі під час плоскопаралельного руху.

У механізмі, зображеному на рис. 2.40, кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухомої осі O і приводить до руху колеса II, що котиться без ковзання по поверхні колеса I. Радіуси коліс однакові. Знайти прискорення точки N колеса II.

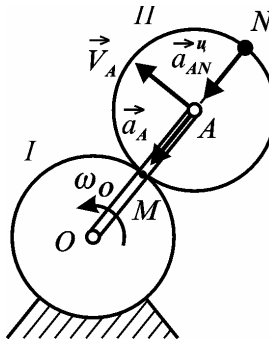


Рис. 2.40

Розв'язання

Згідно з теоремою, прискорення довільної точки плоскої фігури складається з прискорення полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса.

Полюс слід вибрати в точці, прискорення якої відоме, або його легко визначити з умови задачі.

Такою точкою є точка A , швидкість якої є сталою:
 $v_A = \omega_0 \cdot OA$.

Тому прискорення точки A дорівнює тільки нормальному прискоренню і напрямлене від точки A до центра O кривошипа OA :

$$a_A = 2\omega_0^2 r.$$

Щоб знайти прискорення \vec{a}_{AN} , згадаємо, що:

$$\vec{a}_{AN} = \vec{a}_{AN}^{ob} + \vec{a}_{AN}^y,$$

$$\text{де } a_{AN}^{ob} = \varepsilon \cdot AN; a_{AN}^y = \omega^2 AN.$$

Тут ω і ε – миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення колеса II, які треба визначити.

З умови кочення без ковзання випливає, що швидкість точки M колеса II дорівнює нулю, тому вона є миттєвим центром швидкостей колеса II.

Тоді миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_A}{AM} = \frac{v_A}{r} = 2\omega_0 = const$$

і миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

$$\text{Отже, } a_{AN}^{ob} = 0; a_{AN}^y = \omega^2 \cdot AN = 4\omega_0^2 \cdot r.$$

Таким чином, прискорення точки N складається з двох векторів \vec{a}_A і \vec{a}_{AN}^y , напрямлених уздовж спільної прямої в один бік. Додаючи їх, маємо:

$$a_N = 6\omega_0^2 r.$$

Вектор \vec{a}_N напрямлений уздовж прямої NA від точки N до точки A .

Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1

Визначити кутову швидкість шатуна AB механізму, зображеного на рис. 2.41, якщо швидкість точки A дорівнює 3 м/с , а довжина шатуна $AB = 3 \text{ м}$.

Відповідь: $1,15 \text{ рад/с}$.

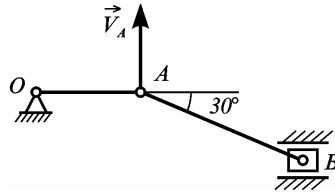


Рис. 2.41

Задача 2.

Швидкість тягара 1 дорівнює $0,5 \text{ м/с}$. Визначити кутову швидкість рухомого блока 2, якщо $R_2 = R_1 = 0,1 \text{ м}$ (рис. 2.42).

Відповідь: $2,5 \text{ рад/с}$.

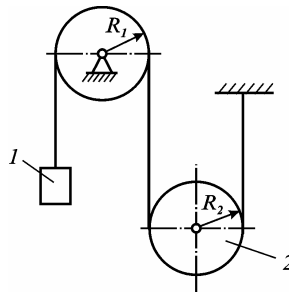


Рис. 2.42

Задача 3

Барaban 1 обертається за законом $\varphi = 0,1t^2$. Визначити прискорення тягара 2, якщо радіус $r = 0,2 \text{ м}$. (рис. 2.43).

Відповідь: $0,02 \text{ м/с}^2$.

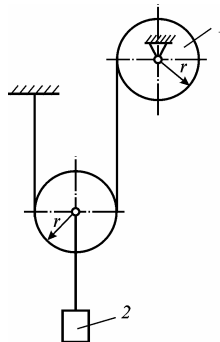


Рис. 2.43



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який рух тіла називають плоскопаралельним?
2. У якій точці слід вибирати полюс?
3. Чи залежать від вибору полюса характеристики поступального руху, обертального руху?
4. Чому дорівнює швидкість довільної точки тіла під час плоскопаралельного руху?
5. Що називають миттєвим центром швидкостей? Доведіть його існування.
6. Яке співвідношення існує між швидкостями точок тіла, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей?
7. Чому дорівнює прискорення точки тіла під час плоскопаралельного руху?
8. Які властивості має прискорення обертального руху точки навколо полюса?
9. Що називають миттєвим центром прискорень?
10. Чи можуть збігатися миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр прискорень?
11. Які способи для визначення положення миттєвого центра швидкостей ви знаєте?
12. Що таке плани швидкостей і прискорень? Як вони будуються?
13. Який порядок кінематичного аналізу механізму?
14. Які властивості планів швидкостей і прискорень?
15. Наведіть приклади плоскопаралельного руху тіл із техніки.

2.3. Обертання твердого тіла відносно нерухомої точки (сферичний рух)

2.3.1. Визначення положення тіла. Кути Ейлера

Під час обертання твердого тіла відносно однієї нерухомої точки всі інші точки тіла рухаються колами, розміщеними на поверхнях сфер, окреслених із нерухомої точки.

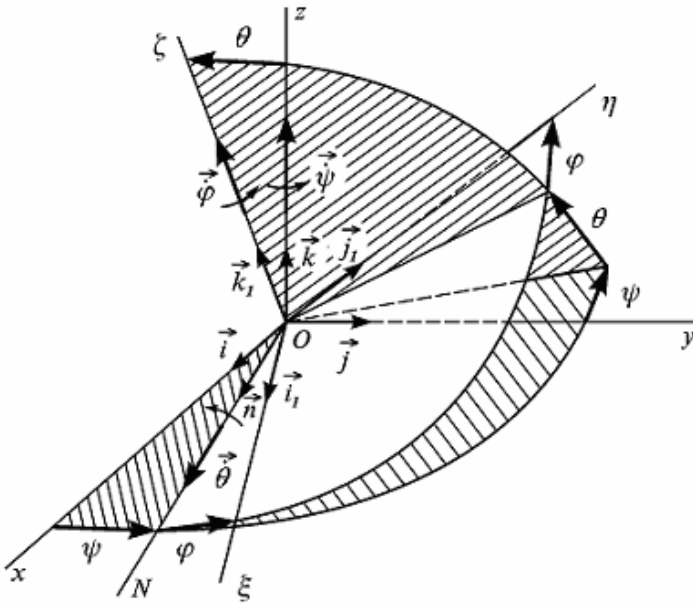


Рис. 2.44

Однією із головних задач під час вивчення сферичного руху є знаходження величин, які характеризують цей рух: закон руху тіла, кутові швидкість і прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення точок тіла.

Нехай тіло рухається навколо нерухомого центра O (рис. 2.44).

Виберемо нерухому ортогональну координатну систему $Oxyz$, відносно якої вивчається рух тіла, і рухому систему $O\xi\eta\zeta$, яку жорстко зв'яжемо з обертовим тілом. Положення системи $O\xi\eta\zeta$ однозначно визначає положення тіла. Початок обох систем координат розмістимо у нерухомому центрі O .

Для визначення положення обертового тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ необхідно задати відносно цієї системи положення рухомої системи координат $O\xi\eta\zeta$, скріпленої з рухомим тілом. Припустимо, що в початковий момент координатні осі ортогональних систем збігаються. Для переміщення тіла з однією нерухомою точкою Ейлер запропонував наступну теорему:

Довільне переміщення твердого тіла відносно нерухомої точки можна виконати трьома послідовними поворотами тіла відносно трьох спеціально вибраних осей, що проходять через нерухому точку.

Перший поворот на кут ψ виконуємо відносно осі Oz . Тоді вісь $O\xi$ займе проміжне положення, що співпадає з віссю ON , яку називають лінією вузлів. Другий поворот на кут θ виконуємо відносно лінії вузлів ON . В цьому разі площина $O\xi\eta$ суміститься зі своїм кінцевим положенням, осі $O\xi$ і $O\eta$ займуть проміжні положення, а вісь $O\zeta$ – кінцеве. Третій поворот виконуємо відносно осі $O\zeta$ на кут φ . Рухома система координат $O\xi\eta\zeta$ займає кінцеве положення.

Таким чином, положення тіла або рухомих осей координат x, y, z (рис. 2.44) відносно нерухомої системи відліку можна визначити трьома кутами Ейлера, які мають такі позначення і назви:

$$\begin{aligned}\psi &= \angle xON, \\ \theta &= \angle zO\xi, \\ \varphi &= \angle NO\xi.\end{aligned}$$

1. ψ – кут прецесії, зміна якого означає обертання тіла відносно осі Oz , яка називається віссю прецесії;

2. θ – кут нутації, зміна якого характеризує обертання тіла відносно лінії вузлів ON , яка є віссю нутації;

3. φ – кут власного обертання, зміна якого означає обертання тіла відносно осі $O\xi$, яка є віссю власного обертання.

Кут ψ , який визначає положення лінії вузлів ON відносно нерухомої координатної осі Ox , вважається додатним, якщо він відраховується у разі повороту лінії вузлів ON проти годинникової стрілки, якщо дивитися назустріч осі Oz .

Кут θ – кут між координатними площинами $\xi O\eta$ і xOy , який можна вимірювати між перпендикулярами до вказаних площин – $O\xi$ і Oz . Додатний напрям кута θ – поворот проти годинникової стрілки осі Oz навколо точки O , якщо дивитися назустріч лінії вузлів ON . Кут відраховується від осі Oz . Для повного визначення положення даного тіла відносно нерухомої системи $Oxyz$ необхідно задати кут між рухомою віссю Ox і додатним напрямом лінії вузлів ON – кут власного обертання φ . Цей кут вважається додатним, якщо він змінюється проти годинникової стрілки, дивлячись назустріч осі Oz .

У разі зміни кута φ тіло обертається навколо осі власного обертання $O\xi$, яка перпендикулярна площині, де розташовані прями ON і $O\xi$, що утворюють цей кут. Таким чином, кут φ визначає положення рухомої координатної осі $O\xi$ відносно лінії вузлів ON .

Кути Ейлера широко застосовують в теорії гіроскопа. Рух гіроскопа, симетричного тіла з нерухомою точкою на осі

симетрії, яке дуже швидко (30...50 тисяч об/хв.) обертається навколо цієї осі, можна уявити складеним із трьох рухів, які визначаються кутами ψ , θ , φ . Зміна кутів ψ і θ має швидкість на 1–2 порядки нижче, ніж кута власного обертання φ .

У разі обертання тіла навколо нерухомої точки в загальному випадку змінюються всі три кути Ейлера: ψ , θ , φ . Ці кути є незалежними параметрами, які визначають положення тіла під час сферичного руху відносно нерухомої системи координат. Задання трьох кутів Ейлера як функцій часу є необхідною і достатньою умовою для опису сферичного руху. Отже, для визначення положення тіла з однією нерухомою точкою у будь-який момент часу необхідно задати кути Ейлера як однозначні і неперервні функції часу:

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \quad (2.71)$$

Рівняння (2.71) є кінематичними рівняннями обертання твердого тіла відносно нерухомої точки. Якщо ці рівняння задані, то в довільний момент часу може бути визначено положення твердого тіла відносно нерухомої системи координат.

Дійсно, відкладемо спочатку в площині xOy від осі Ox кут прецесії ψ проти годинникової стрілки, якщо він додатний, і визначимо положення лінії вузлів ON . Далі відкладемо кут θ від осі Oz , площина якого перпендикулярна лінії вузлів ON , і визначимо положення осі $O\xi$ власного обертання. І, нарешті, відкладемо у площині $\xi O\eta$ кут φ від лінії вузлів проти годинникової стрілки, якщо він додатний, і визначимо положення осі $O\xi$. Положення тіла визначено однозначно.

2.3.2. Теорема Ейлера – д'Аламбера

Довільне елементарне переміщення тіла, яке має одну нерухому точку, може здійснюватись за одним елементарним поворотом відносно деякої спеціально вибраної миттєвої осі обертання, що проходить через цю нерухому точку.

Допустимо, що положення тіла, яке обертається відносно точки O , визначається кутами Ейлера ψ , θ , φ (рис. 2.44).

Тоді переміщення тіла за елементарний проміжок часу можна уявити як сукупність поворотів на кути $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$ відносно осі Oz_1 , лінії вузлів OK і осі Oz відповідно. Додаючи ці три елементарні повороти, можна отримати одне дійсне елементарне переміщення тіла.

Спочатку розглянемо, яким буде результат додавання поворотів навколо осей Oz і Oz_1 (рис. 2.45).

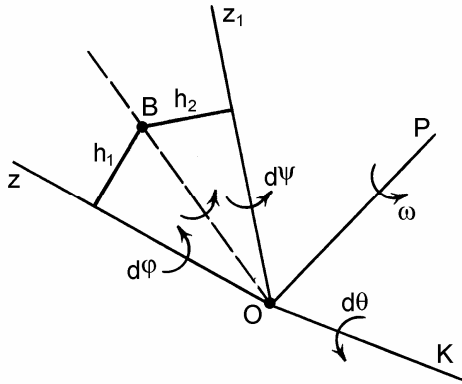


Рис. 2.45

У разі повороту на кут $d\varphi$ будь-яка точка тіла, що розміщена в площині кутового сектора zOz_1 , одержить елементарне переміщення, перпендикулярне цій площині і чисельно дорівнює $h_1 d\varphi$, де h_1 – відстань точки до осі Oz .

Одночасно у разі повороту навколо осі Oz_1 та ж точка одержить протилежне переміщення, яке чисельно дорівнює $h_2 d\psi$.

Всередині площини кутового сектора zOz_1 обов'язково знайдеться така точка B , для якої ці переміщення рівні: $h_1 d\varphi = h_2 d\psi$. Це означає, що підсумкове переміщення цієї точки дорівнюватиме нулю, тобто, точка B буде нерухомою. Отже, через дві нерухомі точки O і B можна провести пряму OB , яка, за визначенням, є віссю обертання тіла, яке становить суму елементарних обертань відносно осей Oz і Oz_1 .

Розглядаючи обертання навколо осі OB і лінії вузлів OK , аналогічно дійдемо висновку, що елементарні повороти відносно осей OB і OK еквівалентні елементарному повороту навколо деякої осі OP , що проходить через точку O .

Вісь OP , елементарним поворотом відносно якої тіло переміщується із даного положення в сусіднє, нескінченно близьке даному, носить назву миттєвої осі обертання або осі скінченного повороту.

Зауважимо, що миттєва вісь обертання відрізняється тим, що її положення змінюється у просторі як відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$, так і відносно рухомої координатної системи $O\xi\eta\zeta$. Кожне наступне обертання відбувається відносно нової миттєвої осі обертання, яка, безумовно, перетинає нерухому точку O .

Таким чином, рух твердого тіла навколо нерухомої точки складається із серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей обертання. Під час руху тіла миттєва вісь обертання окреслює в просторі дві конічні поверхні.

Геометричне місце миттєвих осей обертання, віднесене до

нерухомої системи відліку, називається *нерухомим аксоїдом*. Останній є кінечною поверхнею з вершиною у нерухомій точці тіла, тому що кожна миттєва вісь перетинає нерухому точку.

Геометричне місце миттєвих осей в обертовому тілі, віднесене до рухомої системи координат, називають *рухомим аксоїдом*. Для кожного руху твердого тіла навколо нерухомої точки маємо пару аксоїдів, вершини яких збігаються з нерухомою точкою, а спільна твірна в кожний момент часу є миттєвою віссю обертання.

Отже, під час сферичного руху *рухомий аксоїд котиться нерухомим без ковзання*, оскільки загальна твірна цих аксоїдів у кожний момент часу править за миттєву вісь, відносно якої обертається тіло, тому *всі точки осі нерухомі*. Якщо рухомий аксоїд котиться без ковзання нерухомим аксоїдом, то моделюється рух тіла навколо нерухомої точки.

Коченням без проковзування називають такий рух двох тіл, за якого геометричні поверхні дотикаються в спільних точках, а *швидкості спільних точок обох тіл* відносно нерухомої системи координат *однакові*. Оскільки спільні точки аксоїдів розміщені на миттєвій осі обертання, то швидкості точок рухомого аксоїда, що збігаються з точками нерухомого аксоїда, дорівнюють нулю.

Подібні міркування засновані на положеннях *теорему Пуансо*, яку можна розглядати як один із засобів *синтезу* просторових *механізмів*, основною метою побудови яких є здійснення заданого руху.

2.3.3. Кінематичні характеристики сферичного руху тіла

Кутова швидкість

Зробимо спочатку визначення кутової швидкості тіла, що обертається відносно нерухомої точки.

Кутова швидкість, з якою відбувається елементарний поворот тіла навколо миттєвої осі обертання, називається кутовою швидкістю тіла в даний момент часу або миттєвою кутовою швидкістю тіла.

Згідно з цим визначенням, якщо тіло повернеться відносно миттєвої осі на деякий нескінченно малий кут $d\varphi$, то миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутову швидкість можна зобразити у вигляді вектора $\bar{\omega}$, спрямованого вздовж миттєвої осі OP (рис. 2.46).

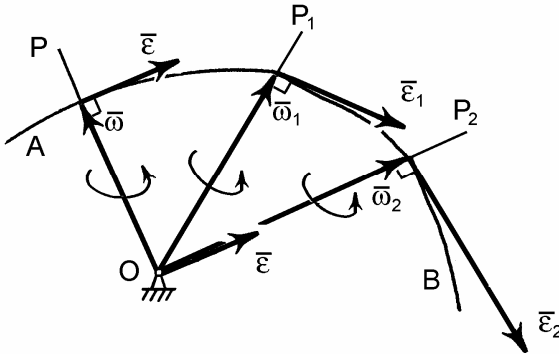


Рис. 2.46

Якщо врахувати те, що положення миттєвої осі OP безперервно змінюється, то вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ буде змінюватися протягом часу як за модулем, так і за напрямом, а кінець вектора описуватиме деяку довільну криву AB , яка є годографом вектора $\bar{\omega}$.

На рис. 2.46 показано різні положення миттєвої осі обертання OP , OP_1 , OP_2 і розташовані на них вектори кутової швидкості $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$.

Кутове прискорення

Кутове прискорення тіла в даний момент часу або миттєве кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$, яке характеризує зміну протягом часу кутової швидкості $\bar{\omega}$ за модулем і напрямом, є векторною величиною і чисельно дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Для знаходження положення вектора кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ можна використати таку аналогію. Як відомо, вектор швидкості \bar{v}_K довільної точки дорівнює похідній від радіуса-вектора \bar{r}_k цієї точки за часом t і спрямований вздовж дотичної до траєкторії точки. У цьому випадку траєкторія точки є годографом кінців радіусів-векторів \bar{r}_k .

За аналогією, вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ спрямований за дотичною до кривої годографа AB у відповідній точці (рис. 2.46). Тобто, кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ можна вважати як швидкість, з якою кінець вектора $\bar{\omega}$ переміщується вздовж кривої AB , а за напрямом співпадає з дотичною до кривої у відповідній точці.

Таким чином, вектор миттєвого кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ має напрям похідної за часом від вектора миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$, він паралельний дотичній до годографа векторної функції $\bar{\omega}(t)$. Зображати кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ необхідно вектором, який паралельний дотичній до годографа векторів кутової швидкості $\bar{\omega}$ у даній точці, але прикладений до нерухомої точки O .

2.3.4. Швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі. Кінематичні рівняння Ейлера

Оскільки тіло, що рухається навколо нерухомої точки, має в кожен момент часу миттєву вісь обертання OP , яка перетинає

нерухомий центр O і навколо якої відбувається елементарний поворот тіла із кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, то векторна формула Ейлера (2.56), одержана для обертального руху навколо нерухомої осі, справедлива і для сферичного руху тіла (рис. 2.47).

Отже, швидкість \bar{v} довільної точки M тіла у сферичному русі визначається як векторний добуток векторів $\bar{\omega}$ і \bar{r} :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де \bar{r} – радіус-вектор точки M відносно нерухомої точки O .

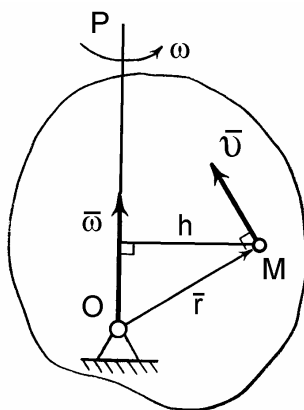


Рис. 2.47

Модуль швидкості точки:

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega \cdot h,$$

де h – найкоротша відстань до миттєвої осі OP .

Таким чином, швидкості точок тіла у сферичному русі пропорційні відстаням до миттєвої осі. Вектор *миттєвої швидкості* перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори $\bar{\omega}$ і \bar{r} , тобто, відстані h і спрямований у напрямі обертання.

Як відомо, швидкість точки є першою похідною від

радіуса-вектора \bar{r} цієї точки за часом (2.4): $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$. У той же

час, за векторною формулою (2.56) швидкість дорівнює:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Довжина радіуса-вектора \bar{r} , як відстань між двома точками твердого тіла, є сталою величиною під час руху тіла. Отже, цей вираз можна розглядати як формулу для обчислення похідної за часом від вектора, модуль якого сталий, а зміна його відбувається лише внаслідок обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ разом із тілом навколо нерухомої точки.

Якщо жорстко скріпити рухому систему координат $O\xi\eta\zeta$ з тілом, що обертається відносно нерухомої точки з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, то для одиничних векторів $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$, спрямованих по цих осях, модулі яких сталі, на підставі (2.56) можна записати:

$$\frac{d\bar{i}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}_1, \quad \frac{d\bar{j}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}_1, \quad \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}_1. \quad (2.72)$$

Рівності (2.72) називають формулами Пуассона.

Для визначення прискорення точки тіла, яке здійснює сферичний рух, візьмемо похідну за скалярним аргументом t від функції швидкості (2.7):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Оскільки $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$, $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$, то остаточно маємо:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.73)$$

У виразі (2.73) вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ є кутовими швидкістю і прискоренням навколо миттєвих осей, перший доданок є обертальним прискоренням:

$$\bar{a}_{ob} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r},$$

другий доданок – доосьовим прискоренням:

$$\bar{a}_{oc} = \bar{\omega} \times \bar{D}.$$

Зазначимо, що обертальні і доосьові складові прискорення не співпадають з дотичним і нормальним прискоренням для точок тіла, що обертається відносно нерухомої осі.

Кінематичні рівняння Ейлера

Оскільки під час руху тіла навколо нерухомої точки змінюються з певною швидкістю всі кути Ейлера одночасно, то миттєва кутова швидкість $\bar{\omega}$ тіла дорівнює векторній сумі кутових швидкостей прецесії, нутації і власного обертання

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\theta} + \bar{\phi}. \quad (2.74)$$

Вектор миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$ тіла визначається через проекції на осі ортогональної системи координат.

Розкладемо вектор $\bar{\omega}$ за одиничними ортами $\bar{k}, \bar{n}, \bar{k}_1$ осей Oz, ON, Oz (рис. 2.47).

$$\bar{\omega} = \bar{k} \dot{\psi} + \bar{n} \dot{\theta} + \bar{k}_1 \dot{\phi}.$$

Проекції кутової швидкості на осі рухомої системи координат $O\xi\eta\zeta$, одиничні координатні вектори якої позначимо $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ [1], такі:

$$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

Знайдемо проекції миттєвої кутової швидкості на осі нерухомої системи координат $Oxyz$, орти яких позначимо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\omega_x = \bar{\omega} \cdot \bar{i} = \dot{\theta} \bar{n} \cdot \bar{i} + \dot{\phi} \bar{k}_1 \cdot \bar{i},$$

$$\omega_y = \bar{\omega} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \bar{n} \cdot \bar{j} + \dot{\phi} \bar{k}_1 \cdot \bar{j},$$

$$\omega_z = \bar{\omega} \cdot \bar{i} = \dot{\theta} \bar{n} \cdot \bar{i} + \dot{\phi} \bar{k}_1 \cdot \bar{i},$$

Після деяких перетворень [1], маємо *кінематичні рівняння Ейлера*, які визначають проекції кутової швидкості на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Якщо проекції миттєвої кутової швидкості знайдено (2.75), то модуль миттєвого кутового прискорення ε можна визначити так:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z; \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \quad (2.76)$$

2.3.5. Рух вільного твердого тіла

Розглянемо найбільш загальний випадок руху твердого тіла – вільний рух тіла, якщо воно як завгодно переміщується відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ (рис. 2.48). Знайдемо закон вільного руху тіла.

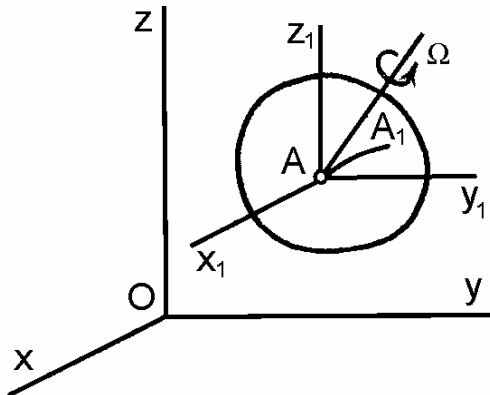


Рис. 2.48

Як відомо з аналітичної геометрії, положення твердого тіла у просторі можна визначити за трьома точками, що не розташовані на одній прямій і незмінно зв'язані з тілом.

На дев'ять координат цих точок накладено три обмеження, які виражають незмінність відстаней між точками твердого тіла. Отже, незалежних параметрів, що визначають положення тіла, або ступенів вільності залишається шість.

З другого боку, під час визначення положення твердого тіла можна задати три координати однієї його точки, наприклад точки A , яку назвемо полюсом із координатами x_A, y_A, z_A , і вибрати ще три параметри, які характеризують обертання тіла навколо полюса.

Згаданими параметрами можуть бути кути Ейлера: кути прецесії, нутації і власного обертання ψ, θ, φ (на рис. 2.48 не показані).

Сукупність шести скалярних функцій часу, які однозначно визначають положення вільного твердого тіла у будь-який момент часу, і є законом його руху:

$$\left. \begin{aligned} x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad z_A = f_3(t), \\ \psi = f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

Розглянемо геометричну картину руху. Легко побачити, що перші три рівняння визначають рух полюса і разом із ним поступальний рух твердого тіла. Останні три рівняння визначають рух тіла відносно системи координат $Ax_1y_1z_1$ (тобто, полюса A як умовно нерухомого у відносному русі).

Таким чином, з геометричної точки зору елементарне переміщення вільного тіла складається із поступального переміщення разом із полюсом, за якого полюс переходить у сусіднє положення A_1 , і із деякого переміщення щодо осей $Ax_1y_1z_1$.

Останнє переміщення згідно з теоремою Ейлера-д'Аламбера є поворотом навколо *миттєвої осі обертання* $A\Omega$,

яка проходить крізь точку A як полюс (рис. 2.49).

Оскільки рухом тіла є сукупність елементарних переміщень, то можна його означити таким чином:

Вільний рух тіла в загальному випадку складається із поступального руху, за якого всі точки тіла рухаються як довільно вибраний полюс A зі швидкістю полюса \bar{V}_A , і ряду елементарних поворотів з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ відносно миттєвих осей обертання, які проходять крізь полюс.

Вільно рухаються кинутий камінь, снаряд, літак, ракета тощо.

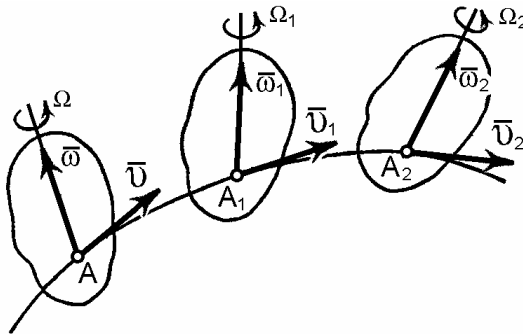


Рис. 2.49

Основними кінематичними характеристиками руху є швидкість \bar{V}_A і прискорення \bar{a}_A полюса, які визначають швидкість і прискорення поступальної частини руху, а також кутова швидкість $\bar{\omega}$ і кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ обертального руху відносно полюса. Величини цих характеристик можна визначити за рівняннями (2.77).

В окремому випадку рух вільного тіла може бути плоскопаралельним. Тоді вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ весь час перпендикулярні площині руху.

При цьому, як у загальному випадку, так і в окремому, обертальна частина руху, як і значення кутової швидкості ω , від вибору полюса не залежить. Визначимо швидкості і прискорення точок вільного тіла.

Як і у разі плоскопаралельного руху можна уявити, що швидкість (або прискорення) точки вільного тіла складається векторно зі швидкості (або прискорення) векторів полюса і відносної швидкості (прискорення) точки, наприклад, точки M відносно полюса:

$$\begin{aligned}\bar{v}_M &= \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}, \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_A + \bar{a}_{MA},\end{aligned}\tag{2.78}$$

де $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$; $\bar{a}_{MA} = (\bar{\varepsilon} \times \overline{AM}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AM})$;

\overline{AM} – радіус-вектор точки M відносно полюса A ;

\bar{v}_{MA} – швидкість точки M відносно полюса A ;

\bar{a}_{MA} – прискорення точки M відносно полюса A ;

ε – кутове прискорення тіла.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке сферичний рух тіла, означте його? Чому він так називається? Наведіть другу назву.
2. Як визначається положення тіла у сферичному русі?
3. Як спрямовуються додатні напрями кутів Ейлера?
4. Що таке миттєва вісь обертання, яку швидкості мають точки цієї осі?
5. Як визначити кутові швидкість і прискорення тіла у сферичному русі?
6. Запишіть формули для визначення швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі?

7. Назвіть формули Пуассона для швидкості кінця одиничного вектора.
8. Скільки ступенів вільності має тіло у разі сферичного руху?
9. Напишіть кінематичні формули Ейлера і з'ясуйте ці вирази.
10. Запишіть кінематичні рівняння вільного руху тіла.

2.4. Складний рух матеріальної точки

2.4.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки

Розглядаючи рух вільної матеріальної точки, фіксували його в координатах умовно прийнятої нерухомої системи відліку. Але відомо, що не існує фізичних методів, які могли б установити, чи нерухомою є певна система координат. Тому, під час дослідження складного руху точки виникає питання встановлення зв'язку між характеристиками цього руху в двох трьох різних системах координат під час їх взаємного відносного руху. Вивчаючи складний рух точки, одну із систем відліку приймають за основну або умовно нерухому, абсолютну, а другу – за рухому.

Можливість розкласти шляхом введення додаткової рухомої системи відліку складний рух точки або тіла на два більш прості, які легше досліджувати, широко застосовується в техніці під час кінематичних розрахунків і визначає практичну цінність теорії складного руху.

У разі складного руху можна розглядати точку, тіло переносу або рухомий переносний простір, з яким жорстко пов'язана рухома система координат, і нерухому систему координат.

Рух точки в рухомій системі відліку або відносно тіла переносу називається *відносним*, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – *відносними швидкістю і прискоренням* та

позначаються \bar{v}_r, \bar{a}_r (*relative* – відносний).

Введемо поняття *рухомого простору*. На рис 2.50 зображено рухому $Oxyz$ і нерухому $O_1x_1y_1z_1$ системи координат. З рухомою системою незмінно пов'язана частина простору або абсолютно тверде тіло, по якому рухається точка, тобто, існує рухоме середовище разом з системою відліку $Oxyz$.

Рух точки разом із рухотим простором, а точніше разом із тією точкою рухомого простору, з якою в дану мить збігається задана рухома точка, називається *переносним рухом*, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – *переносними швидкістю і прискоренням*. Вони позначаються \bar{v}_e, \bar{a}_e (*exporter* – захопити). Згадана рухома точка тіла як би «переносить» точку M відносно нерухомої системи координат.

Рух матеріальної точки відносно нерухомої системи координат називається *абсолютним*, а *швидкість і прискорення* – *абсолютними*. Вони позначаються \bar{v}, \bar{a} . Основною задачею складного руху точки є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів цієї точки.

2.4.2. Теорема про додавання швидкостей точки

|| Абсолютна швидкість матеріальної точки за складного її руху дорівнює векторній сумі її переносної і відносної швидкостей:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (2.79)$$

Для доведення скористаємося векторною формою визначення руху. Покажемо матеріальну точку M (рис. 2.50), яка незалежно рухається за своїм законом відносно рухомої системи відліку $Oxyz$, що жорстко зв'язана з тілом S і разом з ним переміщується відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Початок рухомої системи координат O виберемо у тілі

S довільно як полюс, на рухомих осях координат покажемо одиничні вектори (орти) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

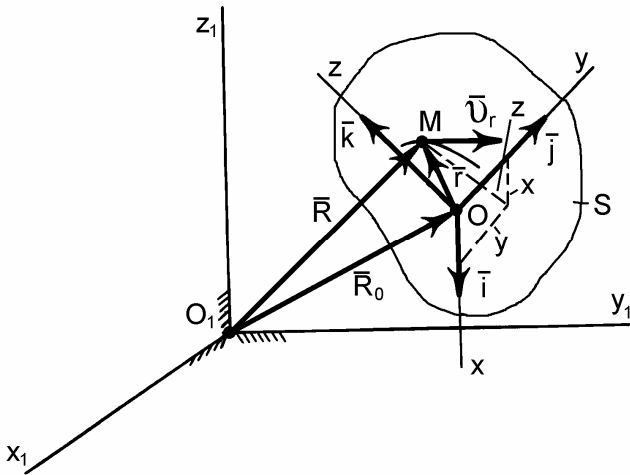


Рис. 2.50

Позначимо положення матеріальної точки M . Відносно рухомої системи координат $Oxuz$ її положення визначається радіусом-вектором \bar{r} . Відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ – радіусом-вектором \bar{R} .

Початок рухомої системи координат $Oxuz$ (довільно вибраний полюс O) відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ визначається радіусом-вектором \bar{R}_o .

Як бачимо, з утвореного на рис. 2.50 векторного трикутника OO_1M , під час руху зберігається векторне співвідношення:

$$\bar{R} = \bar{R}_o + \bar{r}. \quad (2.80)$$

Розкладемо радіус-вектор \bar{r} по ортах системи координат $Oxuz$ і підставимо в (2.80)

$$\bar{R} = \bar{R}_o + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (2.81)$$

Використовуючи вираз (2.81), визначимо абсолютну швидкість \bar{v} матеріальної точки M . У разі довільного переносного руху тіла орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ змінюють напрям разом із осями координат і тому є змінними векторами. На підставі формули (2.4) шукана швидкість дорівнює:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}_O}{dt} + \left(x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} \right). \quad (2.82)$$

Розглянемо вираз (2.82). В останній дужці можна зробити такі позначення:

$$\frac{dx}{dt} = v_{rx}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{ry}, \quad \frac{dz}{dt} = v_{rz}. \quad \text{Звідси}$$

$$\bar{v}_r = v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k} \quad - \text{відносна швидкість точки.}$$

Розглянемо далі вираз (2.82).

$\frac{d\bar{R}_O}{dt} = \bar{v}_O$ – швидкість полюса O системи координат $Oxyz$. За

формулами Пуассона (2.72):

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k},$$

де $\bar{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху або швидкість обертання рухомих осей координат і незмінно зв'язаних з ними ортів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Підставимо формули Пуассона (2.72) у першу дужку виразу (2.82):

$$\begin{aligned}
 x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} &= x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \\
 &= \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.
 \end{aligned}$$

Тоді вираз (2.82) матиме вигляд:

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{v}_r. \quad (2.83)$$

Сума $\bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{v}_e$ – *швидкість переносного руху*.

Оскільки переносний рух у загальному випадку є складним, то він може бути розкладений на поступальний рух разом із полюсом (\bar{v}_o) і сферичний рух відносно полюса.

Остаточно

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (2.84)$$

Формула (2.84) встановлює правило паралелограма векторів швидкостей точки у складному русі.

Якщо кут між векторами прямий ($\widehat{(\bar{v}_e, \bar{v}_r)} = 90^\circ$), то модуль абсолютної швидкості визначається:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}.$$

Якщо кут між векторами ($\widehat{(\bar{v}_e, \bar{v}_r)} \neq 90^\circ$), то модуль абсолютної швидкості v руху матеріальної точки визначається за теоремою косинусів:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + v_e \cdot v_r \cdot \cos(\widehat{(\bar{v}_e, \bar{v}_r)}}. \quad (2.85)$$

2.4.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень точки

Абсолютне прискорення матеріальної точки за довільного переносного руху дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і прискорення Коріоліса.

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k,$$

де \bar{a} – абсолютне прискорення матеріальної точки; \bar{a}_e – переносне прискорення;

\bar{a}_r – відносне прискорення;

\bar{a}_k – прискорення Кориоліса.

Матеріальна точка M перебуває у стані складного руху (рис. 2.50).

Вважаємо, що точка за власним законом рухається відносно рухомої системи координат $Oxyz$, а система одночасно за своїм законом переміщується відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$.

Координати точки M у рухомій системі відліку – x, y, z . Як і у випадку для швидкостей, положення точки M у рухомій системі координат визначається радіусом-вектором \bar{r} , відносно нерухомої системи – радіусом-вектором \bar{R} . Положення полюса O у нерухомій системі координат – радіусом-вектором \bar{R}_o .

Визначаємо прискорення векторним способом. Абсолютне прискорення матеріальної точки M дорівнює похідній за часом від абсолютної швидкості (2.82):

$$\begin{aligned} \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{R}_o}{dt^2} + \left(x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \right. \\ \left. + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \\ + \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k} + \right. \\ \left. + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Проведемо перетворення і аналіз отриманого виразу

(2.86). Перший доданок дорівнює прискоренню полюса O :

$$\frac{d^2 \bar{R}_o}{dt^2} = \bar{a}_o.$$

Перетворимо далі вираз першої дужки, користуючись формулами Пуассона (2.72):

$$\begin{aligned} x \frac{d^2 \bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \bar{k}}{dt^2} &= x \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \\ &= x \left[\left(\frac{d \bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d \bar{i}}{dt} \right) \right] + y \left[\left(\frac{d \bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d \bar{j}}{dt} \right) \right] + \\ &+ z \left[\left(\frac{d \bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d \bar{k}}{dt} \right) \right] = x \left\{ \left(\bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) \right) \right\} + \\ &+ y \left\{ \left(\bar{\varepsilon}_e \times \bar{j} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) \right) \right\} + z \left\{ \left(\bar{\varepsilon}_e \times \bar{k} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right) \right\} = \\ &= \left[\bar{\varepsilon}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] + \left\{ \bar{\omega}_e \times \left[\bar{\omega}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] \right\} = \\ &= \left(\bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} \right) + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{r} \right) = \bar{a}_e^o, \end{aligned}$$

де \bar{a}_e^o – прискорення точки у переносному сферичному русі тіла відносно полюса.

У другій дужці сформоване *відносно прискорення точки*:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \bar{k} = a_{rx} \cdot \bar{i} + a_{ry} \cdot \bar{j} + a_{rz} \cdot \bar{k} = \bar{a}_r.$$

У рівнянні (2.86) є ще один вираз, який також потрібно перетворити:

$$\begin{aligned}
& 2\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}\right) = \\
& = 2\left(\frac{dx}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \frac{dy}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \frac{dz}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{k})\right) = \quad (2.87) \\
& = 2\bar{\omega}_e \times \left(\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k}\right) = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = \bar{a}_k.
\end{aligned}$$

де \bar{a}_k – прискорення Коріоліса або поворотне прискорення.

Враховуючи зроблені перетворення, остаточно запишемо:

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \bar{a}_o + \bar{a}_e^o + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \\
\bar{a} &= \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

У підсумковому виразі (2.88) теореми Коріоліса **переносне прискорення** для загального руху тіла переносу S складається із двох згаданих доданків:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_o + \bar{a}_e^o.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке складний рух точки? Яка основна задача цього руху?
2. З яких складових складається абсолютний рух точки?
3. Що таке паралелограм швидкостей?
4. Як визначається швидкість точки в абсолютному русі?
5. З яких складових утворюється абсолютне прискорення точки?
6. Сформулюйте теорему Коріоліса, запишіть математичний вираз теореми.

2.4.4. Модуль і напрям прискорення Коріоліса

Розглянемо докладно прискорення Коріоліса і його властивості. Згідно з виразом (2.87):

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r). \quad (2.89)$$

Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку векторів переносної кутової швидкості і відносної лінійної швидкості точки.

Як відомо, модуль векторного добутку:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\hat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \quad (2.90)$$

Аналізуючи (2.90), легко побачити, що модуль прискорення Коріоліса дорівнює нулю в таких випадках:

1. $\bar{\omega}_e = 0$. У цьому разі тіло переносу (переносний простір) рухається поступально. Отже, прискорення Коріоліса виникає тільки під час обертального переносного руху. З цієї причини прискорення Коріоліса називають ще й **поворотним** прискоренням.

В цей момент вектор абсолютного прискорення точки визначається векторним паралелограмом відносного і переносного прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e;$$

У разі поступального переносного руху тіла абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі відносного і переносного прискорень.

2. $\bar{v}_r = 0$ – у цей момент складний рух точки відсутній;

3. $\sin(\hat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = 0$ – у цьому випадку вектори переносної кутової швидкості тіла і відносної швидкості точки колінеарні.

Якщо $\sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r})=1$, то модуль прискорення Кориоліса максимальний:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r.$$

Напрямок прискорення Кориоліса можна відшукати за двома методами: відомим математичним способом за означенням векторного добутку і фізичним – за правилом Жуковського. Розглянемо перший метод.

Припустимо, що тіло S (переносний простір) обертається навколо осі z проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.51).

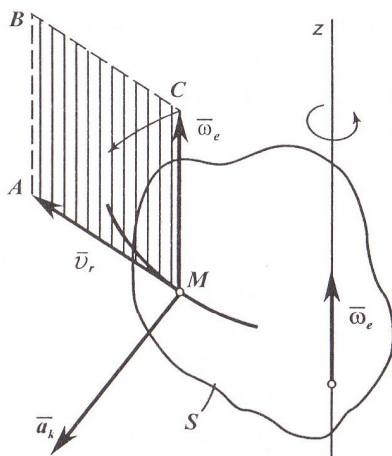


Рис. 2.51

Тоді вектор переносної кутової швидкості $\bar{\omega}_e$ напрямлений вгору вздовж осі z (за визначенням). Вектор відносної швидкості \bar{v}_r точки M має напрям вздовж дотичної до траєкторії відносного руху (допустимо, що вліво). Перенесемо умовно вектор $\bar{\omega}_e$ у точку M .

Вектор прискорення Кориоліса \bar{a}_k , як підсумковий вектор векторного добутку (2.89), перпендикулярний площині $MABC$,

яку утворюють вектори, що перемножаються. Залишається визначити, чи спрямований цей вектор до спостерігача.

У цьому разі (рис. 2.51) вектор \bar{a}_k спрямований до спостерігача, тому що найкоротший перехід від вектора $\bar{\omega}_e$ до вектора \bar{v}_r відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Вектор прискорення Кориоліса перпендикулярний до площини, яку утворюють вектори переносної кутової швидкості тіла і відносної швидкості точки; він спрямований у той бік, звідки спостерігачу здається, що найкоротший перехід від вектора кутової швидкості до вектора відносної швидкості відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення напрямку вектора прискорення Кориоліса за правилом Жуковського (рис. 2.52)

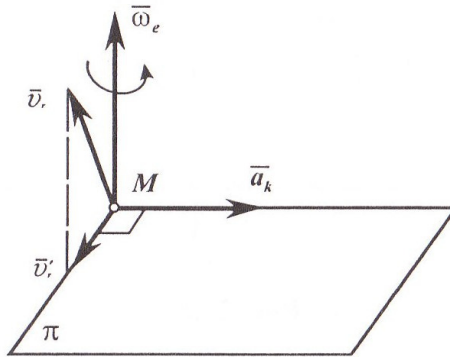


Рис. 2.52

необхідно вектор відносної швидкості \bar{v}_r спроекувати на площину π , перпендикулярну до осі переносного обертання ($\pi \perp \bar{\omega}_e$), потім повернути отриману проекцію \bar{v}'_r у площині π на кут 90° у напрямі переносного обертання (за дуговою стрілкою). Неважко зрозуміти, що в плоских механізмах, які є об'єктом студентського курсового проекту з теорії механізмів і машин, наступної дисципліни, вектор \bar{v}_r завжди розташований

у площині руху механізму, а вектор кутової швидкості – йому перпендикулярний. Тому, для визначення напрямку прискорення Коріоліса досить повернути вектор \bar{v}_r на 90° у напрямі переносної кутової швидкості ω_e . Модуль прискорення Коріоліса в цьому разі буде максимальним $a_k = 2\omega_e \cdot v_r$.

Розглянемо далі фізичні причини виникнення поворотного прискорення або прискорення Коріоліса

Нехай по пластині що розташована у площині рисунка, рухається прямолінійно вздовж її радіуса матеріальна точка M зі сталою відносною швидкістю \bar{v}_r (рис. 2.53).

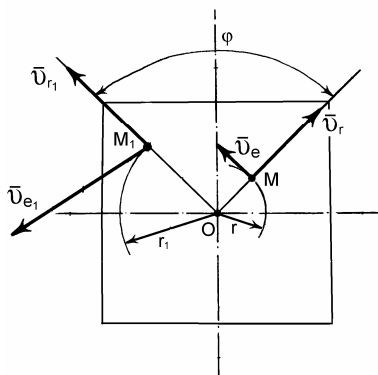


Рис. 2.53

Одночасно пластина обертається навколо горизонтальної осі зі сталою переносною кутовою швидкістю $\bar{\omega}_e$ проти ходу годинникової стрілки.

За деякий час пластина повернеться на кут ϕ і точка M опиниться у положенні M_1 на більшій відстані від осі обертання O .

В результаті цього вектор відносної швидкості \bar{v}_r повернеться внаслідок переносного обертання, а вектор переносної швидкості \bar{v}_e збільшиться за модулем внаслідок відносного руху і повернеться на той самий кут.

Користуючись вище наведеним прикладом, сформулюємо дві фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса:

– за рахунок зміни напрямку вектора відносної швидкості матеріальної точки внаслідок переносного обертання;

– за рахунок зміни модуля і напрямку вектора переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху (відстань $OM < OM_1$):

$$v_M^e = \omega_e \cdot OM,$$

$$v_{M_1}^e = \omega_e \cdot OM_1.$$

Отже, прискорення Коріоліса – це додатковий кінематичний ефект, що виникає внаслідок взаємовпливу векторів відносної і переносної швидкостей точки під час складного руху в разі обертального переносного руху.

Підсумовуючи, можна підкреслити:

Прискорення Коріоліса визначає міру змінення переносної швидкості у відносному русі і міру змінення відносної швидкості у переносному русі.

У техніці прискорення Коріоліса спостерігається у, так званих, кулісних механізмах (куліса – це рухома напрямна). Відносно куліси рухається кулісний камінь, а повертає його куліса, що обертається відносно нерухомого центра на рамі механізму.

2.3.5. Методика розв'язання задач і приклад на складний рух точки

Пропонується наступний алгоритм розв'язання задачі.

1. З'ясувати, який рух точки є відносним, а який – переносним, проаналізувати закони руху й умову задачі.

2. Зручніше користуватися векторним рівнянням абсолютного прискорення точки у складному русі,

розкладаючи відносне і переносне прискорення на дотичну і нормальну складові

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

3. Для визначення характеристик відносного руху необхідно умовно зупинити переносний рух.

Потім відшукати положення точки в заданий момент часу на траєкторії відносного руху і розглянути кінематичні характеристики відносного руху.

4. Для визначення характеристик переносного руху необхідно умовно зупинити відносний рух і розглянути рух заданої точки і точки тіла переносу, в якій вони в цей момент часу збігаються.

5. Для визначення параметрів абсолютного руху точки необхідно вибрати систему координат із початком у самій точці, потім методом проєкцій визначити проєкції абсолютних швидкості і прискорення на координатні осі, враховуючи, що проєкція абсолютного вектора на вісь дорівнює сумі проєкцій складових, і, нарешті, обчислити відповідні модулі шуканих величин.

Приклад 2.13

Кільцева трубка (рис. 2.54) радіусом 16 см обертається навколо горизонтального діаметра OA за законом $\varphi = 2 + 0,25t^3$ рад.

Всередині трубки рухаються частинки рідини згідно з рівнянням $OM = s_r = 3\pi t^2$ см.

Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення частинки M рідини в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо в початковий момент частинка була в точці O .

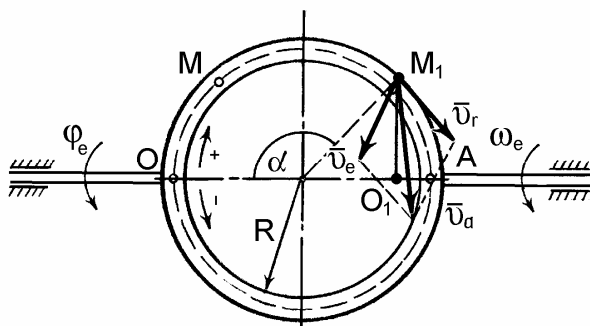


Рис. 2.54

Розв'язання

Визначаємо положення точки M в момент часу t_1 . Положення точки M зручно визначити за кутом α , тому що точка рухається вздовж кола. Визначимо його за допомогою такого виразу:

$$\alpha = \frac{s_r}{R} = \frac{3\pi \cdot 2^2}{16} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}, \quad \alpha = 135^\circ.$$

Зображуємо точку M_1 у заданий момент часу на рис. 2.54 за визначеним кутом. Виберемо рухому систему координат, жорстко зв'язану з кільцевою трубкою.

Розглядаємо переносний рух точки M_1 . Для цього скріплюємо точку M_1 з рухомою системою координат. У цьому випадку точка M_1 окреслює коло у площині, перпендикулярній до осі OA , радіусом O_1M_1 , який треба визначити:

$$O_1M_1 = h = R \cos 45^\circ = 8\sqrt{2} = 11,28 \text{ см.}$$

Обчислимо переносну швидкість точки M_1 в положенні M_1 , як швидкість даної точки на тілі обертання навколо осі OA : $v_e = \omega_e h$. Визначимо кутову швидкість трубки.

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 0,75t^2 c^{-1}.$$

Вектор кутової швидкості спрямований уздовж осі обертання. Переносна швидкість точки M_1 :

$$v_e = 0,75t^2 \cdot 11,28 = 8,45t^2 \text{ см/с}.$$

Для моменту часу $t_1=2$ с:

$$v_e = 8,45 \cdot 4 = 33,80 \text{ см/с}.$$

Вектор переносної швидкості напрямлений перпендикулярно до площини креслення в напрямі обертання.

Відносний рух точки M_1 – це рух частинок рідини відносно трубки. У цьому випадку точка M_1 рухатиметься по колу діаметром OA .

Обчислюємо відносну швидкість точки M_1 :

$$v_r = \frac{ds_r}{dt} = 6\pi t \text{ см/с}.$$

Для моменту часу $t_1=2$ с:

$$v_r = 6\pi \cdot 2 = 12\pi = 37,68 \text{ см/с}.$$

Направляємо вектор відносної швидкості v_r за дотичною до згаданого кола в точці M_1 у бік додатних значень дугової координати.

Вектори переносної \bar{v}_e і відносної \bar{v}_r швидкостей зображені на рис. 2.54. Враховуючи, що вектори \bar{v}_r і \bar{v}_e взаємно перпендикулярні, знаходимо абсолютну швидкість точки M_1 :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 50,62 \text{ см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки M_1 визначається за формулою:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^r + \bar{a}_r^r + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k.$$

Знаходимо переносне нормальне прискорення точки M_1 :

$$a_e^n = \omega_e^2 h = 0,5625t^4 \cdot 11,28 = 6,345t^4 \text{ см/с}^2.$$

Якщо $t_1=2$ с, то:

$$a_e^n = 6,345 \cdot 16 = 101,52 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального переносного прискорення \bar{a}_e^n спрямований від точки M_1 перпендикулярно до осі обертання OA (рис. 2.55).

Переносне дотичне прискорення a_e^τ точки M_1 дорівнює:
 $a_e^\tau = \varepsilon_e h$.

Визначимо кутове прискорення трубки:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 1,5t \text{ c}^{-2}.$$

Кутове прискорення ε_e додатне, отже, обертання трубки прискорене. Обчислимо переносне дотичне прискорення a_e^τ точки M_1 :

$$a_e^\tau = 1,5t \cdot 11,28 = 16,92t \text{ см/с}^2.$$

Підставивши час $t_1 = 2 \text{ c}$, визначаємо величину цього прискорення:

$$a_e^\tau = 16,92 \cdot 2 = 33,84 \text{ см/с}^2.$$

Переносне дотичне прискорення \bar{a}_e^τ точки M_1 спрямоване так само, як і переносна швидкість \bar{v}_e , тобто, перпендикулярно до площини трубки.

Знаходимо відносне дотичне прискорення a_r^τ точки M_1 :

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 6\pi = 18,84 \text{ см/с}^2.$$

Вектор відносного дотичного прискорення \bar{a}_r^τ збігається з напрямом вектора відносної швидкості \bar{v}_r , тому що відносний рух прискорений і дотичне прискорення a_r^τ додатне.

Обчислимо відносне нормальне прискорення:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{36\pi^2 t^2}{16} = 2,25\pi^2 t^2 \text{ см/с}^2.$$

Для моменту часу $t_1=2 \text{ c}$:

$$a_r^n = 2,25 \cdot \pi^2 \cdot 4 = 9\pi^2 = 88,74 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального відносного прискорення \bar{a}_r^n спрямований за радіусом до центра кільця трубки.

Знаходимо прискорення Кориоліса:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin 45^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 37,68 \cdot 0,71 = 160,52 \text{ см/с}^2.$$

Вектор прискорення Кориоліса спрямований перпендикулярно до площини, де розміщені вектори $\bar{\omega}_e$ і \bar{v}_r , і напрямлений у той бік, звідки можна побачити, що перехід від вектора $\bar{\omega}_e$ до вектора \bar{v}_r на найменший кут відбувається проти ходу стрілки годинника (рис. 2.55).

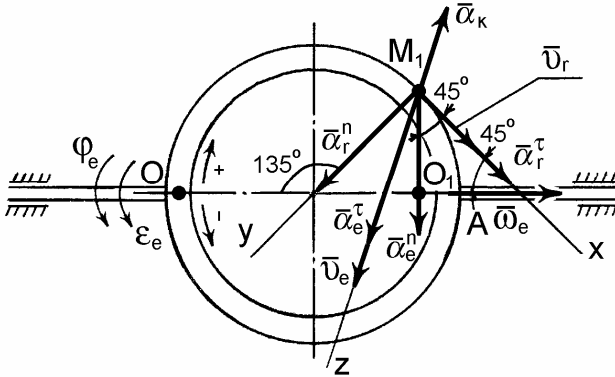


Рис. 2.55

Отже, вектор прискорення Кориоліса \bar{a}_k спрямований вздовж однієї прямої з дотичним прискоренням \bar{a}_e^τ , але протилежно останньому

Для знаходження абсолютного прискорення \bar{a} виберемо систему координат M_1xyz (рис. 2.55) і споектуємо векторну рівність, що визначає абсолютне прискорення точки M_1 , на осі даної системи координат, враховуючи, що проекція абсолютного вектора на вісь дорівнює сумі проєкцій складових:

$$a_x = a_r^r + a_e^n \cos 45^\circ = 90,92 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r^n + a_e^n \cos 45^\circ = 160,82 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = a_e^r - a_k = -126,68 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 224,00 \text{ см/с}^2.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте модуль прискорення Коріоліса. В яких окремих випадках його модуль дорівнює нулю?
2. Як спрямувати вектор прискорення Коріоліса?
3. Назвіть фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса?
4. Як визначити напрям прискорення Коріоліса за правилом Жуковського?
5. Який порядок розв'язування задач на складний рух точки.
6. Як визначити напрям прискорення Коріоліса в плоских механізмах?
7. Як застосовані формули Пуассона в теоремі Коріоліса?
8. Чому переносне прискорення в загальному виді складається із двох доданків?
9. Які маємо два методи для визначення поворотного прискорення?
10. Як визначити положення точки на траєкторії відносного руху, якщо останній відбувається вздовж кола?
11. Як визначається підсумковий вектор прискорення точки в складному русі, якщо відомі всі п'ять його складових?
12. Як знайти напрям вектора підсумкового прискорення у складному русі?

2.5. Складний рух твердого тіла

Ставлення задачі

У попередніх розділах було розглянуто різні типи рухів твердого тіла відносно нерухомої системи координат. Проте, тіло може одночасно брати участь у декількох рухах. Утворення деякого складного руху із простих рухів і вивчення підсумків такої побудови є задачею додавання рухів твердого тіла або синтезу рухів. Цей метод широко застосовується в техніці під час конструювання механізмів.

Якщо тверде тіло рухається відносно рухомих осей координат, а ці осі одночасно здійснюють переносний рух відносно нерухомих осей координат, то підсумковий рух тіла буде складним.

Складний рух твердого тіла може будуватися тільки із поступальних або обертальних рухів, а також може бути результатом додавання поступального і обертального рухів. Тому основною задачею цього розділу кінематики є встановлення співвідношень між характеристиками абсолютного руху тіла і різними типами його відносних рухів.

Введемо такі поняття. *Рух тіла відносно нерухомої системи координат називається абсолютним рухом.* Рух того ж тіла *відносно рухомої системи координат – відносним.* *Рух же рухомої системи координат щодо нерухомої називається переносним.*

Відповідно до цих понять розрізняють абсолютні, відносні і переносні швидкості і прискорення точок тіла та відповідні кутові швидкості і прискорення тіла. При цьому застосовують уже розглянуті теореми про додавання швидкостей і прискорень у складному русі точки.

У цьому розділі обмежимося з'ясуванням характеру підсумкового руху твердого тіла, складеного із найпростіших рухів і для заданого моменту часу, тобто, розглянемо миттєво-

поступальні і миттєво-обертальні рухи.

Основна задача складного руху твердого тіла полягає в наступному: у кожній заданий момент часу, не залежно від характеру відносного і переносного рухів, *знайти тип того підсумкового руху*, якому відповідає розподіл швидкостей і прискорень точок тіла в цей момент.

Мова йде про додавання, принаймні, двох миттєвих рухів, які характеризуються чи миттєвими кутовими швидкостями, чи миттєво-поступальними, чи іншими комбінаціями.

2.5.1. Додавання поступальних рухів тіла

Розглянемо випадок, коли відносний рух тіла поступальний зі швидкістю \bar{v}_r і переносний рух – теж поступальний зі швидкістю \bar{v}_e .

Відомо, що під час поступального руху всі точки тіла мають однакові швидкості. Тому застосуємо теорему про додавання швидкостей у разі складного руху матеріальної точки (2.84).

Підсумковий рух тіла буде також поступальним з абсолютною швидкістю, яка є **векторною сумою швидкостей** двох рухів:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

де v_1 – відносний рух тіла; v_2 – переносний рух тіла.

Задача додавання швидкостей в цьому випадку зводиться, фактично, до задачі кінематики матеріальної точки в складному русі. У заданий момент часу вектор абсолютної швидкості буде однаковим для всіх точок тіла і, як наслідок, підсумковий рух є миттєво-поступальним зі швидкістю, рівній векторній сумі швидкостей складених рухів.

2.5.2. Додавання обертань тіла відносно паралельних осей

Розглянемо найбільш поширений у практиці випадок, за якого відносний і переносний рухи тіла є обертальними.

Проте, і в даному разі можуть бути різні комбінації: у вигляді обертань відносно паралельних осей або осей, що перетинаються, напрями обертань можуть бути спрямовані в один бік або – в різні.

Може бути випадок додавання поступального і обертального рухів твердого тіла.

Розглянемо деякі випадки обертальних рухів твердого тіла (рис. 2.56а).

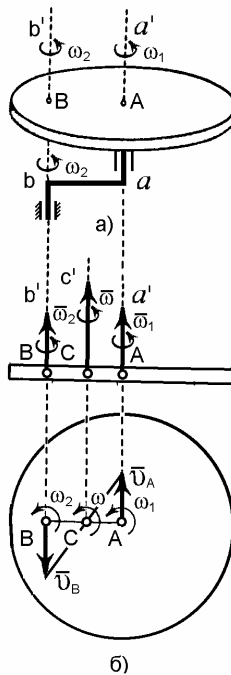


Рис. 2.56

Характерним прикладом такого руху тіла є обертання диска що встановлено на кривошипі ba , з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі aa' , яка одночасно обертається з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі bb' , що паралельна осі aa' .

Тут обертання диска навколо власної осі aa' є відносним рухом тіла, а його обертання разом із кривошипом ba є переносним рухом диска навколо осі bb' .

У цьому разі рух тіла є плоскопаралельним відносно площини, перпендикулярної до даних осей.

Проте, обертальні рухи можуть бути направлені в один або в різні боки. Послідовно розглянемо ці два випадки.

Додавання обертань, направлених в один бік

Зробимо переріз обертового тіла площиною, перпендикулярною до осей aa' та bb' , визначимо лінійні швидкості його точок A і B , утворені від перетину осей обертання aa' і bb' з диском (рис. 2.56б). Зі схеми можна побачити, що лінійна швидкість точки A , розміщеної на осі aa' , є результатом обертання тільки навколо осі bb' :

$$v_A = \omega_2 \cdot AB.$$

Лінійна швидкість точки B : $v_B = \omega_1 \cdot AB$.

Покажемо вектори цих швидкостей на схемі. Вектори \bar{v}_A і \bar{v}_B паралельні один одному (оскільки вони розміщені перпендикулярно до прямої AB), але направлені у різні боки. З'єднаємо прямою кінці векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , тоді на лінії AB знайдеться така точка C , швидкість якої дорівнює нулю ($v_C = 0$), тобто, точка C є миттєвим центром швидкостей. Пряма Cc' паралельна осям aa' і bb' і є миттєвою віссю обертання тіла.

Знайдемо кутову швидкість ω підсумкового обертання

тіла відносно осі Cc' і положення миттєвої осі, тобто, точки C на обертовому тілі.

Використовуючи отримані раніше поняття і залежності, що до миттєвого центра швидкостей, і, вважаючи, що точка C є миттєвим центром швидкостей у цьому випадку, запишемо таку пропорцію:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$$

Використовуючи властивості цієї пропорції можна записати:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{AC + BC} = \frac{v_B + v_A}{AB}..$$

Якщо підставити отримані раніше величини ($v_B = \omega_1 \cdot AB$ і $v_A = \omega_2 \cdot AB$) в останню рівність, то остаточно знайдемо кутову швидкість підсумкового обертання тіла:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{AB} = \frac{\omega_1 \cdot AB + \omega_2 \cdot AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2. \quad (2.91)$$

Якщо тіло одночасно бере участь у двох направлених в один бік обертальних рухах навколо паралельних осей, то його підсумковий рух буде обертальним із кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 + \omega_2$ навколо осі, що є паралельною заданим.

Знайдемо місце розташування осі Cc' . Якщо

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC},$$

то, підставляючи в нього значення швидкостей v_B і v_A , матимемо:

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AC}.$$

Поділимо цю рівність на AB і остаточно отримаємо пропорцію, з якої можна знайти відстань до осі Cc' точок A і B :

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}.$$

Слід зауважити, що з плином часу вісь обертання Cc' змінює своє положення на тілі, описуючи циліндричну поверхню.

Додавання обертань, направлених у різні боки

Використовуючи вихідну схему (див. рис. 2.56а), задамо різні напрями обертання тіла (диска) і кривошипа ba (рис. 2.57).

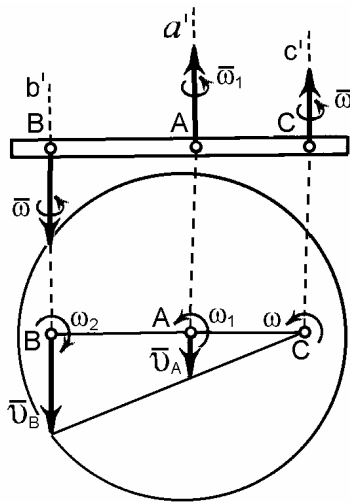


Рис. 2.57

Як і в попередньому випадку, спочатку знайдемо швидкості точок A і B :

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Ці швидкості паралельні одна одній і спрямовані в один бік. Точка C осі миттєвого центра обертань розміщена вже не всередині відрізка AB , а на його продовженні.

Кутова швидкість підсумкового руху:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

Враховуючи властивості пропорцій:

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB} = \frac{v_B}{AB} - \frac{v_A}{AB} = \omega_1 - \omega_2',$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (2.92)$$

Якщо тіло одночасно бере участь у двох різноспрямованих обертальних рухах навколо паралельних осей, то його підсумковий рух буде обертальним із кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 - \omega_2$ навколо осі, що є паралельною заданим.

Знайдемо розміщення осі Cc' . Якщо $\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$, то, підставляючи в нього значення швидкостей v_B і v_A , матимемо:

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AC}.$$

Поділимо дану рівність на AB і остаточно отримаємо пропорцію, з якої можна знайти відстань до осі Cc' точок A і B :

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}.$$

2.5.3. Пара обертань

Використовуючи вихідну схему (рис. 2.56a), задамо різні напрями обертання диска і кривошипа ba . Проте, за умовою, кутова швидкість диска навколо власної осі і кутова швидкість навколо осі кривошипа однакові: $\omega_1 = \omega_2$. Така сукупність обертань називається парою обертань.

Як і у двох попередніх випадках, зробимо переріз тіла площиною, перпендикулярною до осей aa' і bb' (рис. 2.58).

Вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ утворюють пару кутових швидкостей. Знайдемо швидкості точок A і B :

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Оскільки $\omega_1 = \omega_2$, то і швидкості точок A і B будуть рівними: $v_A = v_B$.

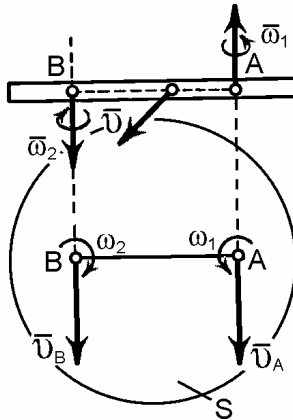


Рис. 2.58

Отже, підсумковий рух тіла буде миттєво поступальним зі швидкістю \bar{v} , яка дорівнює $\omega_1 \cdot AB$ і спрямована перпендикулярно площині, що проходить крізь вектори $\bar{\omega}_1$ та $\bar{\omega}_2$ у бік, звідки обертання пари кутових швидкостей можна бачити проти ходу стрілки годинника (рис. 2.58).

Пара обертання еквівалентна поступальному (або миттєво поступальному) руху зі швидкістю $v = \omega_1 \cdot AB$.

Прикладом подібного руху є поступальний рух педалі велосипеда відносно його рами (рис. 2.59).

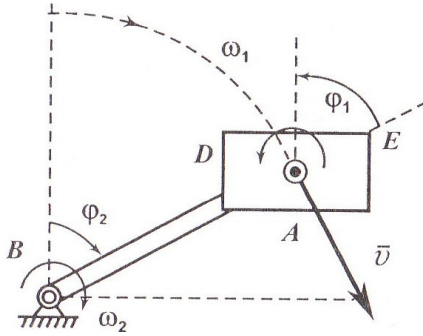


Рис. 2.59

Дійсно, педаль DE , встановлена на кривошипі AB , одночасно здійснює відносний обертальний рух навколо осі A з кутовою швидкістю ω_1 і переносний обертальний рух разом з кривошипом AB навколо осі B з кутовою швидкістю ω_2 .

Кутові швидкості ω_1 і ω_2 обох обертальних рухів дорівнюють за модулем, оскільки у довільний момент часу кут повороту педалі φ_1 відносно кривошипа AB дорівнює куту φ_2 самого кривошипа.

Поступальний підсумковий рух педалі велосипеда здійснюється у напрямі вектора \vec{v} і за модулем швидкості дорівнює:

$$v = \omega_2 \cdot BA.$$

2.5.4. Додавання обертань відносно осей, що перетинаються

Характерним прикладом такого руху є обертання тіла S з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі $a'a$, яку встановлено на кривошипі AB , що обертається з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі $b'b$. Причому осі $a'a$ і $b'b$ перетинаються під деяким кутом у точці O (рис. 2.60). Обертання тіла S навколо

осі $a'a$ є відносним рухом, а його обертання на кривошипі AB навколо осі $b'b$. – переносним рухом.

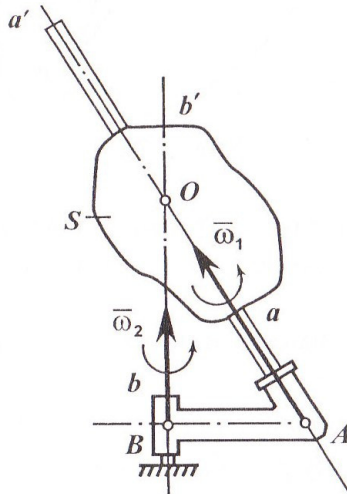


Рис. 2.60

Очевидно, що в цьому випадку швидкість точки O , що належить одночасно двом осям, дорівнює нулю ($v_o = 0$).

Отже, підсумковий рух тіла є рухом навколо нерухокої точки O , і для кожного елементарного проміжку часу цей рух є елементарним поворотом з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ відносно миттєвої осі OC , що перетинає цю точку O (рис. 2.61).

Для знаходження підсумкової кутової швидкості ω необхідно перенести у точку O вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$, а потім додати їх векторно, побудувавши на цих векторах, як на сторонах, паралелограм. Діагональ цього паралелограму визначає новий вектор $\bar{\omega}$, який і є векторною сумою заданих векторів $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$.

Доведемо, що таким чином отриманий вектор $\bar{\omega}$ і буде кутовою швидкістю підсумкового обертального руху навколо

миттєвої осі обертання OC .

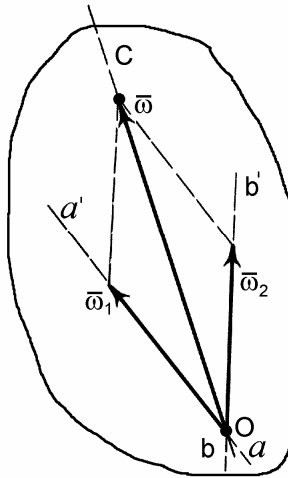


Рис. 2.61

З цією метою обчислимо швидкість якої-небудь точки M тіла, радіус-вектор якої $\overline{OM} = \bar{r}$ (рис. 2.62).

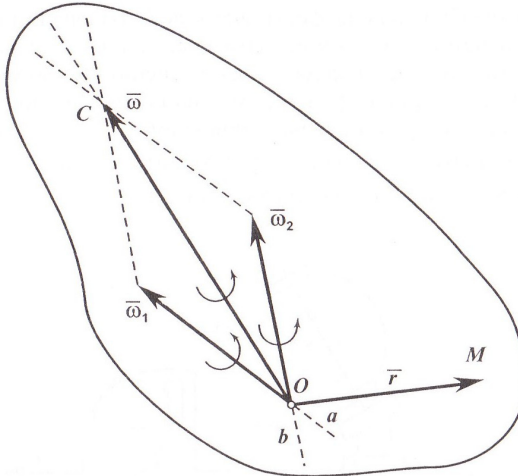


Рис. 2.62

Визначимо швидкість точки M , розглядаючи її послідовно у кожному з рухів тіла. Так, у відносному русі навколо осі Oa точка M має швидкість $\bar{v}_r = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}$. А у переносному русі навколо осі $Ob - \bar{v}_e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}$.

Додамо геометрично вектори відносної \bar{v}_r і переносної \bar{v}_e швидкостей. Тоді абсолютна швидкість точки M :

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}) = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}.$$

Оскільки підсумковий рух тіла є миттєвим обертанням навколо миттєвої осі OC , то швидкість точки M : $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Такий же самий результат можна отримати, розглядаючи і решту інших точок тіла, тобто, результат не залежить від відстані \bar{r} .

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \quad (2.93)$$

У разі додавання обертань навколо двох осей, що перетинаються в точці O , підсумковий рух тіла є миттєвим обертанням навколо осі OC , що перетинає точку O . При цьому кутова швидкість $\bar{\omega}$ підсумкового обертання дорівнює векторній сумі відносної і переносної кутових швидкостей.

У цьому випадку вісь обертання OC змінює своє положення з часом, описуючи конічну поверхню (аксоїд) з вершиною у точці O .

2.5.5. Додавання поступального і обертального рухів

Розглянемо складний рух твердого тіла, який складається з поступального і обертального рухів. Прикладом такого руху твердого тіла може бути спеціальний автомобіль, на платформі якого встановлена під кутом місткість для перевезення бетонного розчину, яка обертається навколо власної осі під час руху

автомобіля (для запобігання згущенню розчину, рис. 2.63).

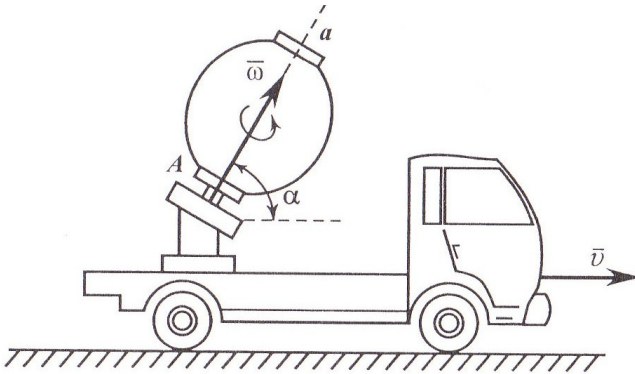


Рис. 2.63

Зі схеми цього прикладу можна побачити, що тіло здійснює відносний обертальний рух із кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ відносно осі Aa . Вісь Aa нахилена під кутом α до напрямку руху автомобіля. Кузов автомобіля здійснює переносний поступальний рух зі швидкістю \bar{v} .

Залежно від величини кута α між напрямками векторів $\bar{\omega}$ і \bar{v} можуть бути три випадки. Розглянемо їх.

Вектор швидкості руху і вісь обертання перпендикулярні

У цьому випадку $\bar{v} \perp \bar{\omega}$, рух тіла складається із обертового руху навколо осі Aa з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ і поступального руху зі швидкістю \bar{v} , перпендикулярною до вектора $\bar{\omega}$ (рис. 2.64). Легко побачити, що цей рух щодо площини π є плоско-паралельним рухом, який раніше детально розглянутий. Якщо вважати за полюс точку A , то цей рух дійсно складається із поступального зі швидкістю $\bar{v}_A = \bar{v}$ і із обертового навколо осі Aa , яка проходить крізь полюс.

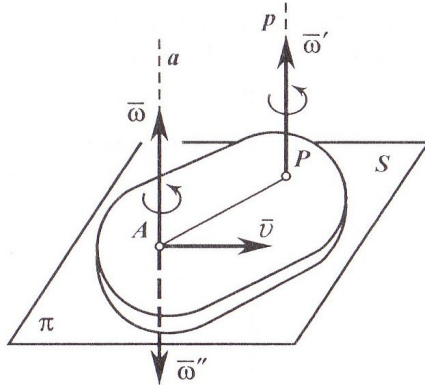


Рис. 2.64

Вектор \vec{v} можна замінити парою кутових швидкостей $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$ (див. пара обертань), таких, що $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. Плече пари AP визначимо із рівності $v = \omega' \cdot AP$, звідки, враховуючи, що $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, отримаємо:

$$AP = \frac{v}{\omega}. \quad (2.94)$$

Під час додавання векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}''$ отримаємо нуль, а тому підсумковий рух можна розглядати як миттєве обертання навколо осі Pp з кутовою швидкістю $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$. Легко побачити, що точка P для тіла S є миттєвим центром швидкостей ($v_P = 0$). Тут можна ще раз пересвідчитись, що поворот тіла навколо осей Aa і Pp відбувається з однією і тією ж кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, тобто, оберտальна частина руху не залежить від зміни положення полюса.

Гвинтовий рух

У даному випадку $\vec{v} \parallel \vec{\omega}$, тобто, це складний рух тіла: оберտальний навколо осі Aa з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і поступальний зі швидкістю \vec{v} , вектор якої спрямований паралельно осі Aa (рис. 2.65). Такий рух називається гвинтовим.

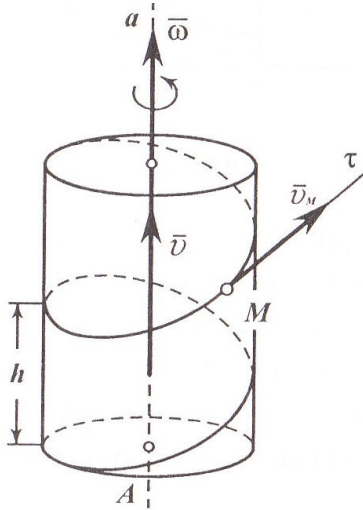


Рис. 2.65

За сталого кроку будь-яка точка M тіла, яка не збігається з віссю гвинта Aa , описує гвинтову лінію. Швидкість точки M , розміщеної на відстані \bar{r} від осі гвинта Aa , геометрично складається із поступальної швидкості \bar{v} і перпендикулярної до неї швидкості $\bar{\omega}r$, яку точка M отримує від обертального руху:

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v}_M – за дотичною τ до гвинтової лінії.

Якщо циліндричну поверхню, якою рухається точка M , перерізати вздовж твірної і розвернути, то гвинтові лінії перетворяться у прямі, нахилені до основи циліндра під кутом α , величина якого визначається:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}.$$

Вектор швидкості руху утворює довільний кут із віссю обертання

Складний рух у цьому випадку є рухом вільного твердого тіла. Розкладемо вектор \vec{v} (рис. 2.66а) на складові: \vec{v}' , яка спрямована вздовж вектора $\vec{\omega}$ і дорівнює:

$$v' = v \cos \alpha$$

і \vec{v}'' , яка перпендикулярна до вектора $\vec{\omega}$ і дорівнює:

$$v'' = v \sin \alpha.$$

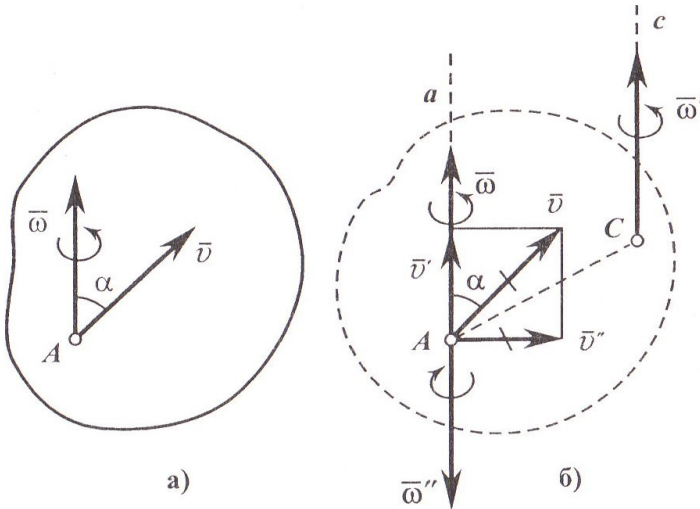


Рис. 2.66

Швидкість \vec{v}'' можна замінити парою кутових швидкостей $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ і $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. Тоді вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}'$ можна відкинути. Відстань AC можна знайти за формулою:

$$AC = \frac{v''}{\omega} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{\omega}.$$

Тоді тіло буде обертатись з кутовою швидкістю $\bar{\omega}'$ і рухатись поступально зі швидкістю \bar{v}' .

Таким чином, розподіл швидкостей точок тіла в даний момент часу буде таким, як під час гвинтового руху відносно осі Cc з кутовою швидкістю $\omega' = \omega$ і поступальною швидкістю $v' = v \cdot \cos \alpha$.

За допомогою наведених операцій (рис. 2.66б) зроблено перехід від полюса A до полюса C .

Отже, і в загальному випадку руху кутова швидкість тіла не змінюється ($\bar{\omega}' = \bar{\omega}$) у разі зміни положення полюса, а змінюється тільки поступальна швидкість ($\bar{v}' \neq \bar{v}$).

Оскільки під час руху вільного тіла величини \bar{v} , $\bar{\omega}$ і α весь час змінюються, то буде безперервно змінюватись і положення осі Cc , як миттєвої гвинтової осі.

Таким чином, рух вільного твердого тіла можна уявити серією миттєвих гвинтових рухів навколо гвинтових осей, положення яких змінюється у просторі.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади з техніки складного руху тіла.
2. Який результат отримаємо у разі додавання обертань тіла навколо паралельних осей?
3. Що таке пара обертань?
4. Чому дорівнює вектор кутової швидкості підсумкового обертання, якщо осі відносного і переносного обертань перетинаються в одній точці?

5. Де прикладений підсумковий вектор кутової швидкості за пунктом 4?
6. Як додати поступальний і обертальний рухи, якщо вектор швидкості поступального руху перпендикулярний до осі обертання?
7. Що таке гвинтовий рух?
8. Як додати поступальний і обертальний рухи, якщо вектор швидкості поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання?
9. Яка основна задача під час вивчення складного руху тіла?
10. Чи змінюється кутова швидкість у разі зміни положення полюса, якщо вектор швидкості має довільний кут з віссю обертання?

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗДІЛУ «СТАТИКА»

Задача 1

Циліндр вагою P опирається в точці A на похилу площину CD , яка утворює з вертикаллю кут α . Крім того, він утримується тросом AB , який утворює з вертикаллю кут β (рис. 1а).

Визначити реакцію площини N в точці A і натяг троса T .

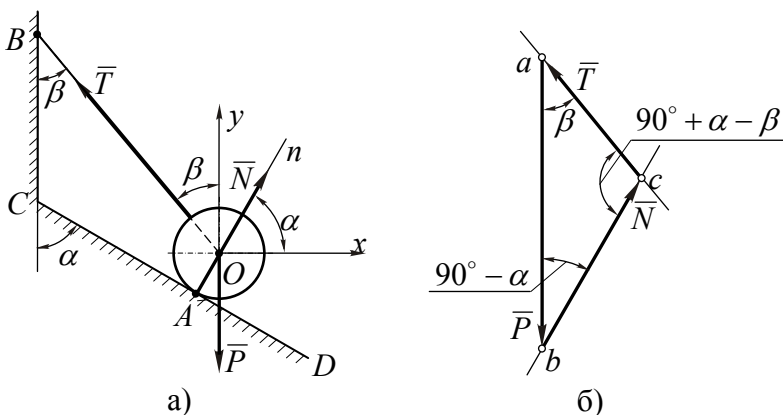


Рис. 1

Розв'язання

Розглянемо рівновагу циліндра O . На циліндр діє активна сила ваги \bar{P} і реакції в'язей: натяг троса \bar{T} , спрямований по лінії BO , і реакція поверхні \bar{N} , спрямована перпендикулярно до похилої площини CD . Лінії дії всіх трьох сил перетинаються в центрі циліндра O . Таким чином, сили \bar{P} , \bar{N} і \bar{T} являють собою плоску систему збіжних сил, що знаходиться в рівновазі.

Для розв'язування задачі аналітичним способом пов'яжемо з точкою O прямокутну систему декартових координат Oxy , розміщену як показано на рис. 1а.

Запишемо умови рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Враховуючи, що $\angle BOy = \beta$ і $\angle nOx = \alpha$, рівняння (1) набудуть виду:

$$N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \beta = 0; \quad (1)$$

$$N \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \beta - P = 0. \quad (2)$$

Помноживши рівняння (1) на $\cos \beta$, а рівняння (2) на $\sin \beta$ і додавши їх, отримаємо:

$$N \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - T \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = 0,$$

+

$$N \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + T \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta = P \cdot \sin \beta,$$

$$N(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = P \cdot \sin \beta,$$

звідки

$$N = \frac{P \cdot \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad (3)$$

де $\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

Тепер з рівняння (1) знаходимо:

$$T = N \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = P \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (4)$$

На рис. 1б побудований в масштабі силовий трикутник abc , який в разі правильного розв'язку замкнеться. Для його побудови із довільної точки a відкладаємо відрізок ab , який в певному масштабі відображає відому силу ваги \bar{P} . Потім із двох

отриманих точок a і b відрізка проводимо прямі, паралельні відомим напрямкам шуканих сил до їх замикання.

Задача 2

Тіло G вагою 100 Н (рис. 2) утримується в рівновазі трьома нитками: горизонтальною AO і двома нахиленими, BO і CO . Площина, в якій лежать нитки BO і CO , нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 45^\circ$, перпендикулярна до вертикальної площини, що проходить через нитку AO . Нитки BO і CO натягнуті симетрично відносно цієї площини і утворюють з нею кут $\beta = 30^\circ$. Визначити натяг ниток AO , BO і CO .

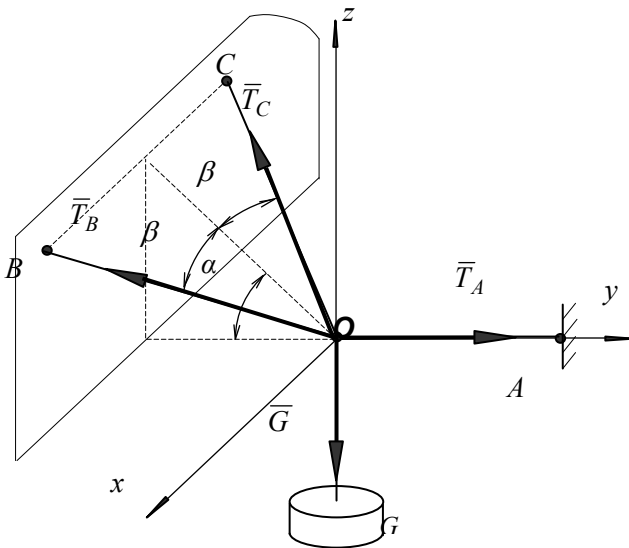


Рис. 2

Розв'язання

Розглянемо рівновагу точки O , яка перебуває в рівновазі під дією сили ваги \vec{G} тіла, що направлена вертикально вниз; сил T_C, T_B натягу ниток BO і CO , які направлені до їх точок підвісу C та B ; сил \vec{T}_A натягу нитки AO , яка направлена до точки підвісу A .

Лінії цих усіх сил перетинаються в точці O і утворюють просторову систему збіжних сил.

Початок прямокутної системи декартових координат розташуємо в точці O , сполучивши площину Oyz з вертикальною площиною симетрії (рис. 2).

Складемо рівняння рівноваги точки O в проєкціях на осі координат:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= T_B \sin \beta - T_C \sin \beta = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= -T_B \cos \beta \cos \alpha - T_C \cos \beta \cos \alpha + T_A = 0; \\ 3. \sum F_{kz} &= T_B \cos \beta \sin \alpha + T_C \cos \beta \sin \alpha - G = 0. \end{aligned}$$

З рівняння (1) випливає, що $T_B = T_C$. З урахуванням цього рівняння (2) і (3) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} 2'. \sum F_{ky} &= -2T_B \cos \beta \cos \alpha + T_A = 0; \\ 3'. \sum F_{kz} &= 2T_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0. \end{aligned}$$

З рівняння (3') дістанемо:

$$T_B = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{100}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{100}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 80,6 \text{ Н.}$$

Тоді, з рівняння (2'):

$$T_A = 2T_B \cos \beta \cos \alpha = 2 \cdot 80,6 \cdot 0,866 \cdot 0,707 = 100 \text{ Н.}$$

Задача 3

Жорстка рама (рис. 3) закріплена в точці А шарнірно-нерухомою, а в точці В – шарнірно-рухомою опорами. В точці С до рами прикріплений трос, перекинутий через блок, до кінця якого підвішений вантаж Р вагою 30 кН. На раму діє пара сил з моментом $M=60$ кНм і зосереджені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 величиною, відповідно 20 кН і 40 кН, які прикладені в точках Е і D.

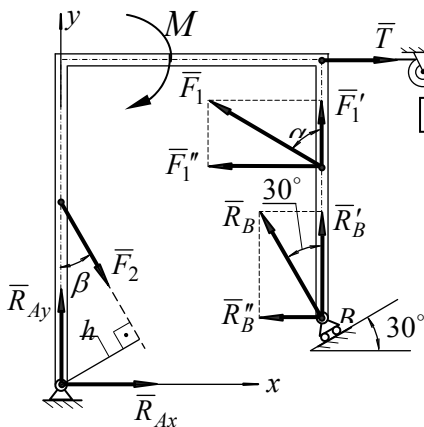


Рис. 3

Визначити реакції опор в точках А і В, якщо $AD=0,2\text{м}$; $AK=0,5\text{м}$; $KC=1\text{м}$; $CE=0,3\text{м}$; $CB=0,4\text{м}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу рами АКСВ. На раму діють задані активні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 ; пара сил з моментом M ; натяг троса \vec{T} (за модулем $T=P$); реакції в'язей в шарнірах А і В.

Реакцію шарнірно – нерухомої опори А розкладемо на дві складові \vec{R}_{Ax} і \vec{R}_{Ay} , які направимо за осями обраної системи координат Аху.

Реакцію \vec{R}_B шарнірно-рухомої опори В направимо перпендикулярно до опорної поверхні.

Оберемо за центр моментів точку А. Перш ніж записати умови рівноваги, звернемо увагу на те, що для сил \vec{F}_1 і \vec{R}_B буде важко визначити плечі відносно точки А в рівнянні моментів.

Скористаємося теоремою Варіньйона.

Розкладемо сили \bar{F}_1 і \bar{R}_B на складові, паралельні до осей обраної системи координат Axy :

$$\begin{aligned} F_1' &= F_1 \cos \alpha; & R_B' &= R_B \cos 30^\circ; \\ F_1'' &= F_1 \sin \alpha; & R_B'' &= R_B \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

Моменти сил F_1' , F_1'' , R_B' і R_B'' відносно точки A будуть додатними.

Плечем для сил F_1' і R_B' , оскільки їх лінії дії збігаються, буде відстань KC , а для сил F_1'' і R_B'' плечі дорівнюють, відповідно, $AK - CE$ і $AK - CB$.

Складемо рівняння рівноваги для отриманої плоскої системи сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ax} + F_2 \sin \beta - F_1'' + T - R_B'' = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - F_2 \cos \beta + F_1' + R_B' = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -F_2 h - M - T \cdot (AK) + (F_1' + R_B') \cdot (KC) + \\ &\quad + F_1'' \cdot (AK - CE) + R_B'' \cdot (AK - CB) = 0. \end{aligned}$$

де $h = (AD) \sin \beta$ – плече сили \bar{F}_2 відносно центра A .

Підставимо вирази для F_1' , F_1'' , R_B' і R_B'' в систему:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ax} + F_2 \sin \beta - F_1 \sin \alpha + T - R_B \sin 30^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - F_2 \cos \beta + F_1 \cos \alpha + R_B \cos 30^\circ = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -F_2 (AD) \sin \beta - M - T (AK) + (F_1 \cos \alpha + \\ &\quad + R_B \cos 30^\circ) (KC) + F_1 \sin \alpha (AK - CE) + \\ &\quad + R_B \sin 30^\circ (AK - CB) = 0. \end{aligned}$$

З урахуванням числових даних дістанемо:

$$\begin{aligned}
\sum F_{kx} &= R_{Ax} + 40 \sin 30^\circ - 20 \sin 60^\circ + 30 - R_B \sin 30^\circ = \\
&= R_{Ax} + 20 - 17,3 + 30 - 0,5R_B = R_{Ax} - 0,5R_B + 12,7 = 0; \\
\sum F_{ky} &= R_{Ay} - 40 \cos 30^\circ + 20 \cos 60^\circ + R_B \cos 30^\circ = \\
&= R_{Ay} - 34,6 + 10 + 0,866R_B = R_{Ay} + 0,866R_B - 24,6 = 0; \\
\sum m_A(\bar{F}_k) &= 40 \cdot 0,2 \sin 30^\circ - 60 - 30 \cdot 0,5 + 20 \cos 60^\circ + \\
&+ 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1 + 20 \sin 60^\circ \cdot 0,2 + R_B \cos 30^\circ \cdot 1 + \\
&+ R_B \sin 30^\circ \cdot 0,1 = -65,54 + 0,915R_B = 0.
\end{aligned}$$

З останнього рівняння знаходимо R_B :

$$R_B = \frac{65,54}{0,915} = 71,6 \text{ кН.}$$

Підставивши значення R_B в перше і друге рівняння, дістанемо:

$$\begin{aligned}
R_{Ax} &= 0,5R_B - 12,7 = 0,5 \cdot 71,6 - 12,7 = 23,1 \text{ кН}; \\
R_{Ay} &= 24,6 - 0,866R_B = 24,6 - 0,866 \cdot 71,6 = -37,3 \text{ кН.}
\end{aligned}$$

Знак мінус перед значенням R_{Ay} вказує на те, що ця реакція напрямлена у бік, протилежний від обраного на рис. 3.

Повна реакція R_A шарнірно-нерухомої опори А дорівнює:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{23,1^2 + (-37,3)^2} = 44 \text{ кН.}$$

Відповідь: $R_A = 44 \text{ кН}; R_B = 71,6 \text{ кН.}$

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗДІЛУ «КІНЕМАТИКА»

Задача 1

Рівняння руху матеріальної точки в параметричній формі:

$$x = \alpha t; \quad y = \beta t - \frac{gt^2}{2},$$

де α , β , g – сталі величини.

Визначити дотичне і нормальне прискорення точки.

Розв'язання

Дотичне прискорення точки визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

За координатного способу визначення руху швидкість точки через проекції дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Підставимо вираз для V в рівняння для a_τ :

$$a_\tau = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2} \right) = \frac{2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt}}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},$$

де V_x , V_y – проекції швидкості на координатні осі;

a_x , a_y – проекції прискорення на координатні осі.

Проекції швидкості і прискорення на координатні осі визначимо за формулами для координатного способу визначення руху:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t) = \alpha;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t - g \frac{t^2}{2}) = \beta - gt;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2};$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha) = 0;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta - gt) = -g;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g.$$

Тоді дотичне прискорення точки:

$$a_\tau = \frac{\alpha \cdot 0 + (\beta - gt) \cdot (-g)}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2}} = \frac{-g(\beta - gt)}{V}.$$

Для визначення нормального прискорення скористаємося повним прискоренням точки, яке вже було знайдене.

Оскільки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g,$$

то:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2(\beta - gt)^2}{V^2}} = \frac{g}{V} \sqrt{V^2 - (\beta - gt)^2}.$$

Підставивши під корінь вираз для V , дістанемо:

$$a_n = \frac{g}{V} \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2 - (\beta - gt)^2} = \frac{g\alpha}{V}.$$

Відповідь:
$$a_\tau = -\frac{g(\beta - gt)}{V}, \quad a_n = \frac{g\alpha}{V}.$$

Задача 2

Точка M рухається вздовж кола радіусом $R = 1/3$ м таким чином, що повне прискорення пропорційне квадрату швидкості і напрямлене під тупим кутом до неї. Рух починається з початковою швидкістю $V_0 = 2$ м/с і початковим прискоренням $a_0 = 20$ м/с².

Визначити, за який час швидкість точки зменшиться вдвічі, і який шлях при цьому вона пройде.

Розв'язання

Зобразимо траєкторію точки M у довільному положенні (рис. 1).

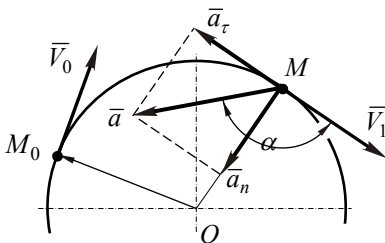


Рис. 1

Швидкість точки \vec{V} направимо за дотичною до траєкторії, крім того, повне прискорення \vec{a} буде під кутом $\alpha > 90^\circ$ до швидкості.

Повне прискорення \vec{a} розкладемо на нормальне \vec{a}_n і тангенціальне \vec{a}_τ за правилом паралелограма.

За умовою задачі:

$$a = kV^2,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки ця рівність має виконуватися і в початковий момент часу $t_0 = 0$, то:

$$a_0 = kV_0^2.$$

Звідки:

$$k = \frac{a_0}{V_0^2} = \frac{20}{2^2} = 5 \text{ c}^{-1}.$$

Таким чином, закон зміни повного прискорення точки під час руху буде мати вигляд:

$$a = 5V^2.$$

Визначимо функціональні залежності від швидкості для нормального і дотичного прискорень точки:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{1/3} = 3V^2;$$

$$a_\tau = \sqrt{a - a_n^2} = \sqrt{(5V^2)^2 - (3V^2)^2} = -4V^2.$$

У рівнянні для a_τ було взяте від'ємне значення кореня, оскільки повне прискорення утворює тупий кут з напрямом швидкості (рис. 1), тобто, дотичне прискорення спрямоване протилежно до швидкості і тому рух точки сповільнений.

Для визначення часу руху і пройденого точкою шляху скористаємося залежністю для дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -4V^2.$$

Розділимо змінні і інтегруємо цей вираз:

$$-\int \frac{dV}{V^2} = \int 4dt; \quad \frac{1}{V} = 4t + C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Сталу інтегрування C_1 знайдемо з початкових умов, коли $t_0 = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с.

Звідки:

$$\frac{1}{V_0} = 4 \cdot 0 + C_1; \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Функціональна залежність для швидкості буде мати вигляд:

$$\frac{1}{V} = 4t + \frac{1}{2}, \text{ або } V = \frac{2}{1+8t}.$$

За умовою задачі в кінцевий момент часу $t = t_1$ швидкість точки зменшиться вдвічі, тобто:

$$V = V_1 = 0,5V_0 = 1 \text{ м/с}.$$

Тоді час руху точки буде дорівнювати:

$$V_1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow 1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow c.$$

Для визначення пройденого точкою шляху скористаємося рівняннями:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{2}{1+8t}.$$

Розділимо змінні і інтегруємо:

$$\int dS = \int \frac{2}{1+8t} dt \Rightarrow S = \frac{1}{4} \ln(1+8t) + C_2,$$

де C_2 – довільна стала інтегрування.

Оскільки в початковий момент $t_0 = 0$, $S = 0$, то:

$$0 = \frac{1}{4} \ln(1 + 8 \cdot 0) + C_2; \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, для шляху S дістанемо наступну залежність:

$$S = \frac{1}{4} \ln(1 + 8t)$$

За проміжок часу $t_1 = 1/8$ с шлях, пройдений точкою, буде складати:

$$S_1 = \frac{1}{4} \ln(1 + 8t_1) = \frac{1}{4} \ln(1 + 8 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \ln 2 = 0,16 \text{ м}.$$

Відповідь: $t_1 = 1/8$ с; $S = 0,16$ м.

Задача 3

Вал починає обертатися зі сталим прискоренням із стану спокою. За перші 5 секунд вал зробив 12,5 оберти.

Визначити кутову швидкість вала в кінці проміжку часу, що розглядається.

Розв'язання

Під час рівноприскореного обертання тіла кутова швидкість ω змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки за умовою задачі $\omega_0 = 0$, то

$$\omega = \varepsilon t.$$

Таким чином, для визначення кутової швидкості вала треба знайти його кутове прискорення ε .

Кут повороту тіла у разі рівноприскореного обертання визначається за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$, то

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кут повороту вала за число обертів N дорівнює:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{t^2}.$$

Підставивши вираз для ε в формулу для ω дістанемо:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi N}{t^2} t = \frac{4\pi N}{t}.$$

З урахуванням числових величин:

$$\omega = \frac{4\pi \cdot 12,5}{5} = 10\pi \text{ рад/с}.$$

Відповідь: $\omega = 10\pi \text{ рад/с}.$

Задача 4

Шків пасової передачі починає обертатися із стану спокою з сталим кутовим прискоренням і через 10 хвилин від початку руху має кутову швидкість, яка відповідає $120 \text{ об/хв}.$

Визначити число обертів N , які зробив шків за 10 хвилин.

Розв'язання

Кількість обертів N можна визначити, якщо відомий кут φ , на який повернувся шків за 10 хвилин.

Оскільки $\varphi = 2\pi N$, то $N = \frac{\varphi}{2\pi}$.

Кут повороту тіла за рівноприскореного обертання дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$, то $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Таким чином:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}.$$

Для визначення кутового прискорення ε скористаємося формулою для кутової швидкості за рівноприскореного обертання тіла:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки $\omega_0 = 0$, то $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$.

З іншого боку, через кількість обертів за хвилину

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t}.$$

Якщо підставити ε в формулу для N , дістанемо:

$$N = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\pi n t^2}{30t \cdot 4\pi} = \frac{nt}{120}.$$

Якщо $n = 120$ об/хв і $t = 600$ с, знайдемо:

$$N = \frac{120 \cdot 600}{120} = 600 \text{ об.}$$

Відповідь: $N = 600 \text{ об.}$

Задача 5

Колесо радіусом $R = 0,2 \text{ м}$ починає обертатися із стану спокою зі сталим прискоренням. Через $t = 10 \text{ с}$ від початку руху точка, що лежить на ободі колеса, має лінійну швидкість $V = 10 \text{ м/с}$.

Визначити швидкість, нормальне і дотичне прискорення точок обода колеса в момент часу $t_1 = 15 \text{ с}$ від початку руху.

Розв'язання

Для визначення V_1 , a_{n_1} і a_{τ_1} скористаємося залежностями обертального руху:

$$V_1 = \omega_1 R; \quad a_{n_1} = \omega_1^2 R; \quad a_{\tau_1} = \varepsilon R.$$

Таким чином, для визначення V_1 , a_{n_1} і a_{τ_1} треба знайти кутову швидкість і кутове прискорення колеса в момент часу $t_1 = 15 \text{ с}$.

Визначимо кутову швидкість в момент часу $t = 10 \text{ с}$. Оскільки за $t = 10 \text{ с}$ швидкість точки обода колеса $V = 10 \text{ м/с}$, то:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ рад/с.}$$

За рівноприскореного обертання тіла ($\varepsilon = \text{const}$) кутова швидкість змінюється за законом: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Оскільки $\omega_0 = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 5 \text{ рад/с}.$$

У момент часу $t_1 = 15 \text{ с}$ кутова швидкість тіла відповідно дорівнюватиме:

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ рад/с}.$$

Тоді:

$$V_1 = \omega_1 R = 75 \cdot 0,2 = 15 \text{ м/с};$$

$$a_{n_1} = \omega_1^2 R = 75^2 \cdot 0,2 = 1125 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\tau_1} = \varepsilon R = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $\omega > 0$ і $\varepsilon > 0$, то напрями \vec{V}_1 і \vec{a}_{τ_1} збігаються. Нормальне ж прискорення \vec{a}_{n_1} напрямлене до центра обертання шківів.

$$\text{Відповідь: } V_1 = 15 \text{ м/с}; a_{n_1} = 1125 \text{ м/с}^2; a_{\tau_1} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Задача 6

Обертальний рух вала радіусом $R = 0,1 \text{ м}$ викликається вантажем P , що підвішений до нитки, яка намотана на вал. Вантаж P рухається вертикально за законом $x = t^2$, де x – відстань (м) від тіла до точки збігу нитки з поверхні вала, t – час в секундах.

Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала і повне прискорення \vec{a} точки на поверхні вала в довільний момент часу t .

Розв'язання

Величина швидкості \vec{V} точки M обода вала дорівнює швидкості нитки, що змотується з поверхні вала під час

опускання вантажу P , а також швидкості вантажу P . Швидкість же вантажу P визначимо шляхом диференціювання його закону руху:

$$V = V_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$$

Дотичне прискорення \bar{a}_τ точки M дорівнює прискоренню вантажу P , оскільки з цим прискоренням збігає нитка з поверхні вала:

$$a_\tau = a_P = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2 \text{ м/с}^2.$$

За відомими лінійною швидкістю і дотичним прискоренням точки M поверхні вала можна визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала:

$$V = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{2t}{0,1} = 20t;$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

Тоді нормальне прискорення точки M буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 0,1 = 40t^2.$$

Для повного прискорення точки M , що лежить на поверхні вала, дістанемо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(2)^2 + (40t^2)^2} = 2\sqrt{1 + 400t^4}.$$

Відповідь: $\omega = 20t$; $\varepsilon = 20 \text{ рад/с}^2$; $a = 2\sqrt{1 + 400t^4}$.

Задача 7

Стрижень AB (рис. 2) довжиною 2 м виконує плоско-паралельний рух. Вектор швидкості точки A утворює кут 30° з віссю стрижня і в цей момент часу дорівнює 5 м/с .

Вектор швидкості точки B у цей самий момент часу утворює кут 60° з віссю стрижня.

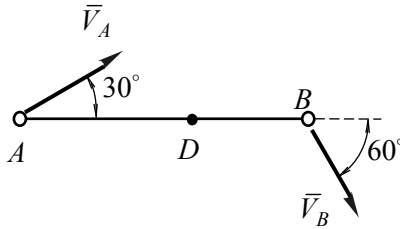


Рис. 2

Визначити величину швидкості точки B , положення миттєвого центра швидкостей, кутову швидкість стрижня і швидкість точки D , яка лежить на середині стрижня.

Використання миттєвого центра швидкостей

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Для цього з точок A і B (рис. 3) проведемо перпендикуляри до швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B . Перетин цих перпендикулярів (точка P) буде миттєвим центром швидкостей.

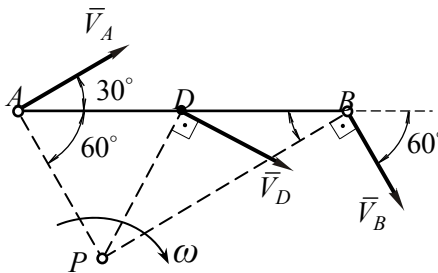


Рис. 3

2. Визначимо миттєві радіуси. Оскільки трикутник ABP прямокутний, то:

$$AP = (AB) \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м};$$

$$BP = (AB) \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ м}.$$

3. Обчислимо кутову швидкість фігури навколо миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{V_A}{(AB)} = \frac{5}{1} = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Знайдемо швидкості точок B і D :

$$V_B = \omega \cdot (BP) = 5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с};$$

$$V_D = \omega(DP) = 5 \cdot 1 = 5 \text{ м/с},$$

де DP – миттєвий радіус точки B .

Оскільки трикутник ABP рівносторонній ($AD = AP$ і кут між ними 60°), то $DP = 1 \text{ м}$.

Якщо була б потреба визначити тільки величину швидкості \vec{V}_B , то можна скористатися теоремою про рівність проєкцій двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ.$$

Тоді:

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 5 \frac{0,866}{0,5} = 8,65 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_B = 8,65 \text{ м/с}; V_D = 5 \text{ м/с}; \omega = 5 \text{ рад/с}.$

Задача 8

Колесо радіусом $R = 2 \text{ м}$ котиться горизонтальною поверхнею. В момент часу, що розглядається, швидкість центра $V_0 = 3 \text{ м/с}$ і кутова швидкість колеса $\omega = 2 \text{ рад/с}$ (рис. 4).

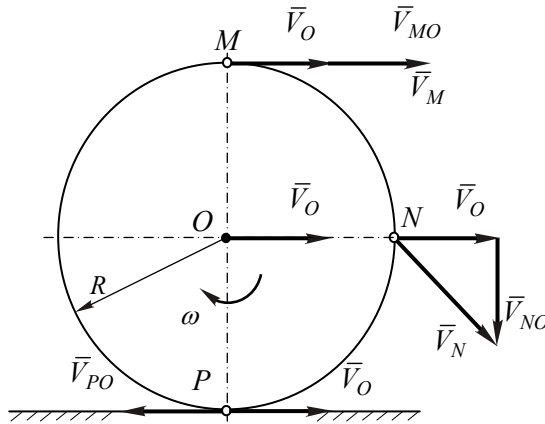


Рис. 4

Визначити: швидкості точок M , P і N , які лежать на кінцях вертикального і горизонтального діаметрів.

Розв'язання

1. Полюсом оберемо точку O , напрям і величина швидкості якої відомі.
2. Використовуючи формулу розподілення швидкостей точок тіла за плоского руху визначаємо швидкості інших точок колеса.

Для точки M колеса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{V}_{MO}, \quad (1)$$

де \vec{V}_{MO} – відносна швидкість точки M у її відносному обертальному русі навколо полюса O .

За модулем V_{MO} дорівнює:

$$V_{MO} = \omega(OM) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість \vec{V}_{MO} напрямлена перпендикулярно до MO в бік кутової швидкості, тобто за напрямом \vec{V}_{MO} і \vec{V}_O збігаються.

З точки M (рис. 4) розв'язуємо векторне рівняння (1): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця за тим самим напрямом \vec{V}_{MO} .

$$\text{Тоді:} \quad V_M = V_O + V_{MO} = 3 + 4 = 7 \text{ м/с}.$$

Векторне рівняння для визначення швидкості точки P має вигляд:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO}, \quad (2)$$

де \vec{V}_{PO} – швидкість точки P у її обертальному русі навколо полюса O .

Ця швидкість паралельна швидкості \vec{V}_O , але напрямлена в протилежний бік, і за модулем дорівнює:

$$V_{PO} = \omega \cdot (OP) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

З точки P (рис. 4) розв'язуємо векторне рівняння (2): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця в протилежний бік \vec{V}_{PO} .

Оскільки ці вектори колінеарні, то:

$$V_P = 3 - 4 = -1 \text{ м/с}.$$

Таким чином, швидкість точки P дорівнює 1 м/с і напрямлена у протилежний бік від \vec{V}_O . Колесо котиться з проковзуванням по поверхні.

Складаємо векторне рівняння для визначення швидкості точки N :

$$\vec{V}_N = \vec{V}_O + \vec{V}_{NO}, \quad (3)$$

де \vec{V}_{NO} – відносна швидкість точки N у її відносному обертовому русі навколо полюса O .

За модулем \vec{V}_{NO} дорівнює:

$$V_{NO} = \omega \cdot (ON) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість \vec{V}_{NO} напрямлена перпендикулярно до NO в бік кутової швидкості ω , тобто, вертикально вниз.

З точки N (рис. 4) будемо трикутник векторів рівняння (3): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця вектор \vec{V}_{NO} вертикально вниз. З'єднавши точку N з кінцем вектора \vec{V}_{NO} , дістанемо вектор \vec{V}_N швидкості точки N .

Оскільки вектори \vec{V}_O і \vec{V}_{NO} між собою перпендикулярні, то вектор \vec{V}_N є гіпотенузою прямокутного трикутника:

$$V_N = \sqrt{V_O^2 + V_{NO}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_M = 7 \text{ м/с}$; $V_P = 1 \text{ м/с}$; $V_N = 5 \text{ м/с}$.

Задача 9

Колесо радіусом $R = 2 \text{ м}$ котиться без проковзування по горизонтальній поверхні зі швидкістю центра колеса $V_O = 4 \text{ м/с}$.

Визначити: швидкості точок M , N , L (рис. 5).

Розв'язання

Розв'яжемо задачу за допомогою миттєвого центра швидкостей.

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Оскільки колесо котиться нерухомою поверхнею, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P дотику колеса до нерухомої поверхні.

2. Миттєвий радіус для точки O дорівнює OP . Тоді за відомою формулою дістанемо кутову швидкість ω колеса:

$$\omega = \frac{V_0}{(OP)} = \frac{V_0}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ p/c.}$$

Напрявлена кутова швидкість за ходом годинникової стрілки.

3. Визначимо величину і напрям швидкостей точок M , N , L .

З'єднаємо точки M , N , L з миттєвим центром швидкостей P . Вектори швидкостей \vec{V}_M , \vec{V}_N , і \vec{V}_L напрямлені перпендикулярно миттєвим радіусам MP , NP і LP , відповідно.

За модулем швидкості дорівнюють:

$$V_M = V_L = \omega \cdot (MP) = 2\sqrt{2}R = 4\sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$V_N = \omega \cdot (NP) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м/с},$$

де

$$(MP) = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м}; \quad (NP) = 2R = 4 \text{ м}.$$

Відповідь: $V_M = V_L = 4\sqrt{2} \text{ м/с}; V_N = 8 \text{ м/с}.$

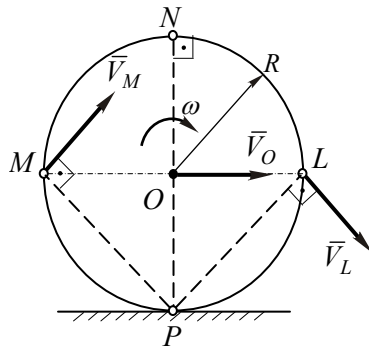


Рис. 5

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

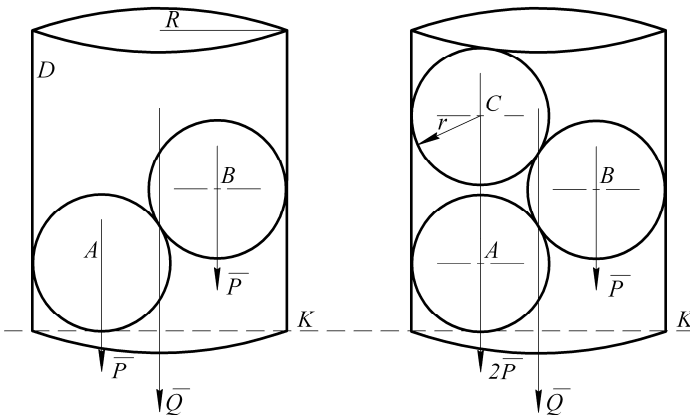
ЗАДАЧІ З РОЗДІЛУ «СТАТИКА»

Задача 1

У відкритий круглий радіуса R циліндр D без дна, що стоїть на гладкій горизонтальній площині, поклали дві однакові кулі A і B вагою P кожна та радіусом r . Причому $r > R/2$.

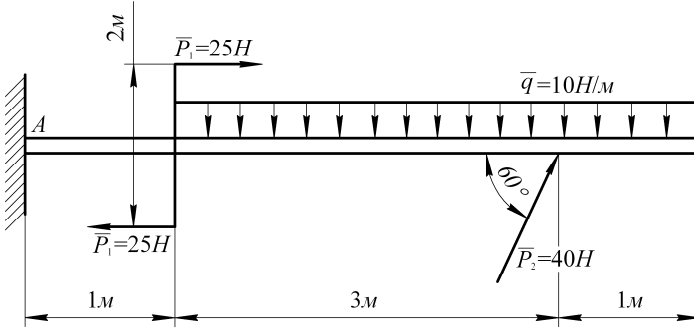
Якої найменшої ваги Q повинен бути циліндр, для того щоб він не перекинувся від дії куль?

Чи зміниться величина Q , якщо замість двох куль покласти три?



Задача 2

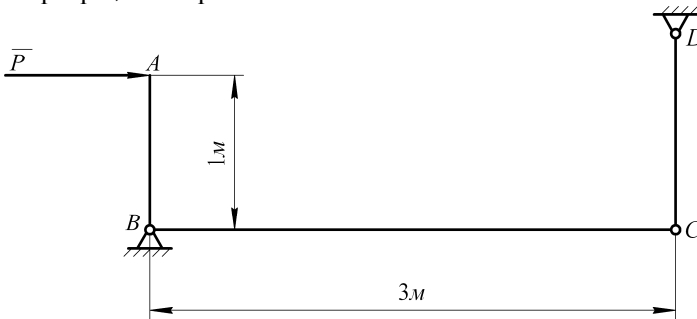
Консольна балка AB , жорстко закріплена з лівого кінця, навантажена, як показано на рисунку. Визначити реакцію закріплення та реактивний момент.



Задача 3

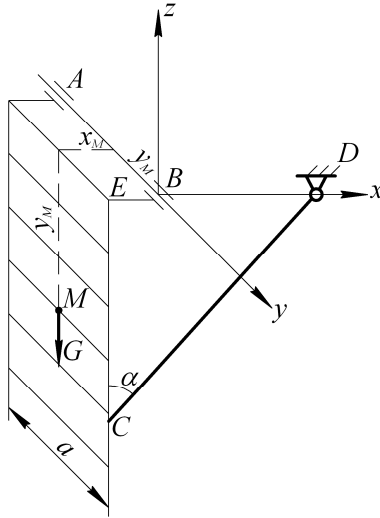
Брус ABC , зігнутий під прямим кутом над шарнірно-нерухомою опорою B , в точці C до нитки CD .

В точці A прикладена горизонтальна сила $P = 6$ кН. Нехтуючи власною вагою бруса та нитки, визначити реакцію шарнірів, її напрям та натяг нитки.



Задача 4

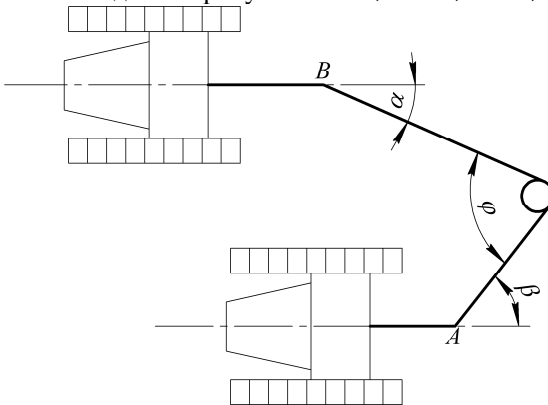
Визначити реакції шарнірів A та B , а також зусилля в стрижні DC штурвального мосту зернозбирального комбайна, якщо на драбинці знаходиться людина, вага якої разом з драбинкою 900 Н, а координати центра ваги (точка M): $z_M = -0,6$ м; $x_M = -0,15$ м; $a = 0,3$ м; $EC = 0,54$ м; $BE = 0,13$ м; $\alpha = 45^\circ$.



Задача 5

Визначити силу опору P тросової волокуші під час скиртування соломи та кути α , β , що утворюються лінією дії тросів та напрямом руху волокуші, якщо трактори рухаються паралельно один одному.

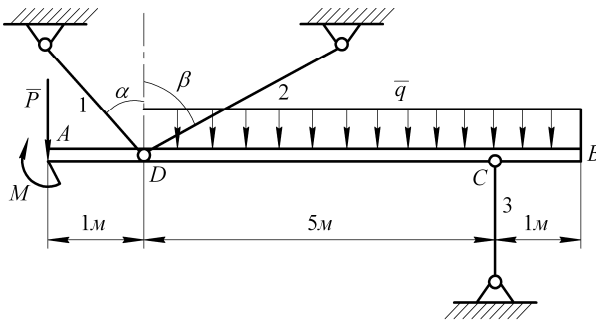
Сила тяги одного тросу $T_A = 6$ кН, $T_B = 7,66$ кН, $\phi = 60^\circ$.



Задача 6

Балка AB , навантажена, як показано на рисунку, утримується в рівновазі стрижнями 1, 2 і 3, що мають по кінцях шарнірні кріплення.

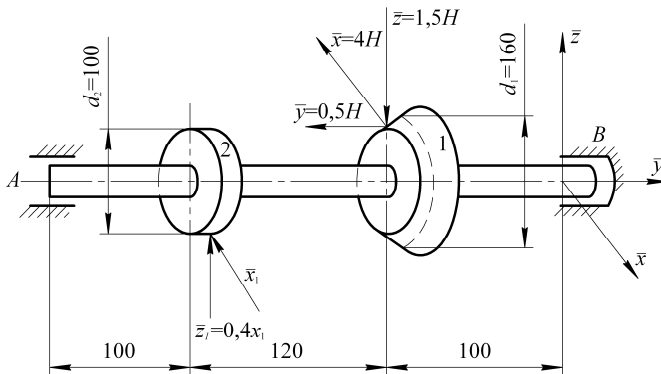
Визначити реакції стрижнів, якщо $P = 80$ кН; $M = 50$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.



Задача 7

На валу редуктора жорстко закріплені конічне 1 та циліндричне 2 зубчасті колеса.

На колесо 1 діють три сили \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , а на колесо 2 сили \bar{x}_1 , \bar{z}_1 (див. рис.).



Знайти сили \bar{x}_1, \bar{z}_1 , що діють на колесо 2 і реакції в циліндричному підшипнику A та у підп'ятнику B .

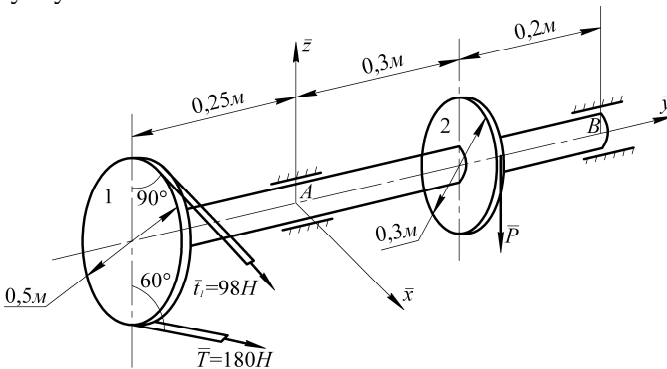
Розміри сил на рисунку задані у ньютонках, а розміри вала і коліс задані в мм.

Задача 8

На вал насаджено шків 1 і зубчасте колесо 2.

Визначити силу P та реакції в підшипниках A та B в положенні рівноваги.

Діаметри шківів та зубчатого колеса і розміри вала вказані на рисунку.



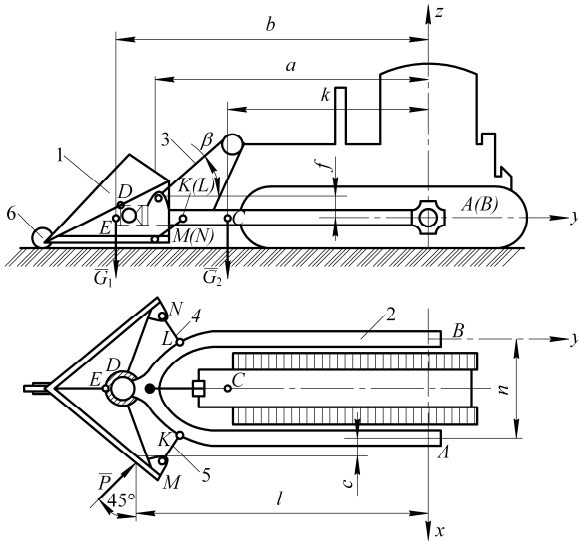
Задача 9

Відвал кушорізу 1 кріпиться до рами 2 за допомогою шарніра A та двох розкосів 1, 5. Рама 2 кушорізу повертається навколо осі AB та утримується тросом 3.

Враховуючи тільки силу опору P і вагу відвалу G_1 і рами G_2 , визначити реакції в шарнірах A, B та натяг троса. Силою тертя знехтувати. Розкоси 4, 5 нахилені до горизонтальної площини під кутом 45° .

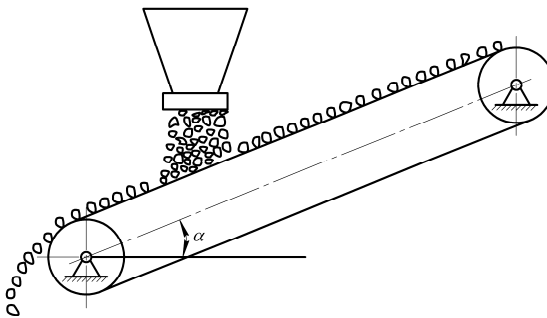
$G_1 = 10 \text{ кН}; G_2 = 20 \text{ кН}; a = 4,5 \text{ м}; b = 5,2 \text{ м}; c = 0,4 \text{ м}; l = 4,88 \text{ м};$
 $n = 1,6 \text{ м}; f = 0,28 \text{ м}; \beta = 45^\circ; k = 3,4 \text{ м}; P = 25 \text{ кН}.$

Сила \bar{P} і точки прикладання сил \bar{G}_1 і \bar{G}_2 знаходяться в площині BUX . Під час роботи колесо 6 до землі не дотикається.



Задача 10

Під яким кутом α до горизонту потрібно встановити полотняну гірку, щоб розділити на ній суміш насіння двох різних культур, якщо коефіцієнт тертя ковзання насіння однієї культури 0,6, а іншої 0,8.



Задача 11

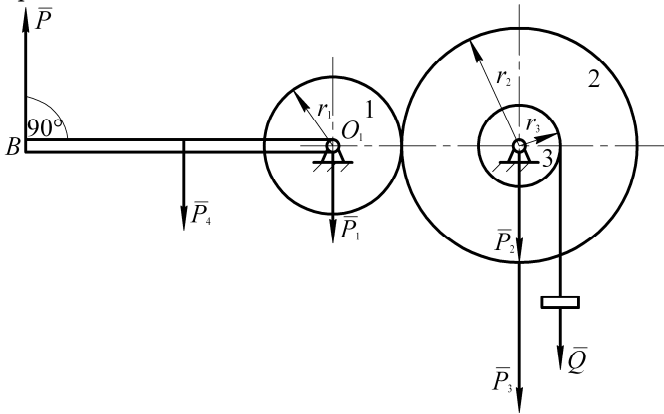
Вантаж $Q = 20$ кН висить на канаті, намотаному на барабані вагою P_3 та радіусом $r_3 = 0,2$ м.

Барабан жорстко з'єднаний з зубчатим колесом 2 вагою P_2 та радіусом $r_2 = 0,6$ м.

Колесо 2 з'єднано з зубчатим колесом 1, вагою P_1 та радіусом $r_1 = 0,4$ м.

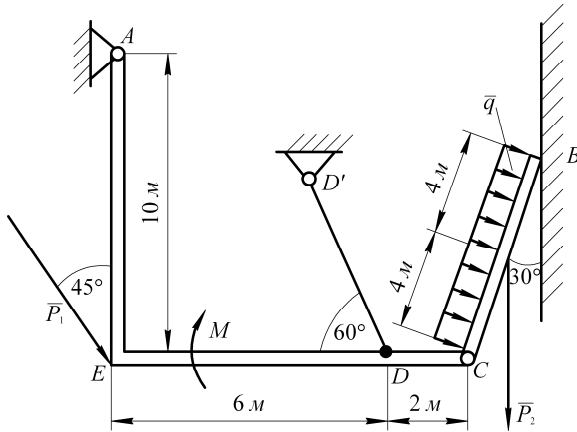
З колесом 1 жорстко зв'язана рукоятка O_1B вагою $P_4 = 100$ Н та довжиною $O_1B = 0,8$ м.

Визначити силу P , яку треба прикласти до кінця рукоятки, щоб утримати вантаж.



Задача 12

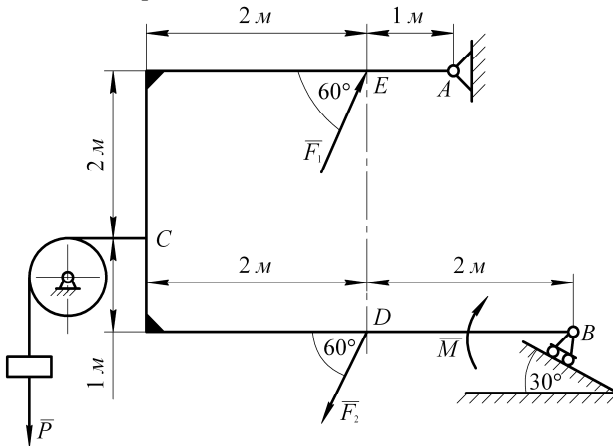
Конструкція складається з жорсткого кутника AC та стрижня CB , які в точці C з'єднані шарнірно. В точці B стрижень вільно опирається на гладку вертикальну стіну. В точці D невагомий стрижень DD' . На конструкцію діють: пара сил $M = 60$ Н·м, рівномірно розподілене навантаження $q = 20$ Н/м та $P_1 = 60$ Н та $P_2 = 30$ Н. Визначити реакції в'язей в точках A , B , C та D .



Задача 13

Жорстка рама закріплена в точці A шарнірно, а в точці B до шарнірної опори на котках. У точці C до рами прив'язаний трос, перекинтий через блок. Він несе на кінці вантаж вагу $P = 25$ Н. На раму діють пара сил з моментом $M = 60$ Н·м, сили $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 40$ Н.

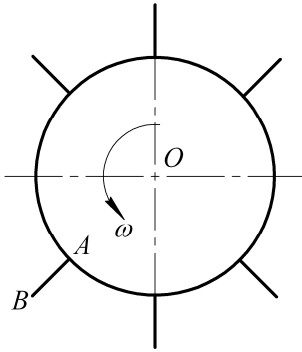
Визначити реакції в'язей в точках A та B .



ЗАДАЧІ З РОЗДІЛУ «КІНЕМАТИКА»

Задача 1

Для розпушування ґрунту застосовується робочий орган у формі барабану, на ободі якого жорстко закріплені радіально розташовані ножі. Під час роботи барабан обертається з



постійною кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини креслення. Вісь O в свою чергу рухається з постійною швидкістю v_o та перпендикулярно до неї. Радіус барабану R , довжина ножа $AB = h$. Визначити траєкторію точки B кінця ножа. Початок координат xOy вибрати в

точці O_1 , що відповідає горизонтальному положенню ножа AB .

Задача 2

Прямолинійний рух ножа різального апарату зернозбирального комбайну виражається наближеним рівнянням: $S = 0,05\cos 10\pi t$ (м).

Визначити швидкість і прискорення ножа за функцією часу.

Задача 3

Молотильний барабан починає обертатися рівноприскорено зі стану спокою; в перші 5 секунд він здійснює 12,5 обертів. Яка його кутова швидкість після закінчення цих 5 секунд?

Задача 4

Молотильний барабан, що має кутову швидкість $\omega_0 = \pi$ рад/с, обертається рівноприскорено; через 5 хвилин він має кутову швидкість, що відповідає 120 об/хв. Скільки обертів зробив барабан за ці 5 хвилин?

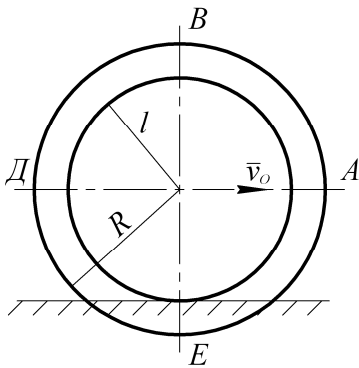
Задача 5

Написати рівняння обертання колеса трактора під час розгону, якщо відомо, що його кут повороту пропорційний кубу часу i , якщо $t = 3$ с, то кутова швидкість колеса відповідає $n = 810$ об/хв.

Задача 6

Молотильний барабан радіуса $R = 20$ см під час розгону починає обертатися зі стану спокою відповідно до рівняння $\varphi = 5t^2 - t^3$. Визначити швидкість та прискорення точки A , що лежить на бичі барабана в момент $t = 1$ с.

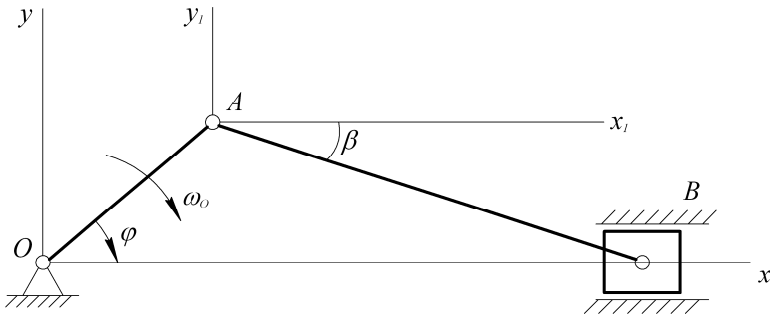
Задача 7



Визначити швидкості точок A , B , D , E колеса вагонетки, що котиться без ковзання по рейці. Внутрішній та зовнішній радіуси колеса l і R . Швидкість руху вагонетки v_0 .

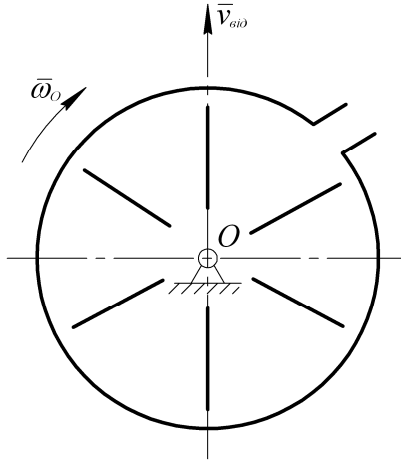
Задача 8

Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму тракторного двигуна обертається навколо точки O з постійною кутовою швидкістю ω_o . Довжина кривошипа $OA = r$, довжина шатуна $AB = l$. Поршень B рухається в циліндрі двигуна вздовж прямої, що проходить через точку O . Визначити рівняння відносного руху поршня B по відношенню до системи координат x_1Ay_1 , яка переміщується поступально.



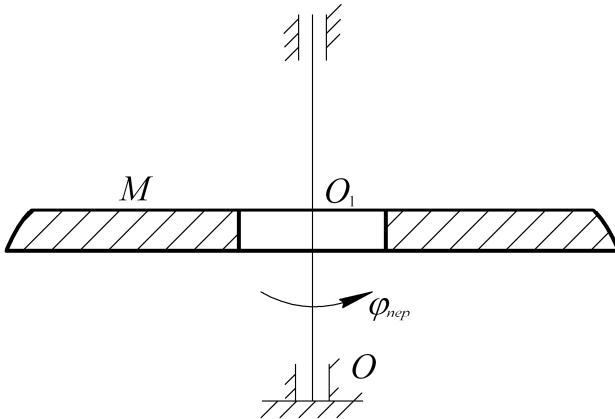
Задача 9

Лопаті вентилятора зерноочисної машини обертаються з кутовою швидкістю ω_o навколо осі O перпендикулярної до площини креслення. Повітря тече по лопатям в радіальному напрямі з відносною швидкістю $v_{відн}$. Визначити абсолютну швидкість і прискорення для частинки повітря, що знаходиться в точці C на лопаті вентилятора за таких даних: $OC = 0,5$ м; $\omega_o = 4\pi$ рад/с; $v_{відн} = 2$ м/с.



Задача 10

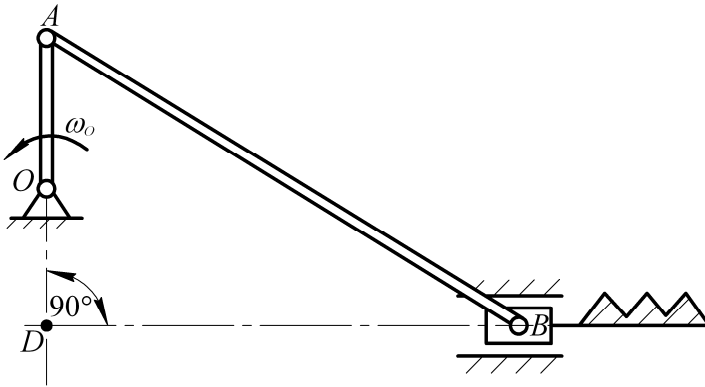
Відцентрова сортувальна установка для насіння уявляється круглим диском з радіальними жолобами, вздовж яких переміщуються насіння відповідно до рівняння $O_1M = 2t^2$ см. Диск обертається навколо вертикальної осі Oz за рівнянням $\varphi_{кер} = 4t^2$ рад. Визначити абсолютні швидкості і прискорення частинок насіння, що знаходяться в точці M в момент часу $t = 1$ с.



Задача 11

Кривошип OA механізму ріжучого апарату сінокосарки обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$ та за допомогою шатуна AB приводить в дію ніж, з'єднаний з повзуном B , що рухається вздовж горизонтальних напрямних.

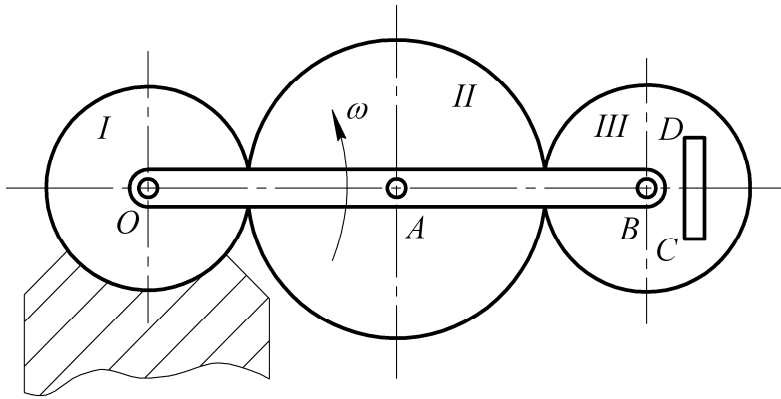
Знайти кутову швидкість ω та кутове прискорення ε шатуна, а також прискорення a_B повзуна B в положенні, коли кривошип займе вертикальне розташування. Довжини $OA = OD = 5 \text{ см}$, $AB = 50 \text{ см}$.



Задача 12

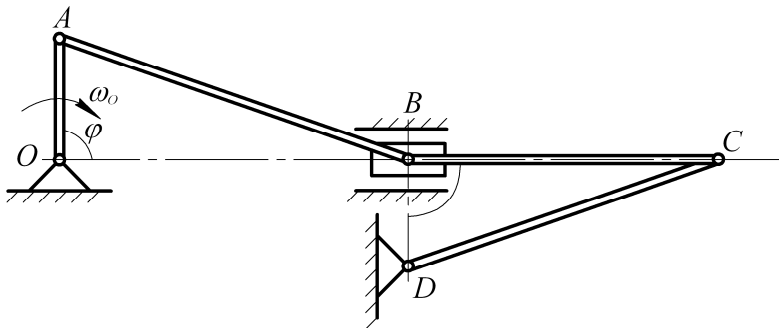
Механізм бокових грабелів складається з нерухомого колеса I , в центрі якого закріплена вісь O , на яку насаджено водило OB , що несе колеса II і III .

Визначити, яке має бути співвідношення між радіусами коліс, щоб граблі, пов'язані з колесом III рухались поступально під час обертання водила (граблі схематично показані відрізком CD).



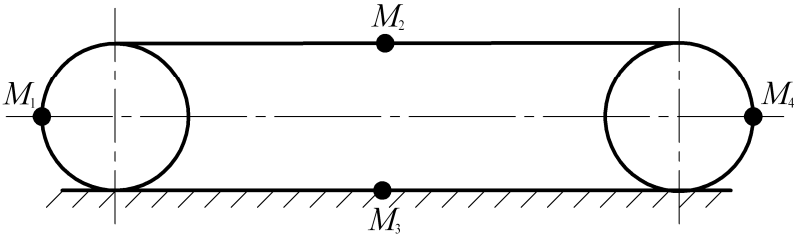
Задача 13

У механізмі компресора кривошип OA довжиною r обертається з кутовою швидкістю ω_o . Визначити швидкість v_C точки C в момент, коли $\varphi = 90^\circ$, якщо при цьому точки O , B і C лежать на горизонтальній прямій, а відрізок $BD = b$ і перпендикулярний до OB , $CD = a$.



Задача 14

Визначити швидкості і прискорення точок M_1, M_2, M_3, M_4 гусениці трактора, що рухається без ковзання по прямолінійній ділянці шляху зі швидкістю v_0 та прискоренням a_0 , радіуси коліс трактора – r , ковзанням гусениці по ободу коліс знехтувати.

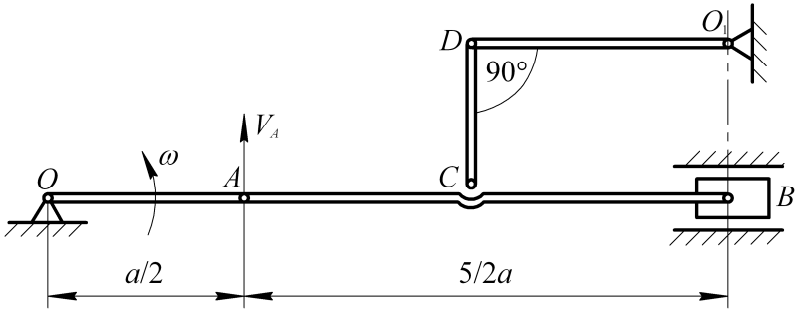


Задача 15

Радіус автомобільного колеса 0,3 м, швидкість автомобіля 72 км/год, колеса котяться по дорозі без ковзання. Величина швидкості ковзання точки дотику колеса з дорогою рівна $1/2v$ автомобіля. Визначити величини і напрями швидкостей точок ободу колеса, що лежать на горизонтальному і вертикальному діаметрах колеса.

Задача 16

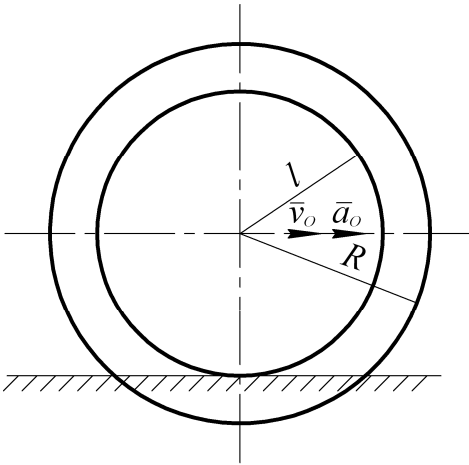
В механізмі приводу решета DO_1 , що призначене для відділення крупних фракцій сипких матеріалів, кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Визначити кутові швидкості ω_1 та ω_2 решета DO_1 та шатуну DC для правого горизонтального положення кривошипу OA . Під час вирішення задачі прийняти, що $OA = a/2$; $AC = 3/2a$ та фігура $BCDO_1$ – квадрат зі стороною a .



Задача 17

Радіус автомобільного колеса 0,3 м, швидкість автомобіля 72 км/год. Колеса котяться по дорозі без проковзування (ковзання). Визначити величини і напрями швидкостей точок ободу колеса, що лежать на горизонтальному і вертикальному діаметрах колеса.

Задача 18

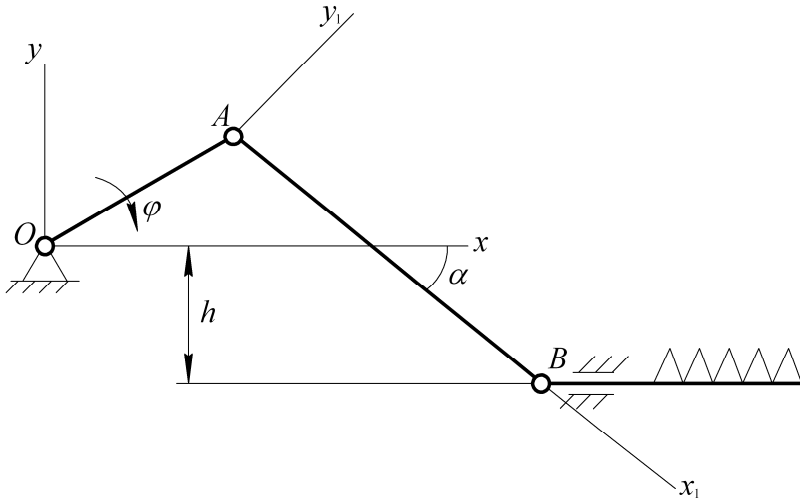


Визначити прискорення точок A , B , D , E колеса вагонетки, що котиться без ковзання по рейці. Внутрішній та зовнішній радіуси колеса r та R . Швидкість руху вагонетки v_o , а прискорення a_o .

Задача 19

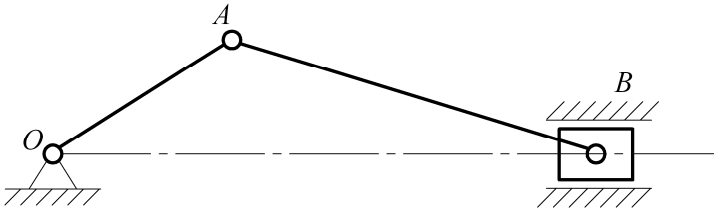
Кут повороту кривошипу OA кривошипно-штанунного дезаксіального механізму приводу ножа жниварки змінюються відповідно до закону $\varphi = kt$, де k – постійний коефіцієнт. Довжина кривошипу $OA = r$, штануна $AB = l$, а величина дезаксіала – h .

Визначити рівняння плоского руху штануна AB .



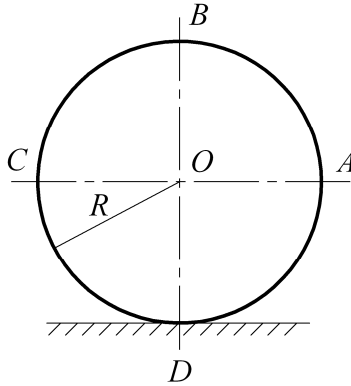
Задача 20

Кривошип $OA = r$ кривошипно-штанунного механізму автомобільного двигуна рівномірно обертається навколо нерухомої точки O з кутовою швидкістю ω_0 . Визначити швидкість і прискорення поршня B та кутові швидкість і прискорення штануна AB довжиною l в момент, коли кут AOB рівний φ .



Задача 21

Визначити швидкості та прискорення точок A , B , C , D колеса автомобіля, що рухається без ковзання зі швидкістю v_0 і прискоренням a_0 . Радіус колеса R .

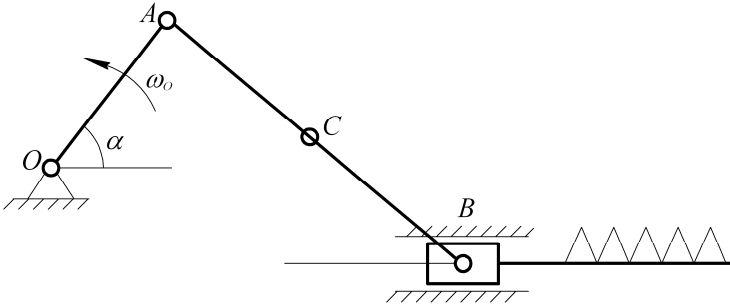


Задача 22

Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного дезаксіального механізму приводу ножа сінокосарки обертається рівномірно навколо точки O з кутовою швидкістю ω_0 і приводить в рух шатун $AB = l$.

Знайти швидкість і прискорення повзуна B , середньої точки C шатуну AB і кутові швидкість і прискорення шатуну AB , коли кривошип та шатун взаємно перпендикулярні і утворюють

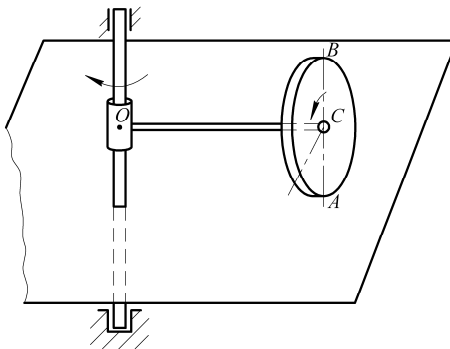
з горизонтальною віссю кут $\alpha = 45^\circ$.



Задача 23

Для подрібнення мінеральних добрив використовують диски, що котяться без ковзання в горизонтальній площині і здійснюють складний рух: обертання навколо власної осі OC та навколо вертикальної осі O . Визначити кутову швидкість диска, а також швидкості точок A і B диска, розміщених на одній вертикалі.

Центр диска описує коло протягом 4 сек. Кут COA рівний 30° ; радіус диска R дорівнює 1 м.



Завдання для розрахунково-графічної роботи «Визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми»

1.1. Зміст завдання

Для розрахунково-графічної роботи задано:

1. Схеми ферм із вказаними напрямками і точками прикладання сил і перерізу, що підлягає розрахунку.
Схему обирають за заданим варіантом (п. 1.3).
2. Лінійні розміри ферм і зовнішні навантаження в узлах ферми обирають за таблицею (п. 1.4).

1.2. Порядок виконання і вимоги до оформлення роботи

Розрахунок ферми має бути поданий у вигляді пояснювальної записки на листах формату А4.

Пояснювальна записка до розрахунку ферми повинна мати:

1. Титульну сторінку, на якій зазначено тему розрахунково-графічної роботи, номер завдання та його варіант, прізвище та ініціали студента, місце та час виконання.
2. Зміст завдання з вказаними розмірами та силами.
3. Перевірку зовнішньої і внутрішньої статичної визначеності ферми.
4. Аналітичне визначення з графічною перевіркою реакцій зовнішніх опорних закріплень.
5. Аналітичне і графічне визначення зусиль у стрижнях декількох вузлів методом вирівнювання вузлів.

6. Визначення зусиль у стрижнях заданого перетину методом Ріттера (перетин вказано хвилястою лінією на схемі ферми).

7. Обчислення похибки графічного розрахунку зусиль у стрижнях.

8. Список використаної літератури.

Аналітичні розрахунки в пояснювальній записці треба супроводжувати розрахунковими схемами, силовими многокутниками. Пояснення мають бути стислими з точно визначеними спеціальними термінами, рисунки – чіткими і відповідати ДСТУ і стандартам підприємства.

Схеми і силові многокутники (трикутники) виконуються у вибраному масштабі з використанням масштабних коефіцієнтів лінійних і силових параметрів: μ_l , (м/мм), μ_p , (Н/мм).

У пояснювальній записці аналітичні розрахунки треба супроводжувати рисунками. Так, у разі визначення опорних реакцій їх слід показати на безмасштабній схемі, під час використання методу вирізування вузлів треба навести розрахункову схему вузла і силовий многокутник (трикутник).

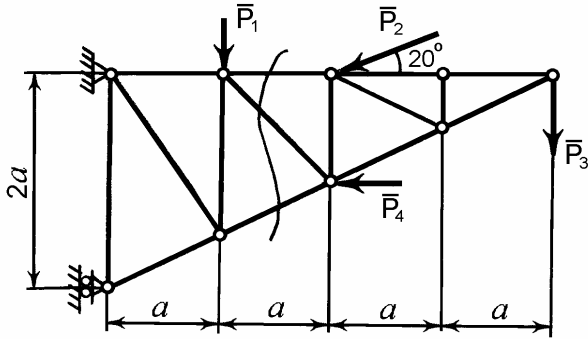
Пояснювальна записка повинна мати чітко виділені розділи, заголовками до яких можна взяти наведені вище пункти змісту пояснювальної записки.

Під час розрахунків реакцій у стрижнях ферми методом Ріттера необхідно обрати для операції одну із частин, ліву чи праву, по відношенню до хвилястої лінії, що розділяє на дві частини. Звичайно, краще обрати меншу частину. Рисунок повинен бути в такому ж масштабі, що і вся ферма разом.

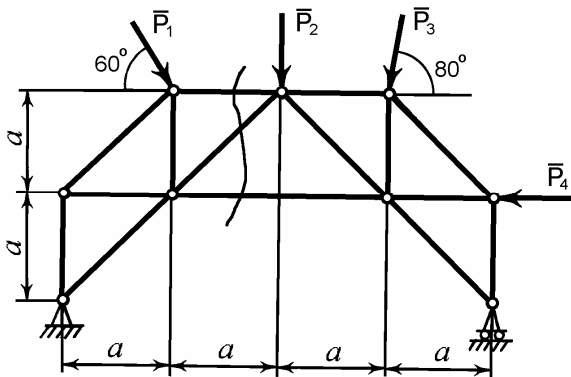
Раціонально використовувати у цьому разі метод трьох моментних толчок, за додержання яких виключаються із складених рівнянь рівноваги всі невідомі, крім одного. Тоді кожне рівняння, що отримується, буде з одним невідомим, тому легко розв'язується.

1.3. Схеми варіантів ферм

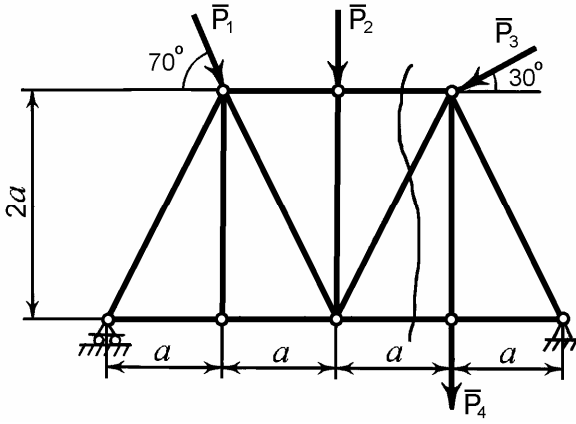
01



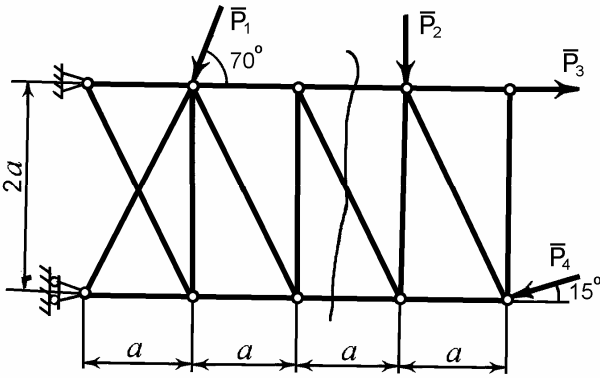
02



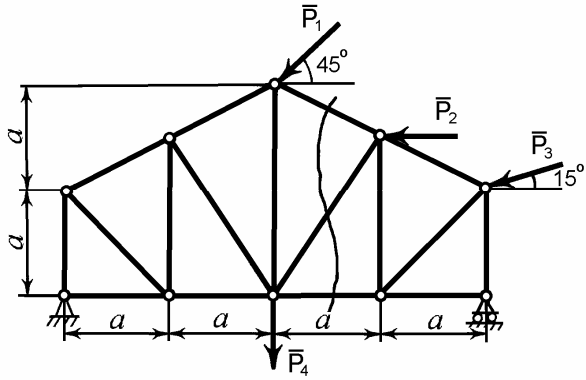
03



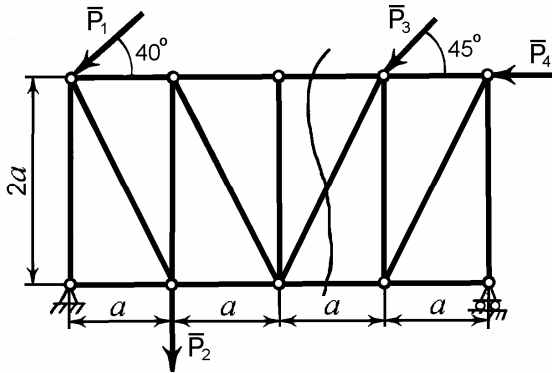
04



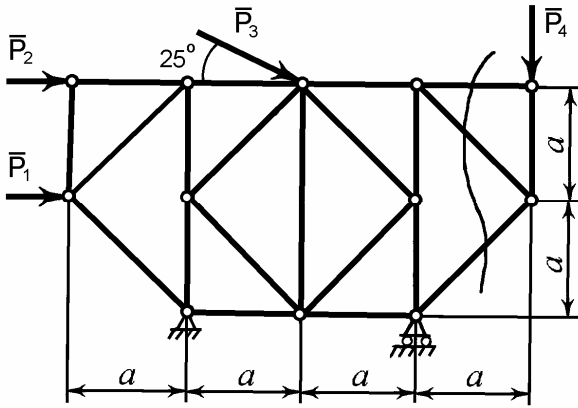
05



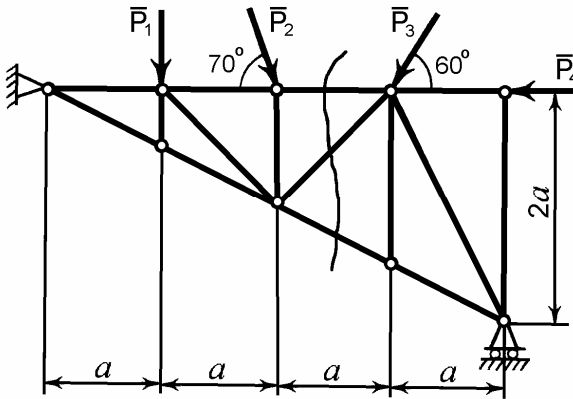
06



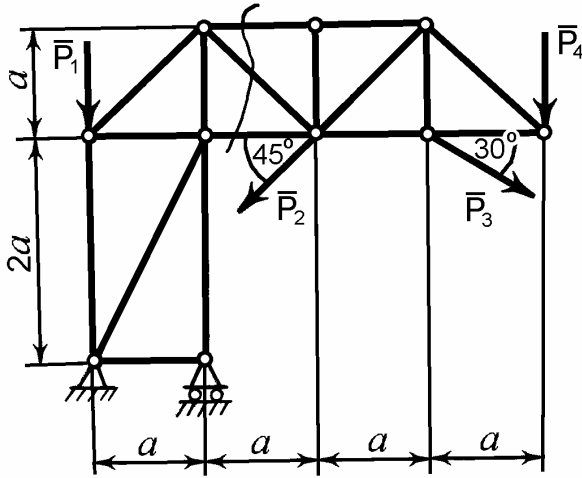
07



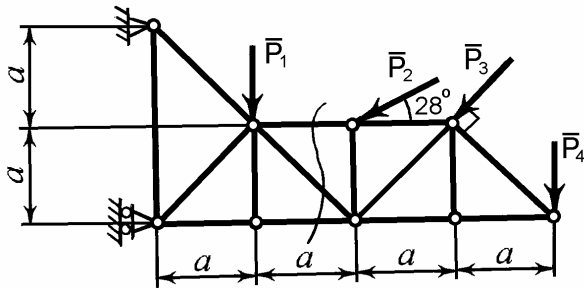
08



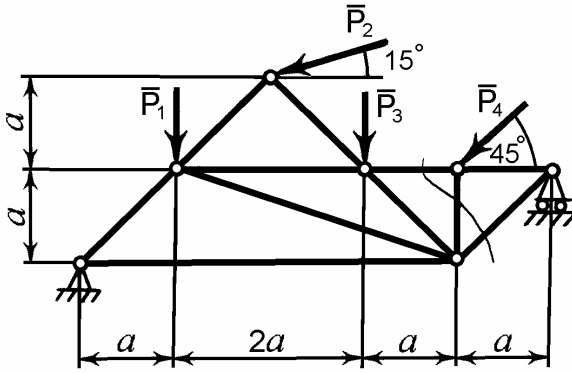
09



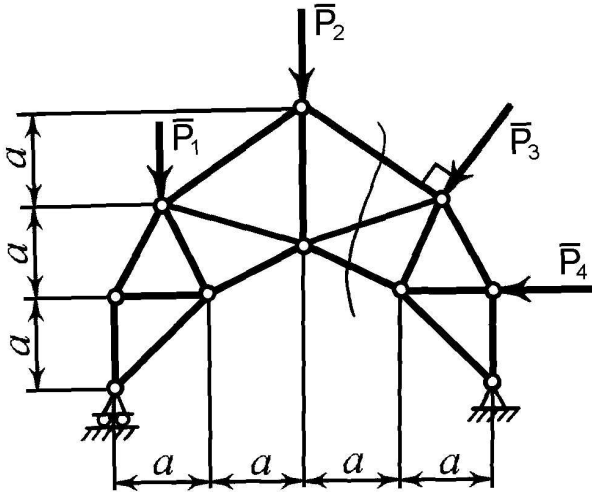
10



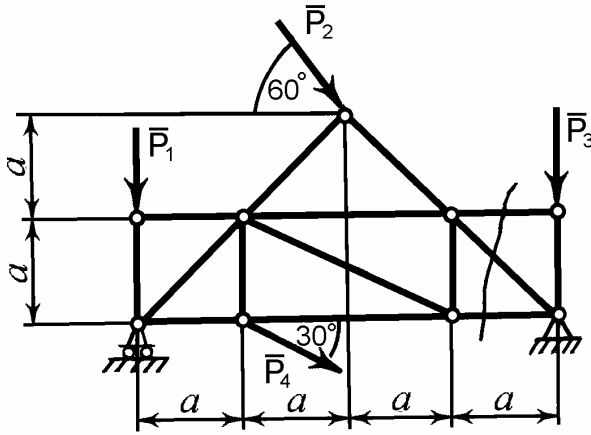
11



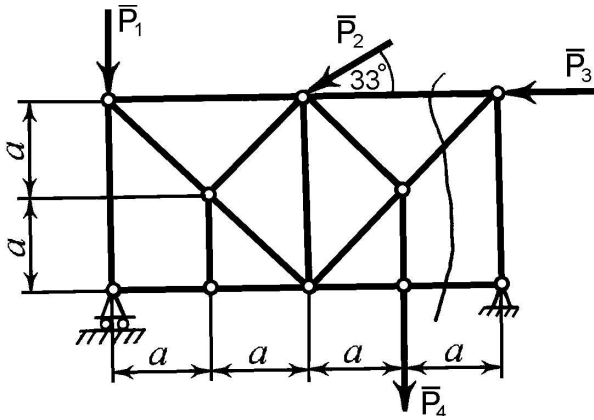
12



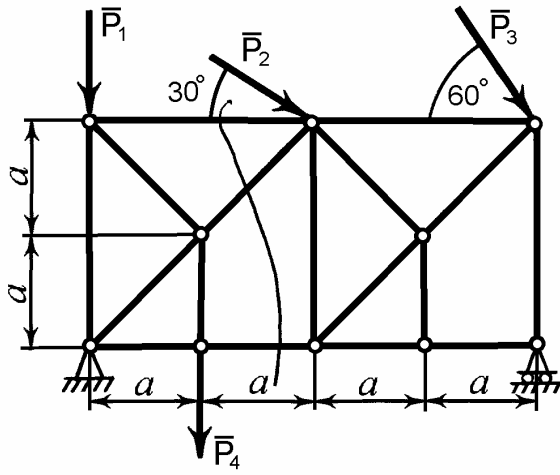
13



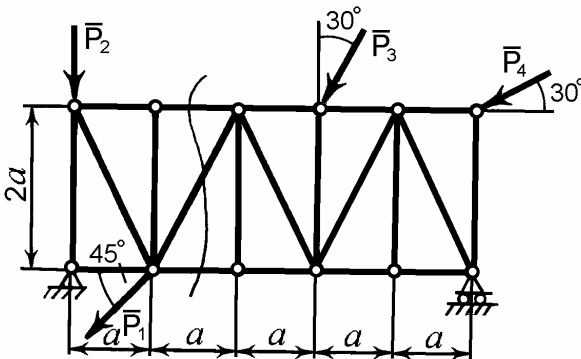
14



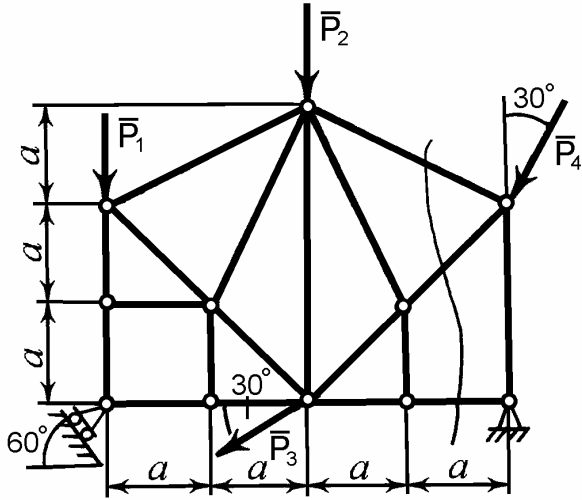
15



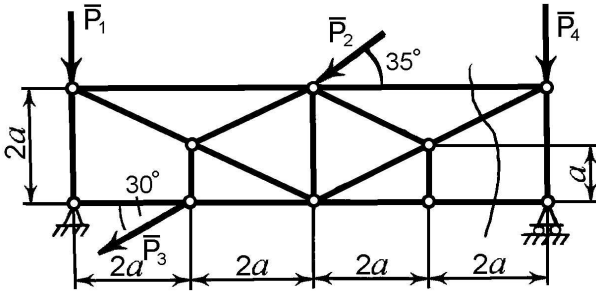
16



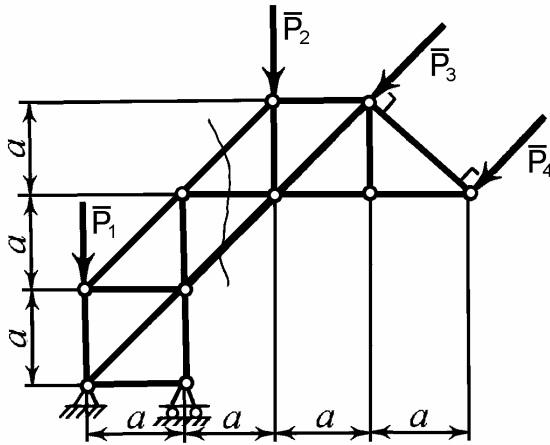
17



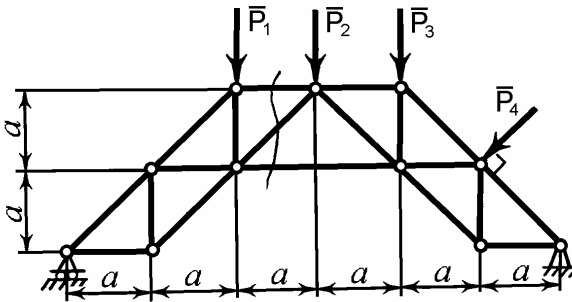
18



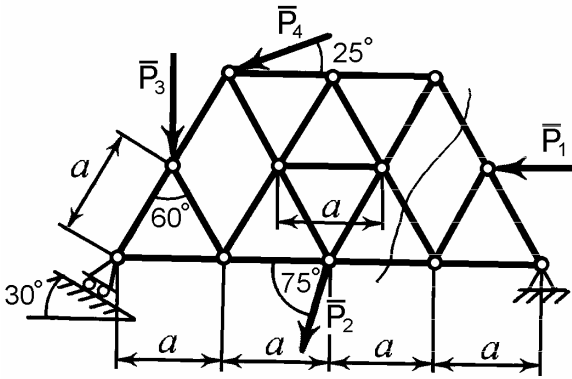
19



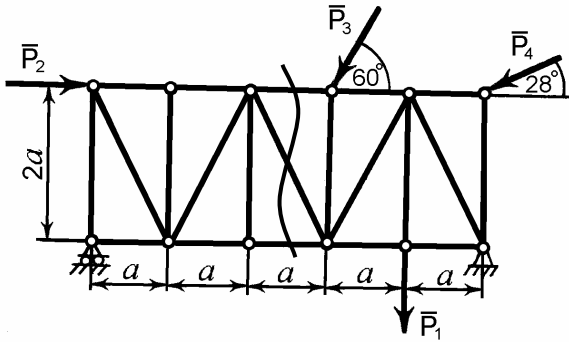
20



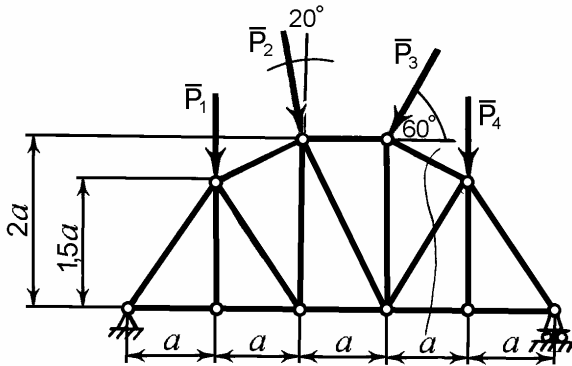
21



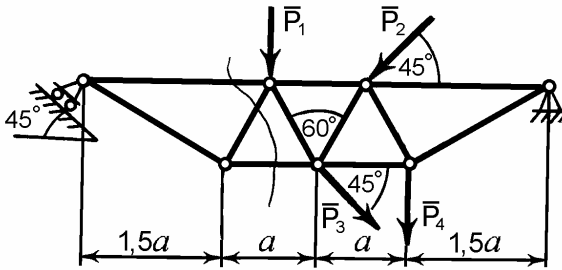
22



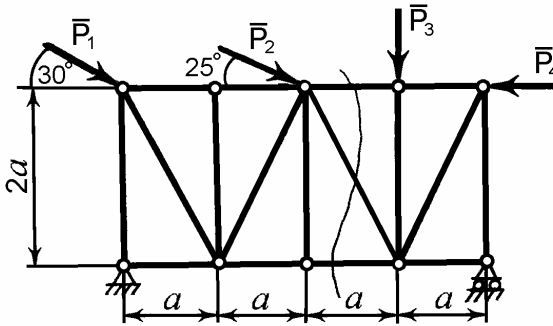
23



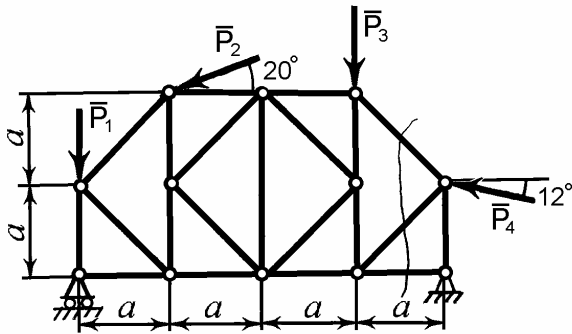
24



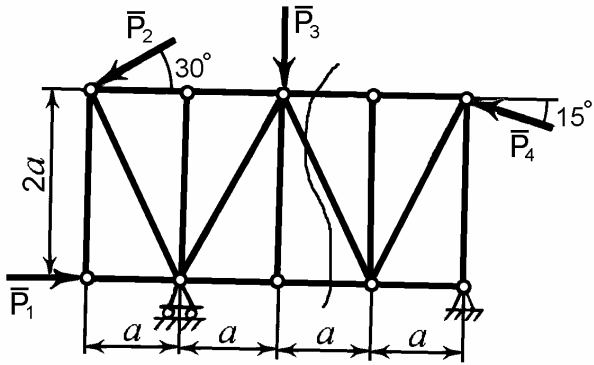
25



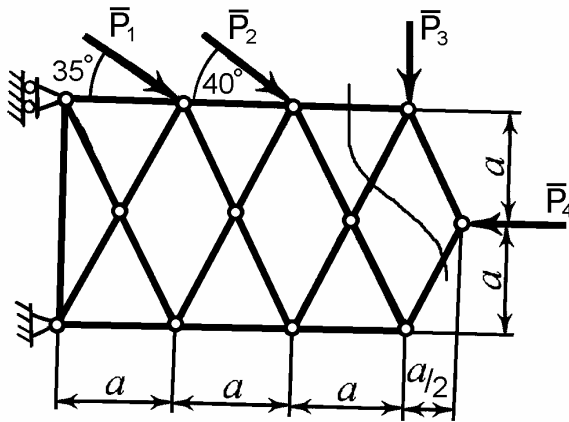
26



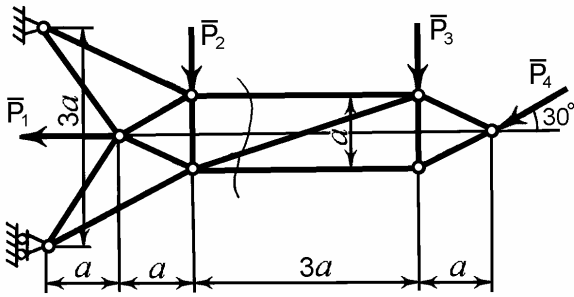
27



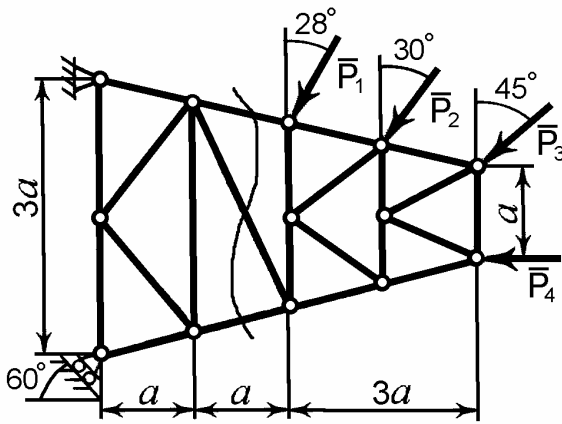
28



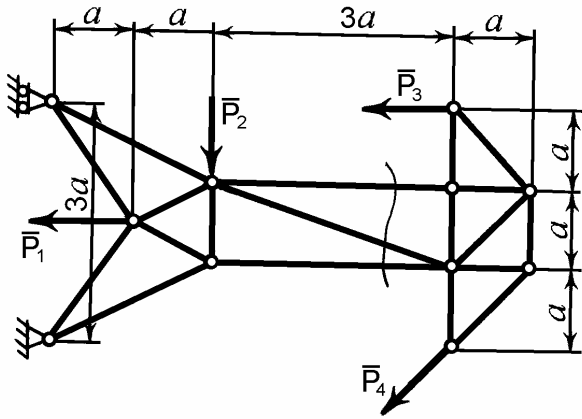
29



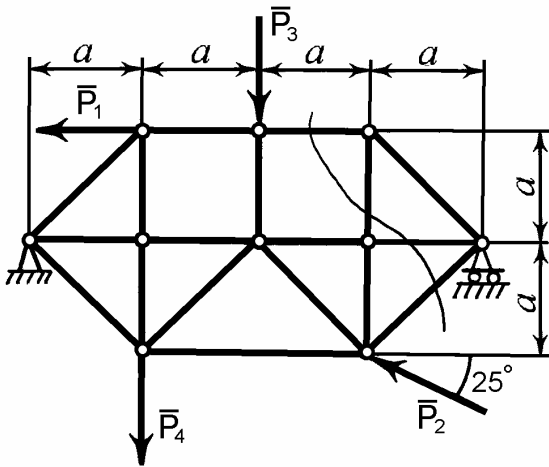
30



31



32



1.4. Лінійні розміри ферм та зовнішні навантаження

Буквені позначення	Розмірність	Варіанти									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	кН	20	10	30	30	50	20	40	30	40	50
P_2	кН	20	20	30	10	20	40	20	10	30	20
P_3	кН	30	30	10	30	50	30	10	20	30	40
P_4	кН	10	10	20	20	30	50	50	40	20	30
a	м	3	3	2	1	2	4	3,5	1	1,5	2



ЗАПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма буде статично визначеною?
3. Що означає розрахувати ферму?
4. Як визначити опорні реакції ферми?
5. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
6. У чому полягає суть графічного методу вирізування вузлів?
7. У чому полягає метод перерізів (або метод Ріттера) під час розрахунків ферми?
8. Скільки стрижнів із невідомими зусиллями можуть бути у зоні перерізу?
9. Відносно яких точок зручно складати суми моментів сил для відрізаної частини ферми?

Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил

Задача 1

Тверде тіло AB (рис. 1) перебуває в рівновазі під дією сил $F_1 = 40 \text{ кН}$, $F_2 = 25 \text{ кН}$ і пари сил із моментом $m = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Геометричні розміри $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$. Визначити реакції опор.

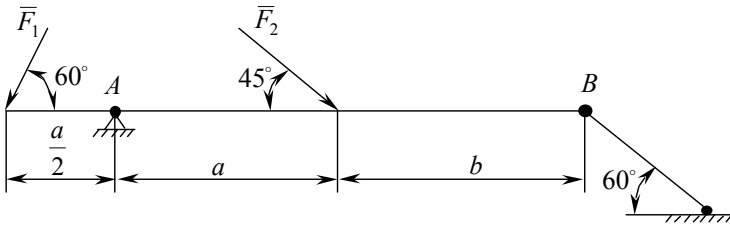


Рис. 1

Розв'язання

Розв'язування задач на рівновагу сил, прикладених до твердого тіла, виконують за таким алгоритмом.

1. Виділити тіло, рівновагу якого слід розглянути.
2. Прикласти до нього всі задані сили, включаючи і вагу самого тіла.
3. Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями.
4. Застосувати відповідні умови рівноваги і скласти рівняння рівноваги.
5. Розв'язати рівняння щодо шуканих реакцій в'язей, провести перевірку і аналіз результатів.

Виконаємо розв'язування задачі із застосуванням цього алгоритму.

Виділимо тіло AB для розгляду його рівноваги, оскільки до нього прикладені задані сили і пара сил, а також шукані реакції в опорах A і B . Відкидаємо в'язі і замінюємо їх реакціями. Опора A – нерухомий шарнір, реакція складається з двох складових, які раціонально спрямувати вздовж координатних осей. Опора B є стрижнем, реакція котрого направлена вздовж його осі.

Вибираємо вісь X горизонтально, вісь Y – вертикально. Покажемо тіло AB (балка) з відкинутими в'язями і прикладеними реакціями (рис. 2).

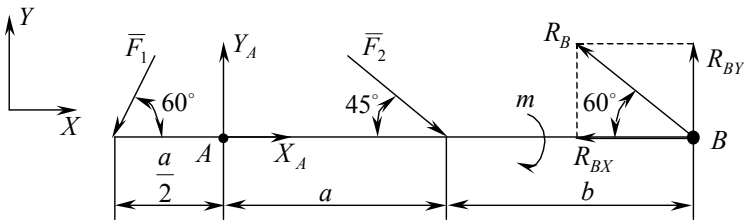


Рис. 2

У наступних прикладах такого детального аналізу проводити не будемо, а також окремо зображувати балку з відкинутими в'язями. Раціонально на рисунку (рис. 1) показати реакції і положення вибраних осей.

З рис. 2 видно, що до балки AB прикладено плоску систему довільних сил, тому застосуємо тип рівнянь рівноваги, котрі мають місце для цього випадку: два рівняння проєкцій на координатні осі X і Y , а також суму моментів відносно точки A , оскільки в даній точці перетинаються лінії дії двох невідомих реакцій. Можна взяти і точку B , в якій перетинаються лінії дії реакцій. Точку перетину ліній дії реакцій вибрати не слід. Це викличе складнощі під час

визначення моментів сил відносно цієї точки. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, \quad -F_1 \cos 60^\circ + X_A + F_2 \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -F_1 \sin 60^\circ + Y_A - F_2 \sin 45^\circ + R_B \sin 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad F_1 \frac{a}{2} \sin 60^\circ - F_2 a \sin 45^\circ - m + R_B (a + b) \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

Під час складання останнього рівняння моментів відносно точки A використано теорему Варіньона про момент равнодійної, при цьому сила і реакція розкладаються по осях X і Y . На рис. 2 показано приклад розкладення реакції на складові. Моменти відносно точки A створюють тільки вертикальні складові (рис. 2). Горизонтальні складові (компоненти) моменту відносно точки A не створюють, оскільки лінії їх дії перетинають точку A .

У разі додержання цих рекомендацій останнє рівняння (3) матиме тільки одне невідоме, у нашому випадку R_B . Розв'яжемо це рівняння відносно R_B .

$$R_B = \frac{m + F_2 a \sin 45^\circ - F_1 \frac{a}{2} \sin 60^\circ}{(a + b) \sin 60^\circ}.$$

Підставимо чисельні значення в отриманий розв'язок і визначимо реакцію R_B .

$$R_B = \frac{30 + 25 \cdot 2 \sin 45^\circ - 40 \frac{2}{2} \sin 60^\circ}{(2 + 3) \sin 60^\circ} = 7,093 \text{ кН}.$$

Під час обчислення краще використати інженерні калькулятори, які містять тригонометричні функції. При цьому чисельні значення тригонометричних функцій підставляти не слід, калькулятор дозволяє обчислювати значення тригонометричних функцій і множити ці значення у виразі. При цьому

буде досягнута максимальна точність. Якщо в подальшому використати пам'ять калькулятора, то проміжні обчислення не потрібні. Тоді остаточний результат буде отриманий з максимальною точністю. І тільки цей результат слід округлити, хоча в пам'яті калькулятора він може зберігатися з цією ж точністю. У разі округлення слід користуватись наступними рекомендаціями. Для більшості інженерних розрахунків достатня точність у тризначних цифрах. Для отримання такої точності всі проміжні обчислення мають бути проведені з точністю на порядок вище, тобто чотирма значущими цифрами.

Підставляємо R_B в рівняння (1) і обчислюємо X_A .

$$X_A = F_1 \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ = 40 \cos 60^\circ + 7,093 \cos 60^\circ - 25 \cos 45^\circ = 5,869 \text{ кН};$$

$$X_A = 5,869 \text{ кН}.$$

Підставляємо R_B в рівняння (2) і обчислюємо Y_A .

$$Y_A = F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 45^\circ - R_B \sin 60^\circ = 40 \sin 60^\circ + 25 \sin 45^\circ - 7,093 \sin 60^\circ = 46,18 \text{ кН};$$

$$Y_A = 46,176 \text{ кН}.$$

Відповідь: $X_A = 5,869 \text{ кН}$; $Y_A = 46,18 \text{ кН}$; $R_B = 7,093 \text{ кН}$.

Задача 2

Тверде тіло (балка, рис. 3) жорстко закріплене в точці А і навантажене розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$, силою $F_I = 20 \text{ кН}$ і парою сил $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Геометричні розміри $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$. Визначити реакції опори.

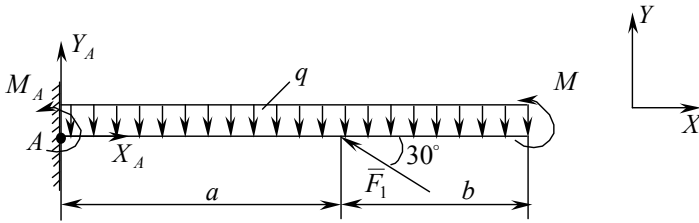


Рис. 3

Розв'язання

Опора A є жорстким закріпленням, реакція такої опори складається із трьох складових. Виберемо осі X, Y (рис.3) і покажемо на цьому рисунку складові реакції опори A : X_A, Y_A, M_A . Складаємо три рівняння рівноваги, оскільки маємо плоску систему довільних сил:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - F_1 \cos 30^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - q(a+b) + F_1 \sin 30^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad M_A - q(a+b) \frac{a+b}{2} + F_1 a \sin 30^\circ + M = 0. \quad (6)$$

Розв'язок таких рівнянь легкий, оскільки кожне рівняння має одне невідоме.

Підставимо в (4) чисельні значення і визначимо відповідну реакцію X_A .

$$X_A = F_1 \cos 30^\circ = 20 \cos 30^\circ = 17,32 \text{ кН};$$

$$X_A = 17,32 \text{ кН}.$$

Рівняння (5) розв'яжемо відносно Y_A .

$$Y_A = q(a+b) - F_1 \sin 30^\circ = 10(3+2) - 20 \sin 30^\circ = 40 \text{ кН};$$

$$Y_A = 40 \text{ кН}.$$

Рівняння (6) розв'яжемо відносно реактивного моменту M_A .

$$M_A = q(a+b) \frac{a+b}{2} - F_1 a \sin 30^\circ - M = 10(3+2) \frac{3+2}{2} - 20 \cdot 3 \sin 30^\circ - 25 = 70 \text{ кН};$$

$$M_A = 70 \text{ кН}.$$

Всі складові реакції опори A отримані додатними. Це означає, що вибрані напрями X_A , Y_A і M_A відповідають дійсності.

Відповідь: $X_A = 17,32 \text{ кН}$, $Y_A = 40 \text{ кН}$, $M_A = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 3

Балка AB (рис. 4) в точці A закріплена до стіни рухомим шарніром, в точці B спирається на вістря. Визначити реакції опор, якщо $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 18 \text{ кН}$, $F_3 = 22 \text{ кН}$, $a = 1,5 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

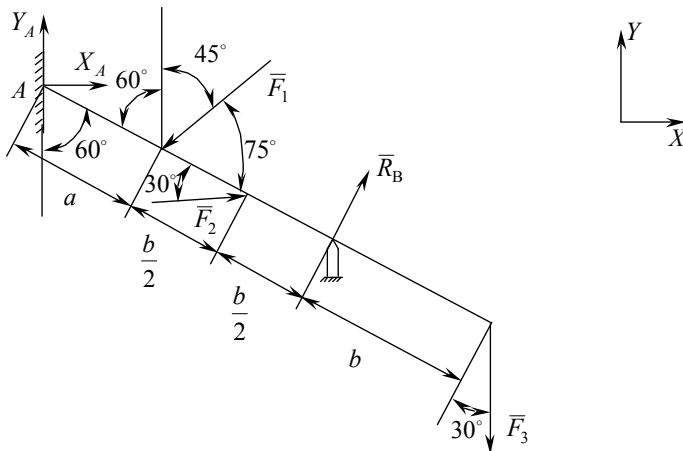


Рис. 4

Розв'язання

Опора A є нерухомим шарніром, реакцію розкладемо на дві складові. Виберемо осі X , Y (рис. 4) і покажемо складові опори A реакції X_A і Y_A . Вістря B спирається на абсолютно гладеньку поверхню балки AB , тобто, якщо з двох контактуючих тіл одне є точкою, то реакція напрямлена перпендикулярно до площини балки AB (реакція R_B).

Складаємо три рівняння рівноваги, рівняння моментів запишемо щодо точки A .

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - F_1 \sin 45^\circ + F_2 + R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - F_1 \cos 45^\circ + R_B \sin 60^\circ - F_3 = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0, \quad & -F_1 a \sin 75^\circ + F_2 \left(a + \frac{b}{2}\right) \sin 30^\circ + \\ & + R_B (a + b) - F_3 (a + 2b) \cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Під час складання рівняння моментів (9) сили F_1 , F_2 і F_3 розкладаємо на складові вздовж балки AB і перпендикулярно до неї. Всі складові вздовж балки моменту відносно точки A не створюють. Складові, що перпендикулярні до балки AB , створюють моменти відносно точки A .

Із аналізу рівнянь випливає, що рівняння (9) може бути розв'язане відносно R_B .

$$R_B = \frac{F_1 a \sin 75^\circ - F_2 \left(a + \frac{b}{2}\right) \sin 30^\circ + F_3 (a + 2b) \cos 30^\circ}{a + b}.$$

Підставимо в рівняння чисельні значення і знайдемо реакцію вістря R_B :

$$R_B = \frac{15 \cdot 1,5 \sin 75^\circ - 18(1,5 + 1) \sin 30^\circ + 22(1,5 + 4) \cos 30^\circ}{1,5 + 2} = 29,72 \text{ кН};$$

$$R_B = 29,72 \text{ кН}.$$

Підставимо R_B у рівняння (7) і (8) та визначимо реакції X_A і Y_A :

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \sin 45^\circ - F_2 - R_B \cos 60^\circ = \\ &= 15 \sin 45^\circ - 18 - 29,72 \cos 60^\circ = -22,25 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$X_A = -22,25 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} Y_A &= F_1 \cos 45^\circ - R_B \sin 60^\circ + F_3 = \\ &= 15 \cos 45^\circ - 22,72 \sin 60^\circ + 22 = 6,868 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Y_A = 6,868 \text{ кН}.$$

Відповідь: $X_A = -22,25 \text{ кН}$, $Y_A = 6,868 \text{ кН}$, $R_B = 29,72 \text{ кН}$, реакція X_A спрямована в бік, протилежний показаній стрілці на рис. 4.

Задача 4

Балка AB (рис. 5) в точці A закріплена нерухомим шарніром, в точці B – гнучою нерозтяжною ниткою, один кінець котрої закріплено нерухомо в точці B , а другий кінець перекинуто через блок C і до нього прикріплено вантаж $Q = 50 \text{ кН}$. На балку діє розподілене навантаження інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$ і зосереджена сила $F_1 = 20 \text{ кН}$. Геометричні розміри $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

Розв'язання

Нерухомий шарнір A має дві складові реакції, як показано на рис. 5. Гнучка нерозтяжна нитка працює тільки на розтяг, а тому напрям її реакції R_B відомий. Нитка BC має

натяг, який дорівнює Q (тертям у блоці C нехтуємо).

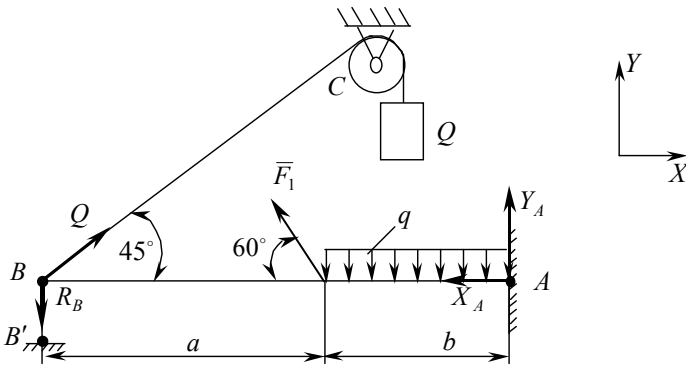


Рис. 5

Одержана система довільних сил є плоскою, вибираємо осі X і Y , складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, \quad Q \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ - X_A = 0; \quad (10)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Q \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - R_B - qb + Y_A = 0; \quad (11)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0,$$

$$R_B(a+b) - Q(a+b) \sin 45^\circ - F_1 b \sin 60^\circ + qb \frac{b}{2} = 0. \quad (12)$$

Рівняння (10) розв'язуємо відносно X_A :

$$X_A = Q \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 50 \cos 45^\circ - 20 \cos 60^\circ = 25,36 \text{ кН};$$

$$X_A = 25,36 \text{ кН}.$$

Рівняння (12) має одну невідому R_B , визначимо її:

$$R_B = \frac{Q(a+b) \sin 45^\circ + F_1 b \sin 60^\circ - qb \frac{b}{2}}{a+b} =$$

$$= \frac{50(3+2) \sin 45^\circ + 20 \cdot 2 \sin 60^\circ - 10 \cdot 2 \cdot 1}{3+2} = 38,28 \text{ кН};$$

$$R_B = 38,28 \text{ кН}.$$

Зазначимо, що реакція гнучкої нитки R_B має бути додатною (якщо правильно вибрано напрям). Якщо в результаті розв'язку отримали знак мінус, то точку закріплення B' необхідно змінити на протилежну, тобто розвернути нитку BB' на 180° , і про це треба обов'язково вказати.

Тепер можна розв'язати рівняння (11) відносно Y_A (R_B відома):

$$Y_A = R_B + qb - Q \sin 45^\circ - F_1 \sin 60^\circ =$$

$$= 38,28 + 10 \cdot 2 - 50 \sin 45^\circ - 20 \sin 60^\circ = 5,608 \text{ кН};$$

$$Y_A = 5,608 \text{ кН}.$$

$$\text{Відповідь: } X_A = 25,36 \text{ кН}, Y_A = 5,608 \text{ кН}, R_B = 38,28 \text{ кН}.$$

Задача 5

Балка AB своїми кінцями спирається на дві взаємно перпендикулярні, абсолютно гладенькі стінки (рис. 6) і навантажена силами $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 30 \text{ кН}$, власна вага балки $P = 8 \text{ кН}$. Визначити вагу вантажу Q , котрий необхідно закріпити до кінця гнучкої нерозтяжної нитки, щоб утримати в рівновазі балку AB в показаному на рис. 6 положенні. Визначити також реакції в опорах A і B , якщо $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$.

Розв'язання

Балка AB в точках A і B торкається до абсолютно гладенької стіни, тому реакції у цих точках будуть

перпендикулярні до поверхонь (див. рис. 6). У точці C покажемо натяг нитки Q (тертя у блоці нехтуємо). Виберемо осі X , Y і складемо рівняння рівноваги, при цьому рівняння моментів буде відносно точки D (рис. 6), де перетинаються невідомі реакції R_A і R_B :

$$\sum X_i = 0, \quad R_B - Q = 0; \quad (13)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A - F_1 - P - F_2 = 0; \quad (14)$$

$$\sum M_D(F_i) = 0, \quad Q(2a + b + a/2) \cos 30^\circ - F_1(b + a/2) \sin 30^\circ - P(2b + a/2) \sin 30^\circ - F_2(2b + a/2 + a) \sin 30^\circ = 0. \quad (15)$$

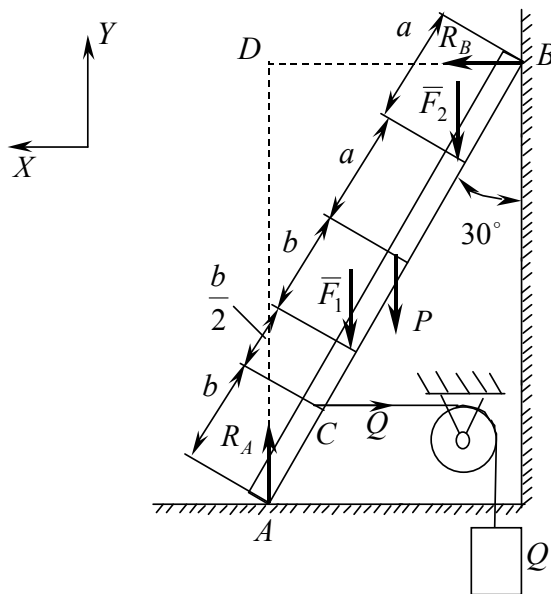


Рис. 6

Рівняння (14) розв'яжемо відносно R_A :

$$R_A = F_1 + F_2 + P = 10 + 30 + 8 = 48 \text{ кН};$$

$$R_A = 48 \text{ кН}.$$

Рівняння (15) розв'яжемо відносно Q :

$$Q = \frac{F_1(b + \frac{a}{2})\sin 30^\circ + P(2b + \frac{a}{2})\sin 30^\circ + F_2(2b + \frac{3}{2}a)\sin 30^\circ}{(2a + b + \frac{a}{2})\cos 30^\circ} =$$
$$= \frac{10(1,5 + 1)\sin 30^\circ + 8(3 + 1)\sin 30^\circ + 30(3 + 3)\sin 30^\circ}{(4 + 1,5 + 1)\cos 30^\circ} = 21,05 \text{ кН};$$

$$Q = 21,05 \text{ кН}.$$

Із (13) визначимо R_B :

$$R_B = Q = 21,05 \text{ кН}.$$

Необхідно зазначити, що положення рівноваги балки AB , яке одержано в розв'язку, не є стійким. Для отримання стійкої рівноваги необхідно відкинути блок і замість вантажу Q закріпити нитку на вертикальній стінці, зберігаючи горизонтальне положення нитки. При цьому буде отримана геометрично незмінна жорстка фігура – трикутник.

Відповідь: $R_A = 48 \text{ кН}$, $R_B = Q = 21,05 \text{ кН}$.

Задача 6

У цій задачі – ускладнений варіант плоскої системи довільних сил.

Жорстка рама AB (рис. 7) знаходиться в рівновазі під дією зосереджених сил $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 22 \text{ кН}$, розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 12 \text{ кН/м}$ і пари сил з моментом $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Визначити реакції опор, якщо $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 4 \text{ м}$, $d = 3 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Розв'язання

Розв'язування задачі виконується за тим самим алгоритмом, що наданий для розв'язування задачі 1. Тому не будемо детально зупинятися на цьому алгоритмі і перейдемо до реакцій опор. Опора A – нерухомий шарнір, реакція складається з двох складових: X_A і Y_A . Покажемо їх на рис. 7, попередньо вибравши осі X і Y . В опорі B встановлений стрижень, реакція котрого направлена вздовж його осі. В результаті отримуємо плоску систему довільних сил, складемо три рівняння рівноваги.

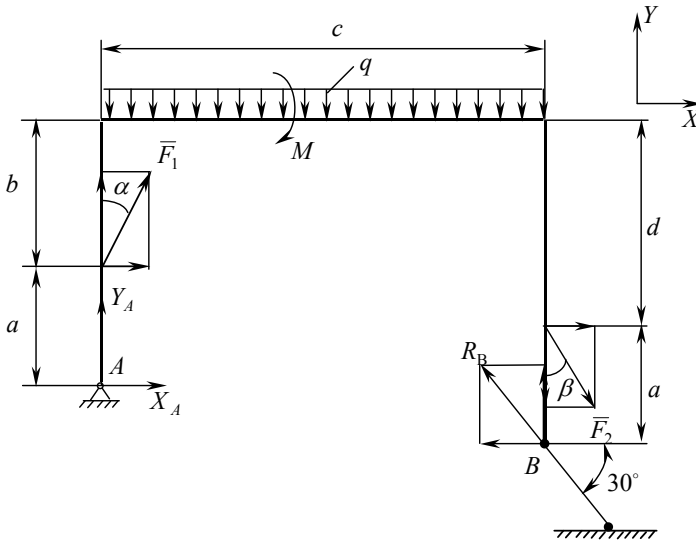


Рис. 7

$$\sum X_i = 0, X_A + F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \beta - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (16)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A + F_1 \cos \alpha - qc - F_2 \sin \beta + R_B \sin 30^\circ = 0; \quad (17)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, -F_1 a \sin \alpha - qc \frac{c}{2} - m - F_2 c \sin \beta -$$

$$-F_2(a+b-d)\cos\beta + R_B c \sin 30^\circ - R_B(d-b)\cos 30^\circ = 0. \quad (18)$$

Під час складання рівняння моментів (18) моменти сил F_1 , F_2 і R_B визначали з використанням теореми Варіньона про момент равнодійної, розклавши сили за осями координат. При цьому обидві складові F_2 і R_B створюють моменти відносно точки A .

Аналізуючи отримані рівняння, зазначимо, що рівняння (18) має одну невідому R_B . Знайдемо її:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{F_1 a \sin \alpha + q \frac{c^2}{2} + M + F_2 c \sin \beta + F_2(a+b-d)\cos\beta}{c \sin 30^\circ - (d-b)\cos 30^\circ} = \\ &= \frac{15 \cdot 2 \sin 45^\circ + 12 \frac{4^2}{2} + 20 + 22 \cdot 4 \sin 60^\circ + 22(2+1,5-3)\cos 60^\circ}{4 \sin 30^\circ - (3-1,5)\cos 30^\circ} = \\ &= 312,32 \text{ кН}; \\ R_B &= 312,32 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (16) визначимо X_A :

$$\begin{aligned} X_A &= R_B \cos 30^\circ - F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta = \\ &= 312,32 \cos 30^\circ - 15 \sin 45^\circ - 22 \cos 60^\circ = 248,87 \text{ кН}; \\ X_A &= 248,87 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рівняння (17) розв'яжемо відносно Y_A :

$$\begin{aligned} Y_A &= qc + F_2 \sin \beta - F_1 \cos \alpha - R_B \sin 30^\circ = \\ &= 12 \cdot 4 + 22 \sin 60^\circ - 15 \cos 45^\circ - 312,32 \sin 30^\circ = -99,71 \text{ кН}; \\ Y_A &= -99,71 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = 248,87 \text{ кН}$, $Y_A = -99,71 \text{ кН}$, $R_B = 312,32 \text{ кН}$. Реакція Y_A направлена у протилежний бік, ніж показано на рис. 7.

Задача 7

Жорстка рама (рис. 8) знаходиться в рівновазі під дією сил, $F_1 = 22 \text{ кН}$, $F_2 = 18 \text{ кН}$, пари сил із моментом $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 15 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опори A , якщо $a = 3 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 2,0 \text{ м}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

Розв'язання

Опора A , жорстке закріплення, потребує трьох складових. Вибираємо осі координат X, Y (рис. 8) і позначаємо, реакції в опорі A – X_A, Y_A і реактивний момент – M_A . Складемо три рівняння рівноваги

$$\sum X_i = 0, \quad qa - F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \beta + X_A = 0; \quad (19)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \beta + Y_A = 0; \quad (20)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad -qa(b+d-a/2) + F_1(b+d) \cos \alpha + F_2 c \sin \alpha - M - F_2 d \sin \beta + M_A = 0. \quad (21)$$

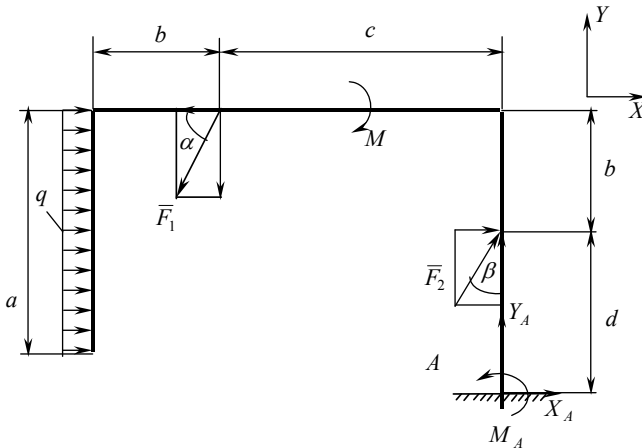


Рис. 8

Під час складання рівняння моментів відносно точки A сили F_1 і F_2 розкладемо на складові вздовж координатних осей і використаємо теорему Варіньона про момент рівнодійної.

Кожне із рівнянь має одне невідоме, тому розв'яжемо послідовно всі рівняння.

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \cos \alpha - qa - F_2 \sin \beta = \\ &= 22 \cos 75^\circ - 15 \cdot 3 - 18 \sin 20^\circ = -45,46 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$X_A = -45,46 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta = \\ &= 22 \sin 75^\circ - 18 \cos 20^\circ = 4,336 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Y_A = 4,336 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} M_A &= qa(b+d-a/2) - F_1(b+d) \cos \alpha - F_1 c \sin \alpha + M + F_2 d \sin \beta = \\ &= 15 \cdot 3(1,5+2-1,5) - 22(1,5+2,0) \cos 75^\circ - 22 \cdot 2,5 \sin 75^\circ + \\ &+ 10 + 18 \cdot 2,0 \sin 20^\circ = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$M_A = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Відповідь:

$X_A = -45,46 \text{ кН}$, $Y_A = 4,336 \text{ кН}$, $M_A = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Реакція X_A протилежна прийнятому на рис. 8 напрямку.

Задача 8

Жорстка рама АВ (рис. 9) знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1 = 28 \text{ кН}$, $F_2 = 14 \text{ кН}$, пари сил з моментом $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а також розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опор, якщо $a = 2,5 \text{ м}$, $b = 2,0 \text{ м}$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 1,5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$.

Розв'язання

Опора A має два стрижні, з'єднані шарнірно разом із рамою в точці A . Другі кінці стрижнів закріплені до нерухомої

основи, так що два стрижні і нерухома основа утворюють геометрично незмінну фігуру – трикутник. Точка A цього трикутника не може переміщуватись у площині, тому реакція шарніра A складається з двох складових X_A і Y_A (рис. 9). У точці B рама також закріплена шарнірно за допомогою невагомий стрижня з кутом нахилу 60° до горизонту. Реакція стрижня направлена вздовж його осі R_B (рис. 9).

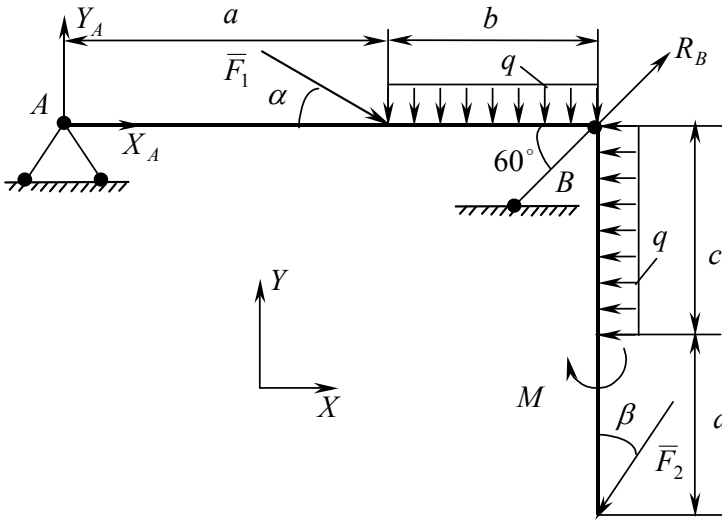


Рис. 9

Після звільнення від в'язей ми будемо мати плоску систему довільних сил, яка діє на раму. Складемо рівняння рівноваги, вибравши осі X , Y (рис. 9). Під час складання рівняння моментів відносно точки A розкладемо на складові сили F_1 , F_2 і R_B , які паралельні осям. При цьому застосуємо теорему Варіньона про момент рівнодійної:

$$\sum X_i = 0, X_A + F_1 \cos \alpha + R_B \cos 60^\circ - qc - F_2 \sin \beta = 0; \quad (22)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A - F_1 \sin \alpha - qb + R_B \sin 60^\circ - F_2 \cos \beta = 0; \quad (23)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, -F_1 a \sin \alpha - qb(a + b/2) + R_B(a + b) \sin 60^\circ - qc \frac{c}{2} - M - F_2(a + b) \cos \beta - F_2(c + d) \sin \beta = 0. \quad (24)$$

Останнє рівняння має одну невідому R_B , розв'яжемо рівняння (24) відносно R_B :

$$R_B = \frac{F_1 a \sin \alpha + qb \left(a + \frac{b}{2} \right) + q \frac{c^2}{2} + M + F_2 [(a + b) \cos \beta + (c + d) \sin \beta]}{(a + b) \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{28 \cdot 2,5 \sin 30^\circ + 10 \cdot 2,0(2,5 + 1) + 10 \frac{2,5^2}{2} + 30 + 14 [(2,5 + 2,0) \cos 50^\circ + (2,5 + 1,5) \sin 50^\circ]}{(2,5 + 2,0) \cdot \sin 60^\circ} = 64,06 \text{ кН};$$

$$R_B = 64,06 \text{ кН.}$$

$$X_A = qc + F_2 \sin \beta - F_1 \cos \alpha - R_B \cos 60^\circ =$$

$$= 10 \cdot 2,5 + 14 \sin 50^\circ - 28 \cos 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = -20,55 \text{ кН};$$

$$X_A = -20,55 \text{ кН.}$$

Із рівняння (23) визначимо Y_A :

$$Y_A = F_1 \sin \alpha + qb - R_B \sin 60^\circ + F_2 \cos \beta =$$

$$= 28 \sin 30^\circ + 10 \cdot 2 - 64,06 \sin 60^\circ + 14 \cos 50^\circ = -12,48 \text{ кН};$$

$$Y_A = -12,48 \text{ кН.}$$

Відповідь:

$$X_A = -20,55 \text{ кН}, Y_A = -12,48 \text{ кН}, R_B = 64,06 \text{ кН.}$$

Напрямок реакцій X_A і Y_A протилежний показаним на рис. 9 стрілкам.

Задача 9

Балка AB (рис. 10) знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1 = 16 \text{ кН}$, $F_2 = 27 \text{ кН}$, пари сил з моментом $M = 19 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 24 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опор балки, якщо $a = 2,0 \text{ м}$, $b = 3,0 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$, $d = 1 \text{ м}$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 75^\circ$.

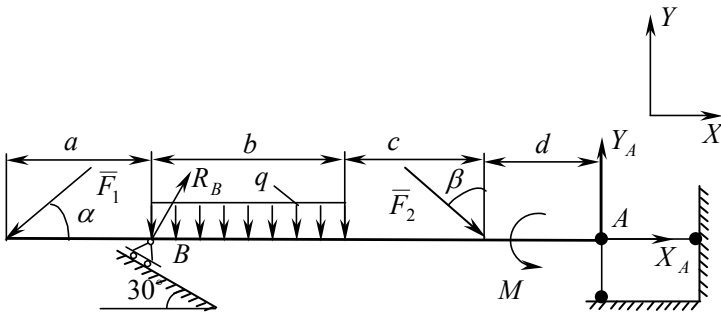


Рис. 10

Розв'язання

Опора A (рис. 10), як і в попередньому випадку складається з двох стрижнів, з'єднаних з балкою в точці A шарнірно, інші кінці стрижнів закріплені до жорсткої основи також шарнірно. Тому реакція шарніра A складається із двох складових X_A і Y_A (рис. 10). Шарнір B – рухомий, реакція R_B напрямлена перпендикулярно похилій площині (рис. 10).

Виберемо осі координат X , Y і складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, -F_1 \cos \alpha + R_B \sin 30^\circ + F_2 \sin \beta + X_A = 0; \quad (25)$$

$$\sum Y_i = 0, -F_1 \sin \alpha + R_B \cos 30^\circ - qb - F_2 \cos \beta + Y_A = 0; \quad (26)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, F_1 \sin \alpha(a + b + c + d) - R_B(b + c + d) \cos 30^\circ + F_2 d \cos \beta + M + qb(b/2 + c + d) = 0. \quad (27)$$

Рівняння (27) розв'яжемо відносно R_B , а тоді два інші – відносно X_A і Y_A відповідно:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{F_1(a + b + c + d) \sin \alpha + F_2 d \cos \beta + M + qb(c + d + b/2)}{(b + c + d) \cos 30^\circ} = \\ &= \frac{16(2 + 3 + 1,5 + 1) \sin 40^\circ + 27 \cdot 1 \cos 75^\circ + 19 + 24 \cdot 3(1,5 + 1,5 + 1)}{(3 + 1,5 + 1) \cos 30^\circ} = \\ &= 100,4 \text{ кН}; \\ R_B &= 100,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \cos \alpha - R_B \sin 30^\circ - F_2 \sin \beta = \\ &= 16 \cos 40^\circ - 100,4 \sin 30^\circ - 27 \sin 75^\circ = -64,02 \text{ кН}; \\ X_A &= -64,02 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= F_1 \sin \alpha - R_B \cos 30^\circ + qb + F_2 \cos \beta = \\ &= 16 \sin 40^\circ - 100,4 \cos 30^\circ + 24 \cdot 3 + 27 \cos 75^\circ = 6,988 \text{ кН}; \\ Y_A &= 6,988 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Відповідь:

$X_A = -64,02 \text{ кН}$, $Y_A = 6,988 \text{ кН}$, $R_B = 100,4 \text{ кН}$. Реакція напрямлена в протилежний бік, ніж показано на рис. 10.

Задача 10

Балка в похилому положенні жорстко закріплена в точці A (рис. 11) і навантажена силами $F_1 = 8 \text{ кН}$, $F_2 = 12 \text{ кН}$, парою сил із моментом $M = 19 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також вертикальним розпо-

діленим навантаженням інтенсивністю $q = 24 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опори A , якщо $a = 2,0 \text{ м}$, $b = 2,0 \text{ м}$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 3,0 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$.

Розв'язання

Виберемо осі координат X , Y і покажемо реакції жорсткого закріплення в точці A – X_A , Y_A , M_A (рис. 11).

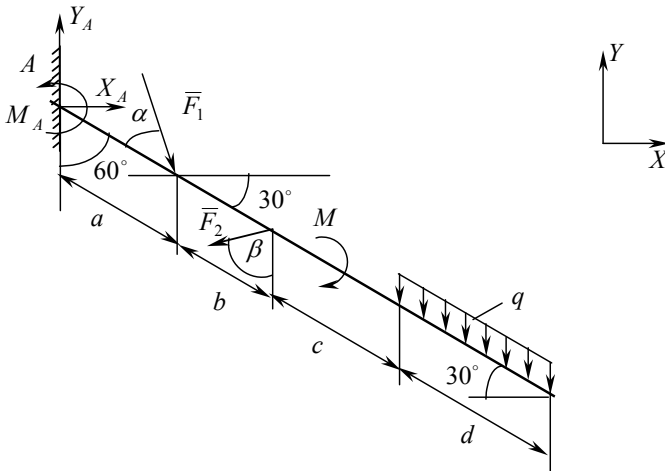


Рис. 11

Під час розв'язування подібних задач з нахилом виникають труднощі з розподіленим навантаженням.

Розглянемо це детальніше. Введення поняття рівномірно розподілене навантаження пов'язано з урахуванням власної ваги самої конструкції, наприклад, масивна залізобетонна балка сталого перерізу, вага котрої Q , а довжина l (рис. 12а).

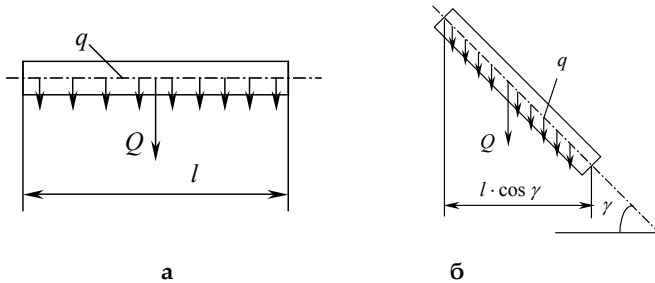


Рис. 12

Вага одиниці довжини такої балки дорівнює:

$$q = \frac{Q}{l}.$$

Величина q називається інтенсивністю розподіленого навантаження. У разі нахилу балки на кут γ інтенсивність q_γ , котра вимірюється, як відношення ваги Q до відрізка, перпендикулярному до навантаження, на котрому вона діє:

$$q = \frac{Q}{l \cos \gamma} = \frac{ql}{l \cos \gamma} = \frac{q}{\cos \gamma}.$$

За вертикального положення балки поняття розподіленого навантаження не має сенсу, тому використовується тільки вага самої конструкції.

Оскільки в умові задачі задане вертикальне розподілене навантаження q_γ , то для визначення Q необхідно покласти:

$$Q = q_\gamma l \cos \gamma.$$

Враховуючи ці обставини, складемо рівняння рівноваги.

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + F_1 \cos(\alpha + 30^\circ) - F_2 \sin \beta = 0; \quad (28)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A - F_1 \sin(\alpha + 30^\circ) - F_2 \cos \beta - qd \cos 30^\circ = 0; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A(F_i) = 0, M_A - F_1 a \sin \alpha - F_2 (a + b) \cos(\beta - 30^\circ) - \\ - M - qd \cos 30^\circ (a + b + c + d / 2) \cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Всі рівняння містять одне невідоме, тому розв'язуються просто:

$$\begin{aligned} X_A &= F_2 \sin \beta - F_1 \cos(\alpha + 30^\circ) = \\ &= 8 \sin 75^\circ - 12 \cos(30^\circ + 30^\circ) = 1,727 \text{ кН}; \\ X_A &= 1,727 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= F_1 \sin(\alpha + 30^\circ) + F_2 \cos \beta + qd \cos 30^\circ = \\ &= 8 \sin(30^\circ + 30^\circ) + 12 \cos 75^\circ + 10 \cdot 3,0 \cos 30^\circ = 32,91 \text{ кН}; \\ Y_A &= 32,91 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_A &= F_1 a \sin \alpha + F_2 (a + b) \cos(\beta - 30^\circ) + M + \\ &+ qd \cos^2 30^\circ (a + b + c + d / 2) = \\ &= 8 \cdot 2 \sin 30^\circ + 12(2 + 2) \cos(75^\circ - 30^\circ) + 14 + \\ &+ 10 \cdot 3 \cos^2 30^\circ (2 + 2 + 2,5 + 1,5) = 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_A &= 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$X_A = 1,727 \text{ кН}; \quad Y_A = 32,91 \text{ кН}; \quad M_A = 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напрями всіх знайдених реакцій відповідають показаним попередньо на розрахунково-силовій схемі.

**Варіанти індивідуального завдання
для самостійної роботи
«Плоска система довільних сил»**

Нижче наведено варіанти індивідуального завдання для студентів інженерних факультетів.

Всі необхідні схеми та розміри для визначення реакцій опор надано в таблиці 3.1 та таблиці 3.2.

Номер індивідуального завдання студент вибирає наступним способом. Якщо в перших трьох групах кількість студентів складає відповідно n_1, n_2 і n_3 і якщо $n_1 + n_2 + n_3 \leq 76$, то студенти вибирають номер завдання згідно з списком групи у журналі:

для першої групи $1, 2, \dots, n_1$;

для другої групи $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$;

для третьої групи $n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$.

Якщо в наступних трьох групах кількість студентів відповідно дорівнює n_4, n_5 і n_6 , причому $n_4 + n_5 + n_6 \leq 76$, то номер завдання становить:

для четвертої групи $1, 2, \dots, n_4$;

для п'ятої групи $n_4 + 1, n_4 + 2, \dots, n_4 + n_5$;

для шостої групи $n_4 + n_5 + 1, n_4 + n_5 + 2, \dots, n_4 + n_5 + n_6$,

до того ж розміри на рисунках для кожного варіанту необхідно збільшити в два рази.

Аналогічно робимо і для наступних номерів груп із кількістю студентів n_7, n_8, n_9 і n_{10}, n_{11}, n_{12} , збільшуючи для кожної наступної трійки груп розміри на рисунках в три і чотири рази відповідно.

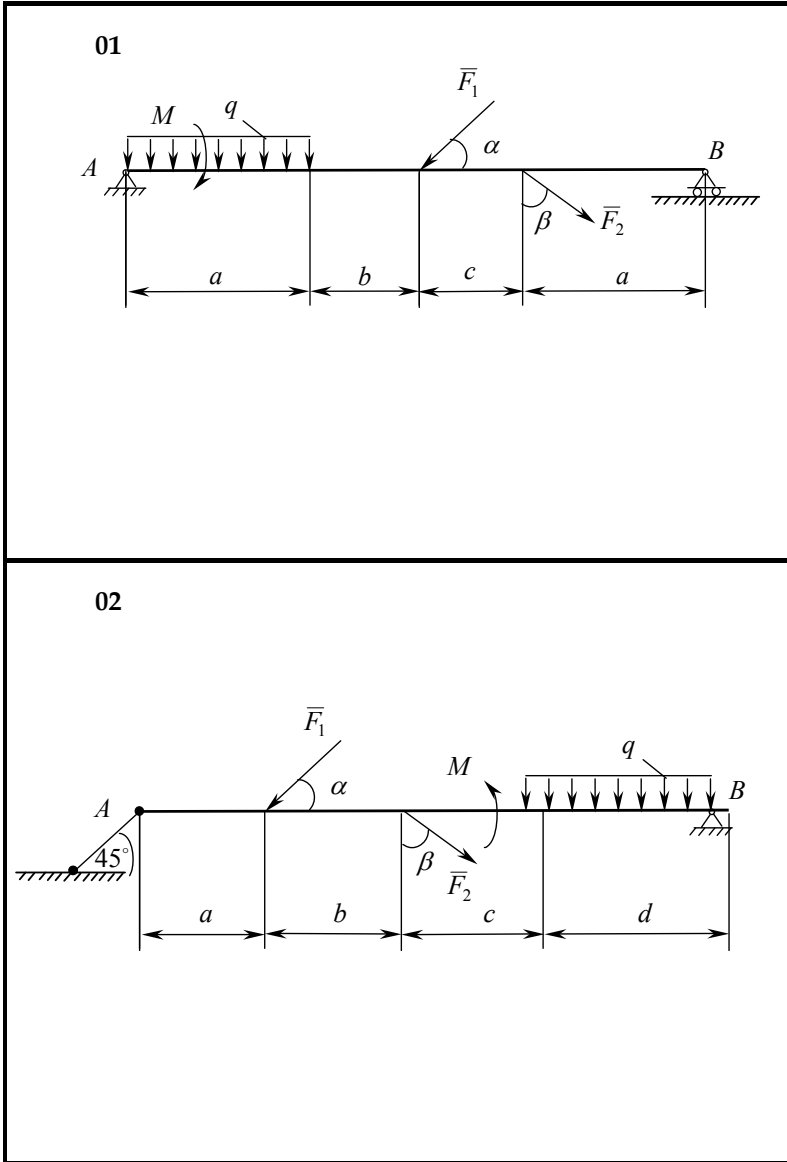
3.1. Таблица варіантів заданих параметрів

Таблица 3.1

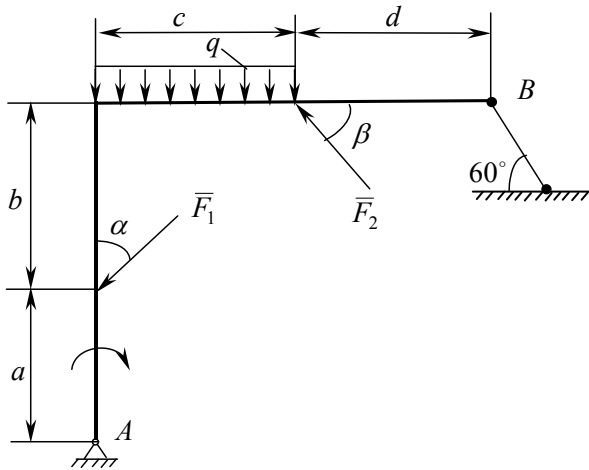
Вари- ант	F_1	F_2	α	β	M	q	a	b	c	d
	кН		град		кН·м	кН/м	м	м	м	м
1	10	15	30	45	20	15	2,0	0,8	1,2	1,0
2	7	18	60	30	10	12	1,0	1,5	1,5	2,0
3	20	12	75	30	18	10	2,0	1,0	3,0	1,0
4	8	7	60	75	30	5	2,0	3,0	1,0	2,0
5	12	15	30	20	18	7	2,0	2,0	1,5	2,5
6	16	8	75	15	20	10	1,0	2,0	1,0	2,0
7	10	18	60	20	15	12	1,0	1,0	2,0	1,0
8	8	20	30	30	10	10	1,0	2,0	0,8	1,2
9	15	6	60	15	20	7	1,4	0,6	0,2	1,8
10	5	18	20	40	15	8	2,2	0,8	1,0	1,0
11	7	20	45	20	10	15	2,0	2,0	2,0	1,0
12	10	12	25	75	18	5	2,0	3,0	1,5	1,5
13	15	10	70	20	15	5	3,0	2,0	1,0	2,0
14	20	8	60	40	20	10	2,0	1,0	0,6	1,4
15	18	12	15	30	18	15	1,2	0,8	0,4	1,6
16	10	18	60	40	15	10	1,0	1,0	0,8	1,2
17	6	20	45	30	8	20	1,0	1,8	1,2	2,0
18	12	15	25	60	6	10	1,5	0,5	1,0	1,0
19	16	16	45	15	20	15	2,5	1,5	2,5	1,5
20	20	8	75	25	10	10	2,0	2,0	2,5	1,5
21	15	10	20	30	18	5	2,5	1,5	2,0	1,0
22	10	15	30	45	20	10	2,0	2,0	2,0	2,0
23	12	8	60	30	12	12	1,0	1,0	2,0	1,0
24	7	15	75	30	16	10	1,5	2,5	1,0	2,0
25	10	20	30	20	8	7	1,0	2,0	2,0	2,0
26	5	18	30	30	30	5	2,0	1,0	2,0	1,0
27	18	12	60	15	10	10	3,0	1,0	2,0	2,0
28	16	8	70	20	12	8	1,5	2,5	2,0	2,0
29	12	15	75	15	20	5	2,0	2,0	3,0	1,0
30	18	10	15	30	15	5	2,0	2,0	4,0	3,0

3.2. Схеми варіантів завдань

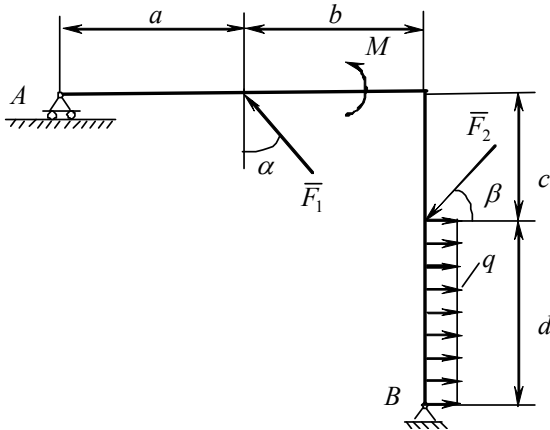
Таблиця 3.2



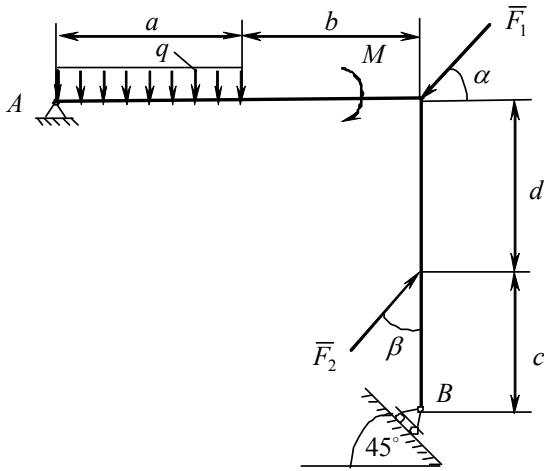
03



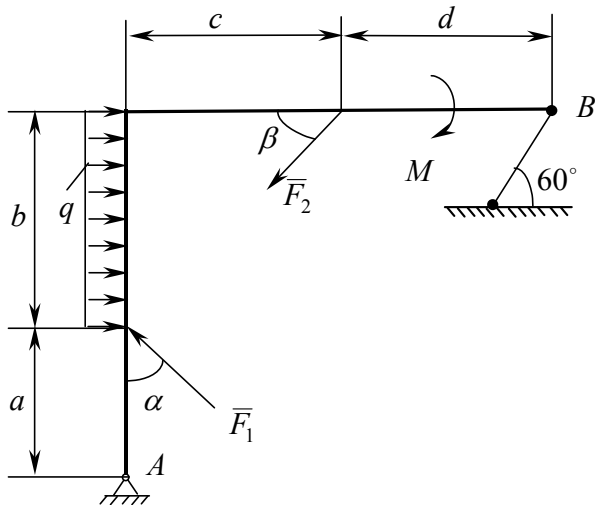
04



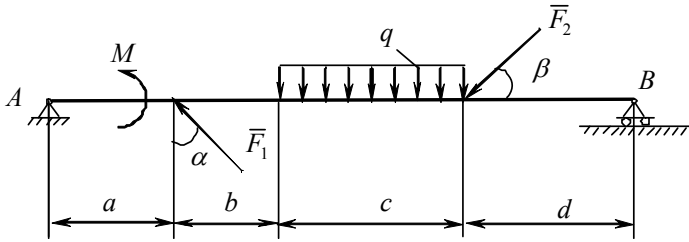
05



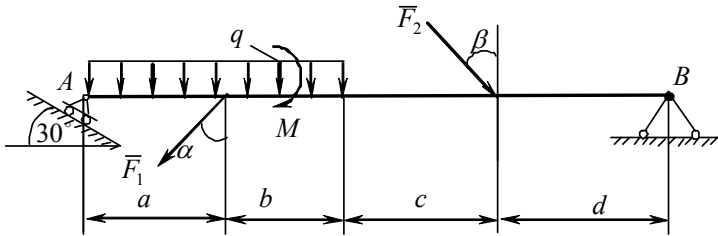
06



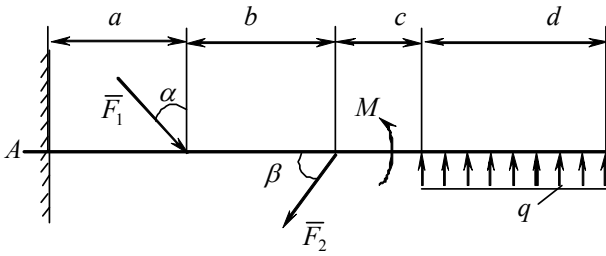
07



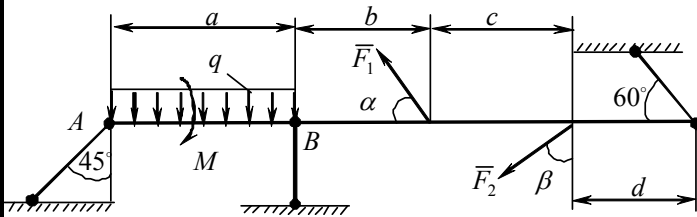
08



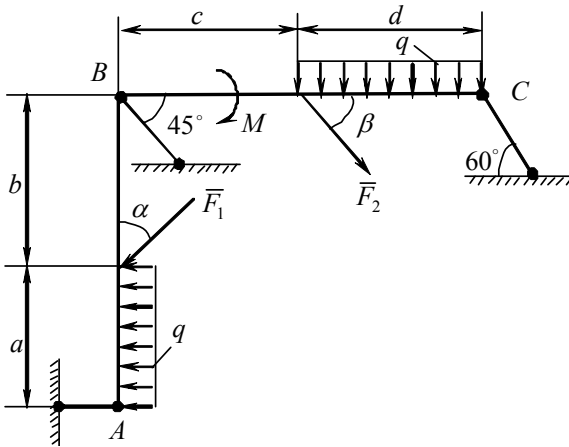
09



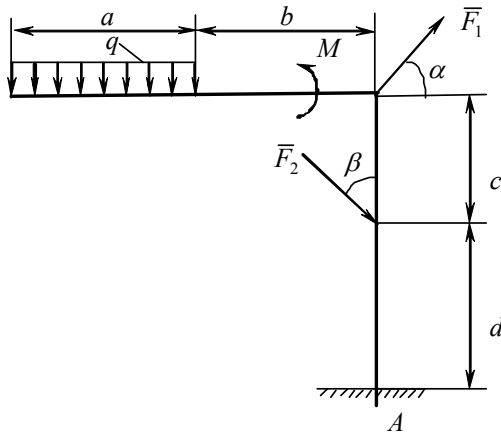
10



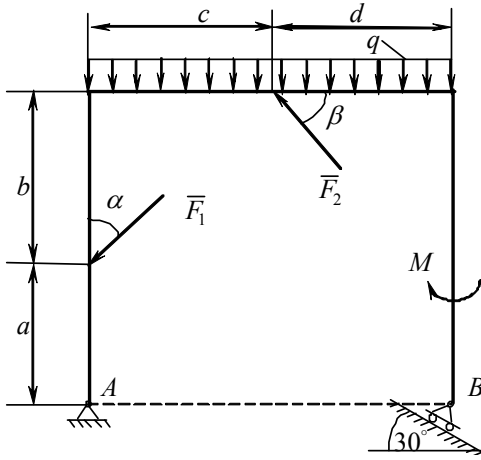
11



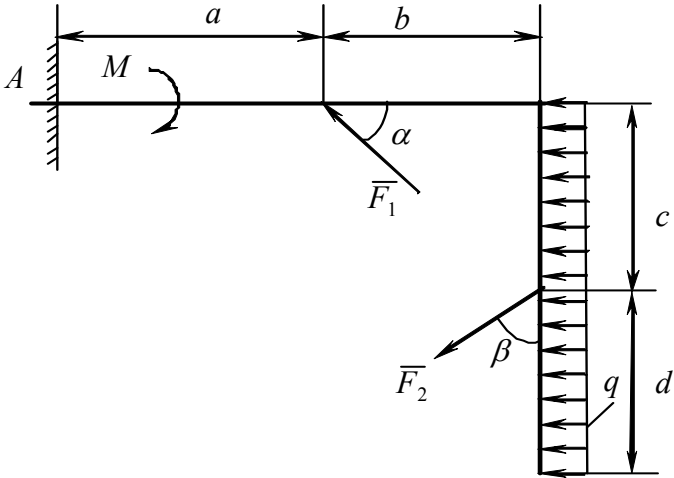
12



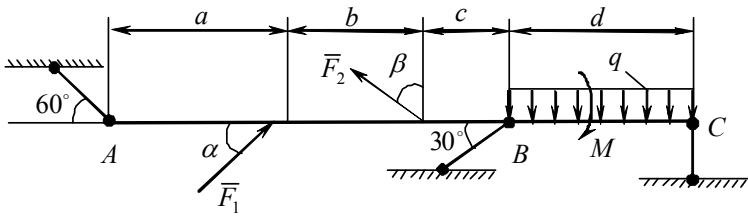
13



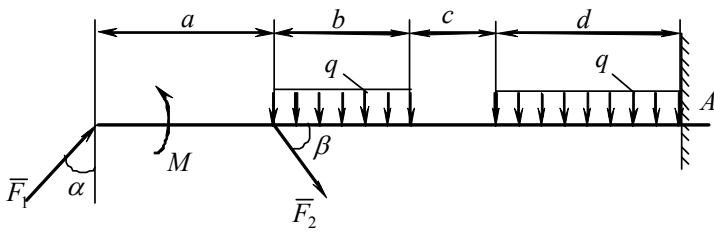
14



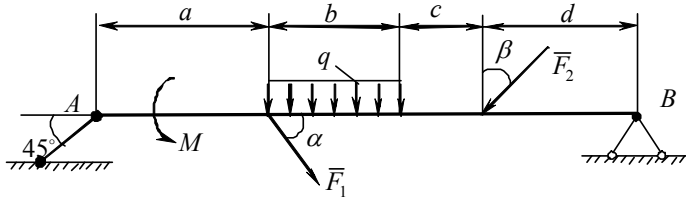
15



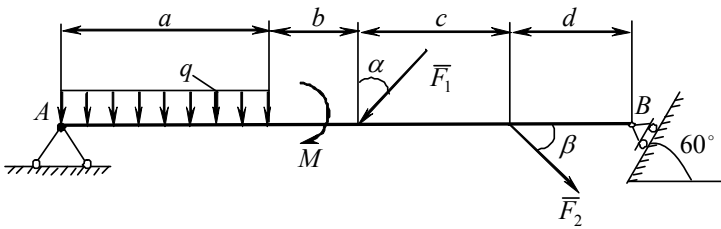
16



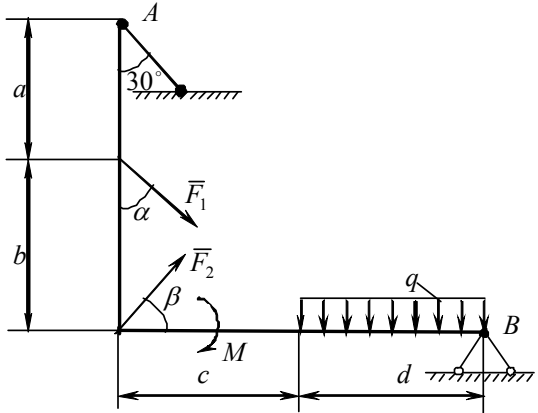
17



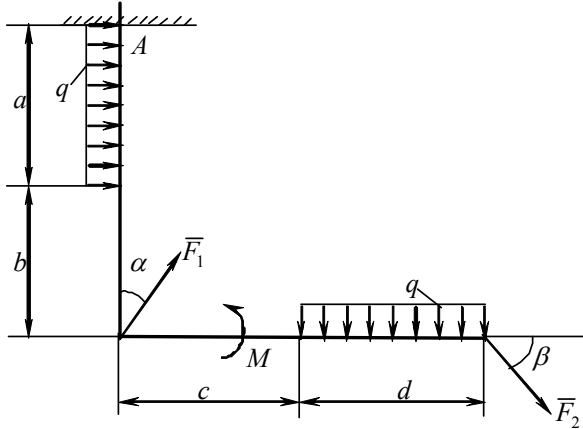
18



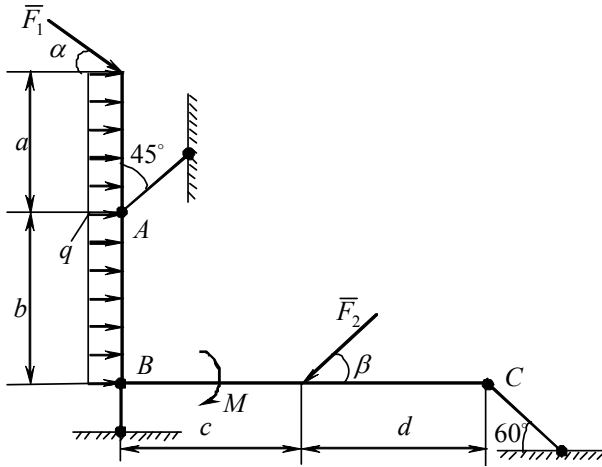
19



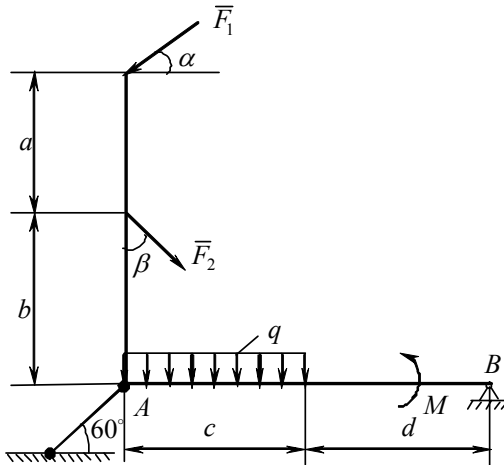
20



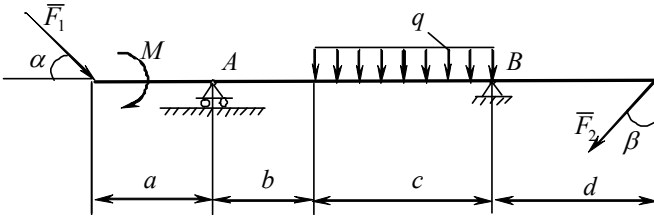
21



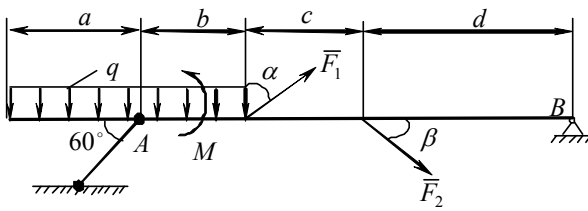
22



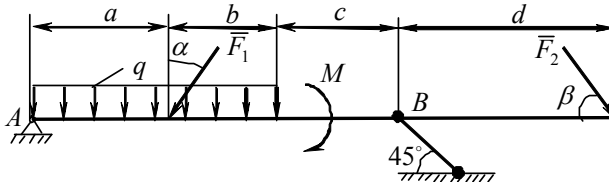
23



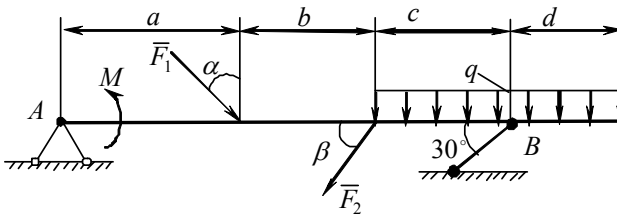
24



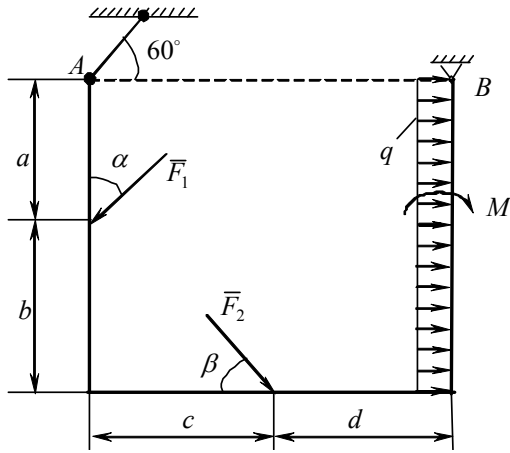
25



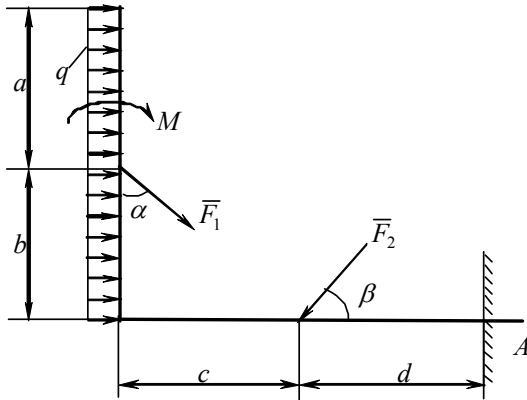
26



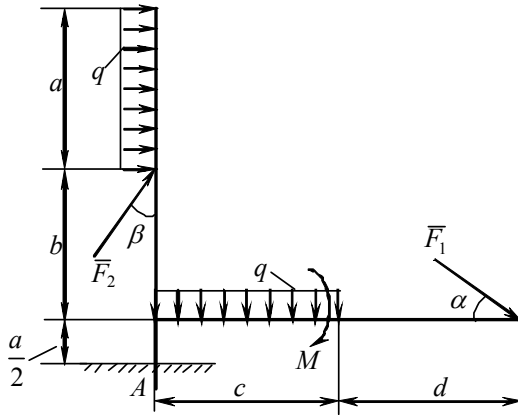
27



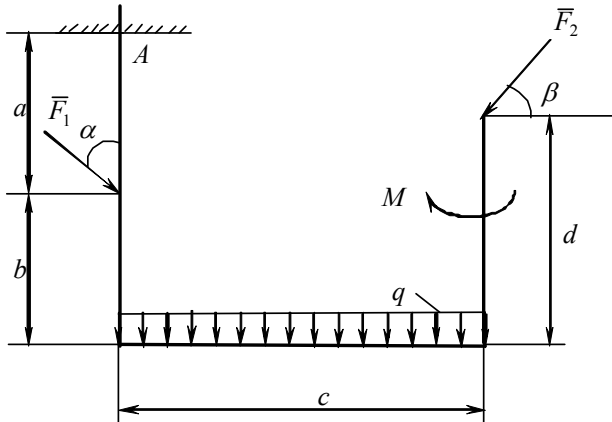
28



29



30



**Варіанти індивідуального завдання
для самостійної роботи
«Центр ваги плоского тіла»**

Нижче наведено варіанти індивідуального завдання для студентів інженерних факультетів.

Всі необхідні розміри для знаходження положення центра ваги даної фігури надано на рисунках.

Номер індивідуального завдання студент вибирає наступним способом. Якщо в перших трьох групах кількість студентів становить відповідно n_1, n_2 і n_3 і якщо $n_1 + n_2 + n_3 \leq 76$, то студенти вибирають номер завдання згідно з списком групи у журналі:

для першої групи $1, 2, \dots, n_1$;

для другої групи $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$;

для третьої групи $n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$.

Якщо в наступних трьох групах кількість студентів відповідно дорівнює n_4, n_5 і n_6 , причому $n_4 + n_5 + n_6 \leq 76$, то номер завдання становить:

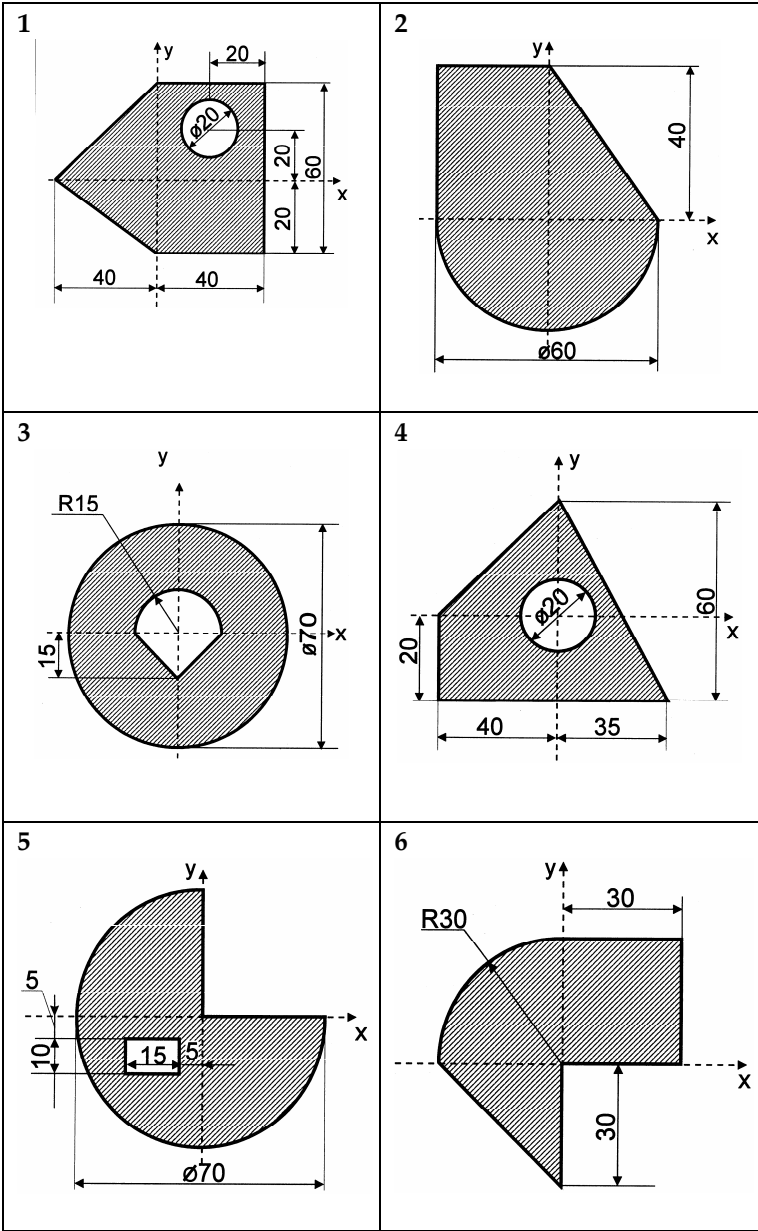
для четвертої групи $1, 2, \dots, n_4$;

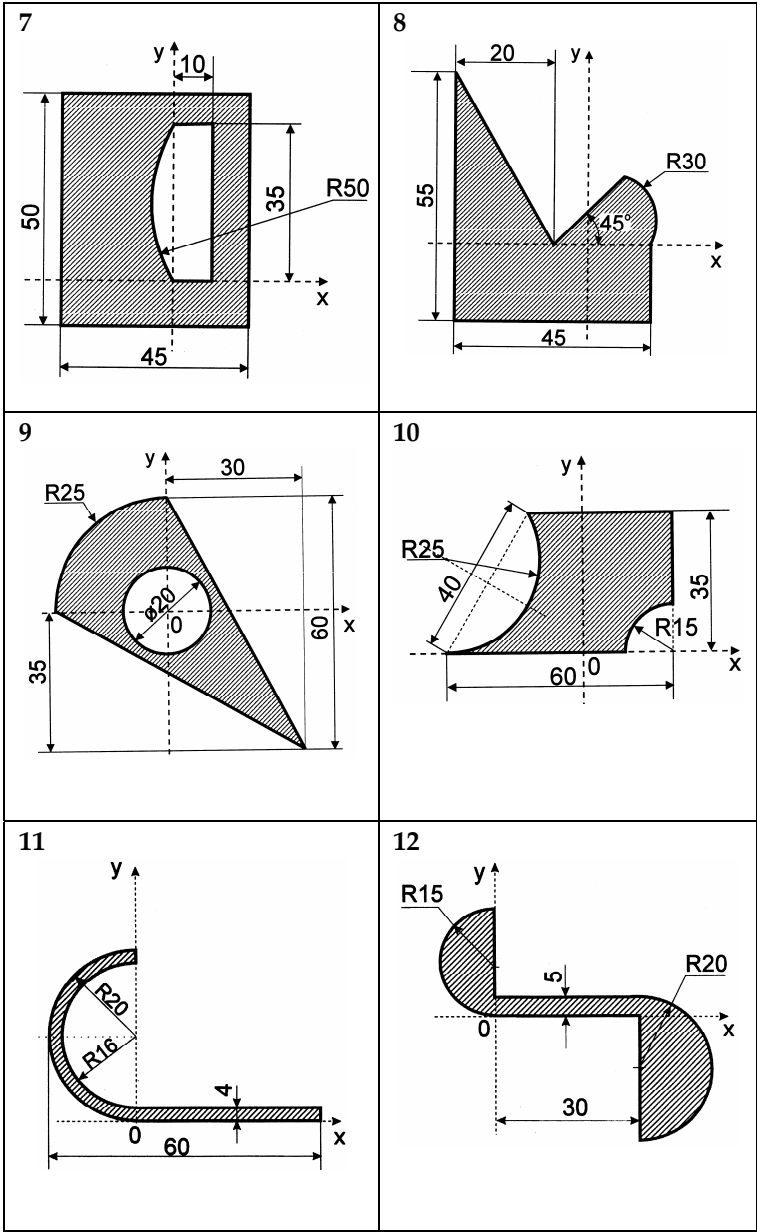
для п'ятої групи $n_4 + 1, n_4 + 2, \dots, n_4 + n_5$;

для шостої групи $n_4 + n_5 + 1, n_4 + n_5 + 2, \dots, n_4 + n_5 + n_6$,

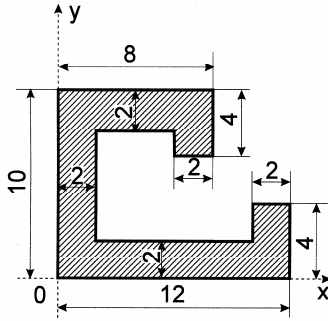
до того ж розміри на рисунках для кожного варіанту необхідно збільшити в два рази.

Аналогічно робимо і для наступних номерів груп із кількістю студентів n_7, n_8, n_9 і n_{10}, n_{11}, n_{12} , збільшуючи для кожної наступної трійки груп розміри на рисунках в три і чотири рази відповідно.

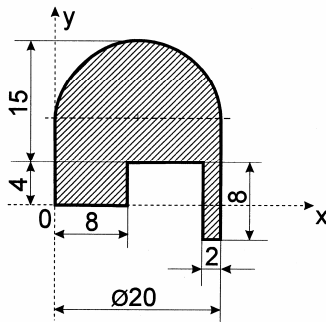




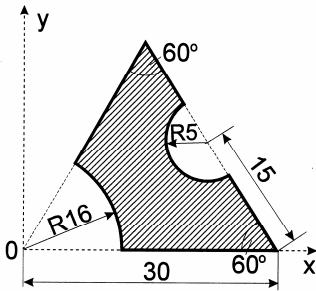
13



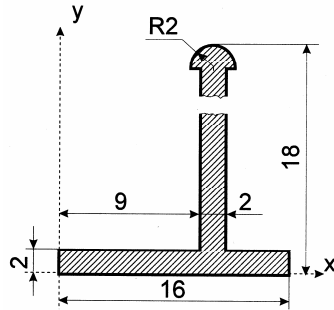
14



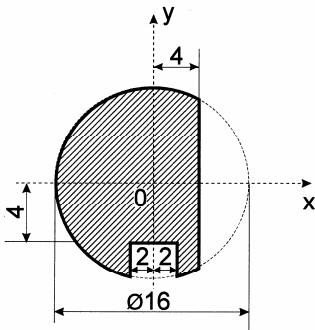
15



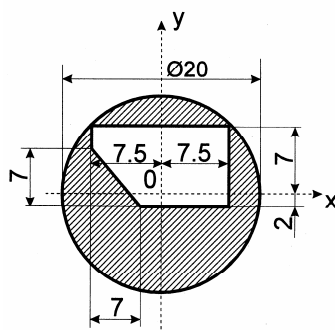
16

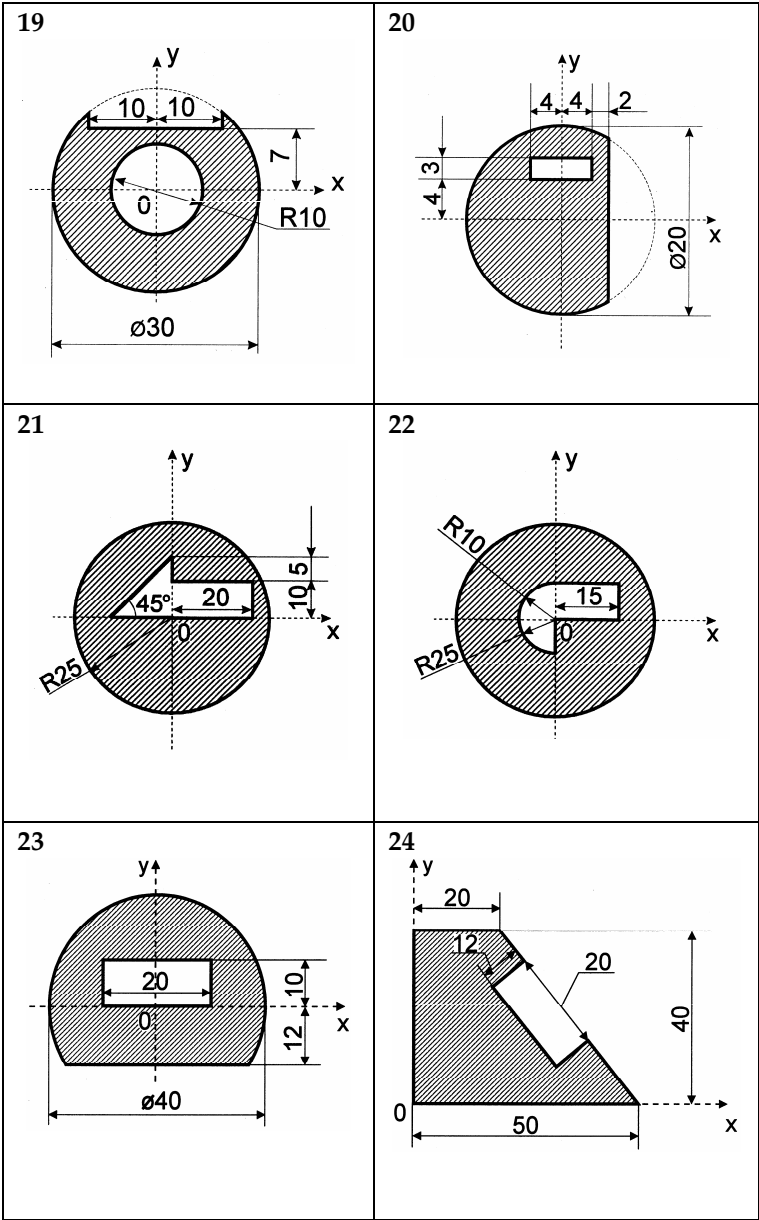


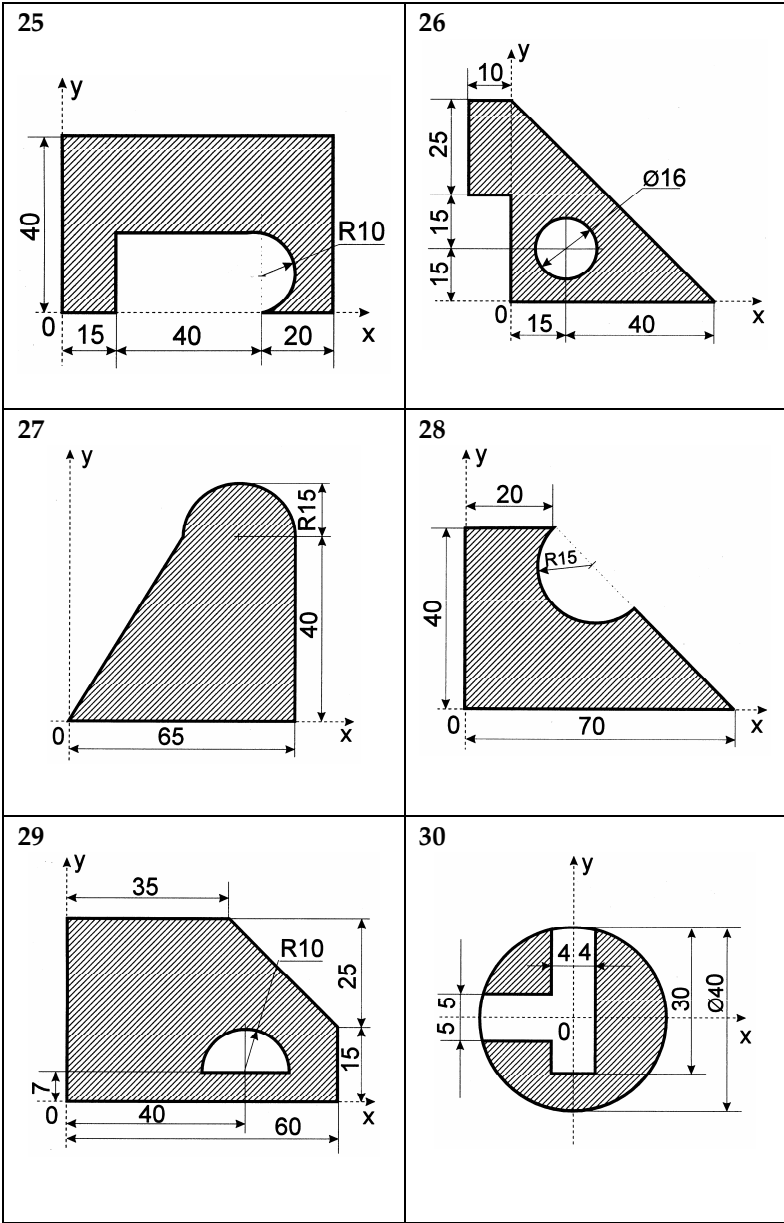
17

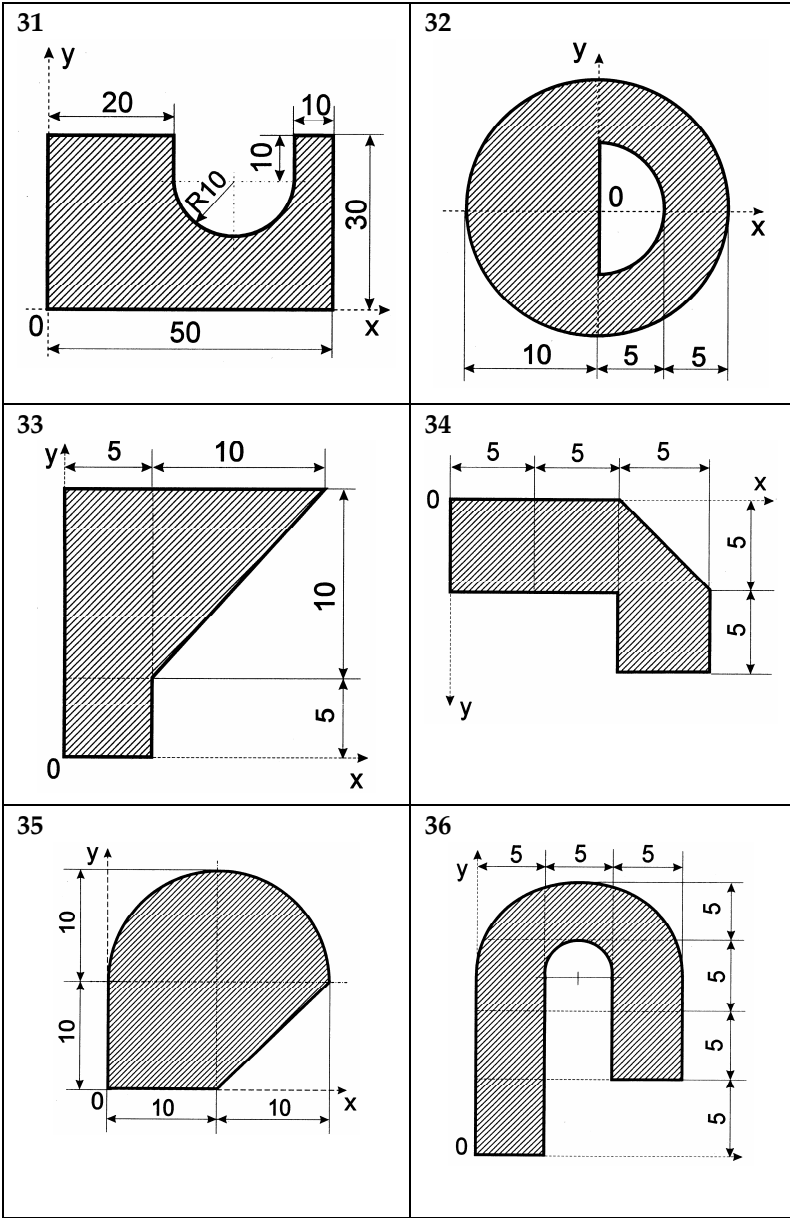


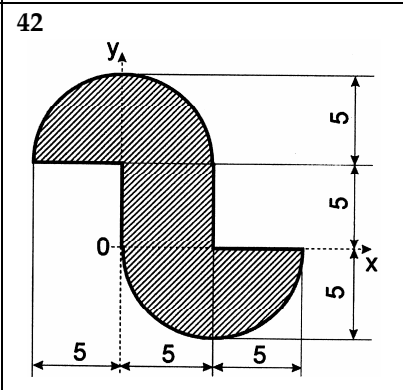
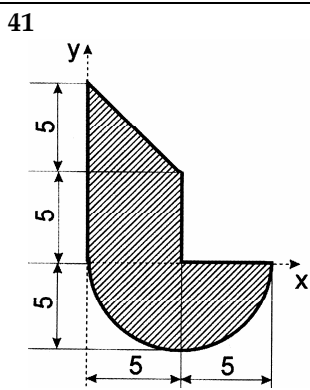
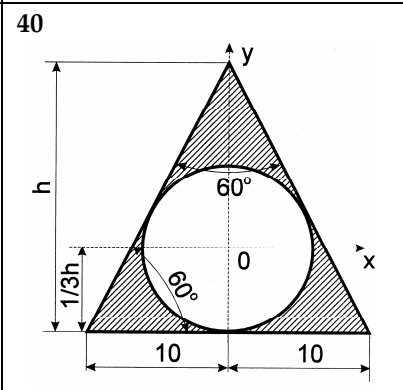
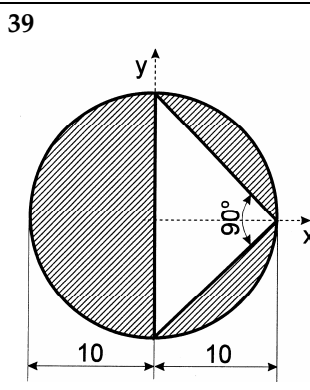
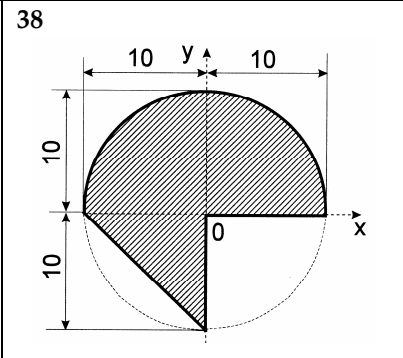
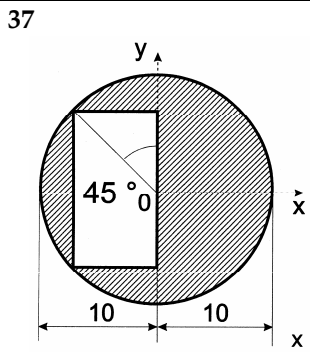
18



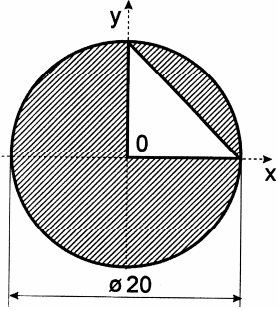




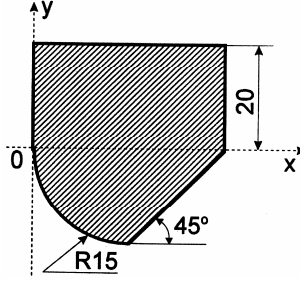




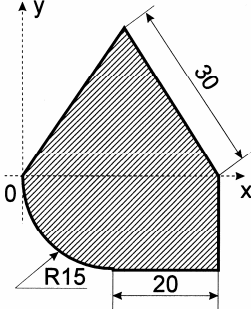
43



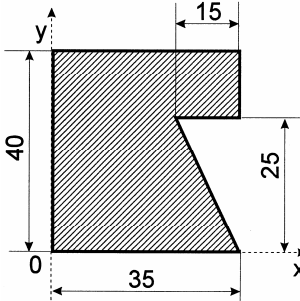
44



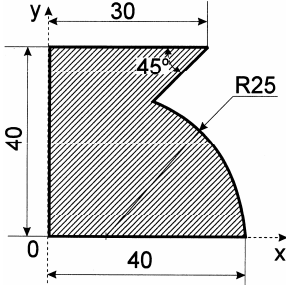
45



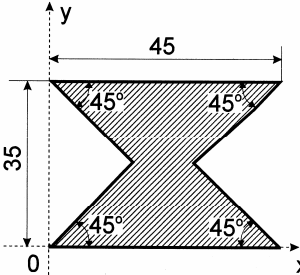
46

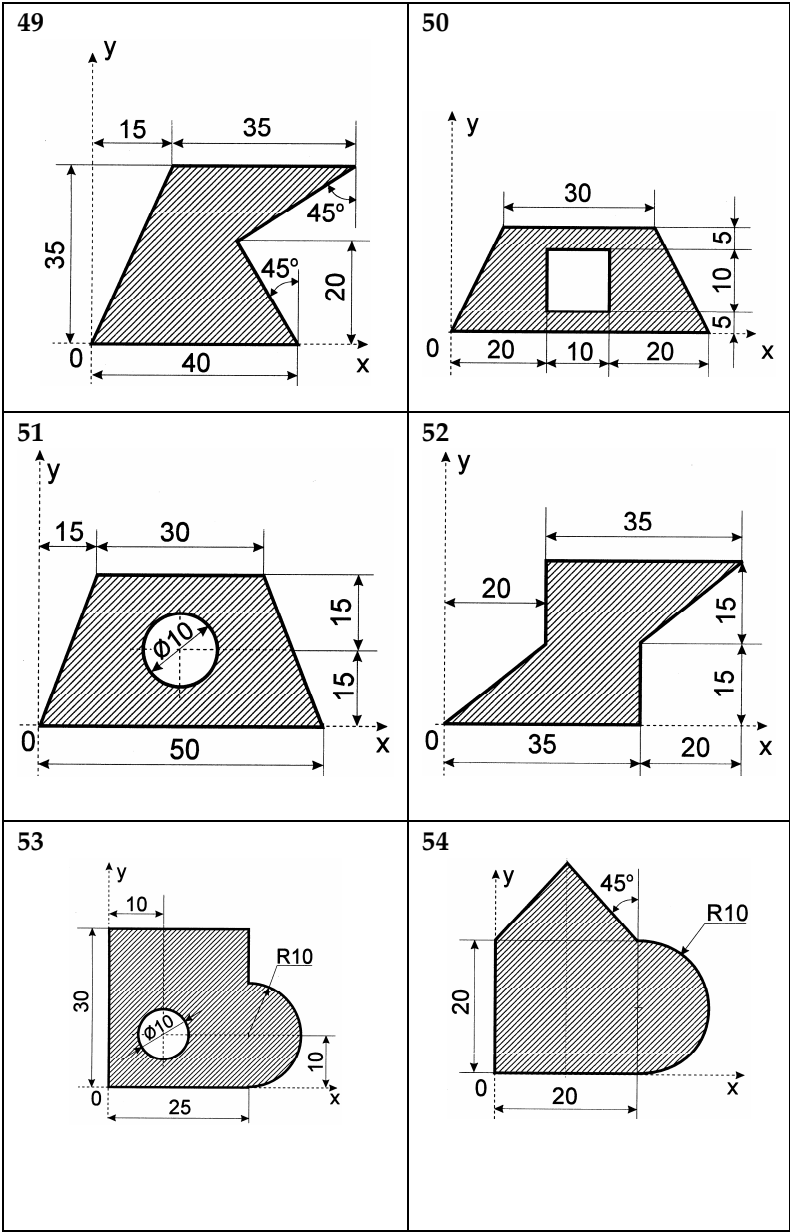


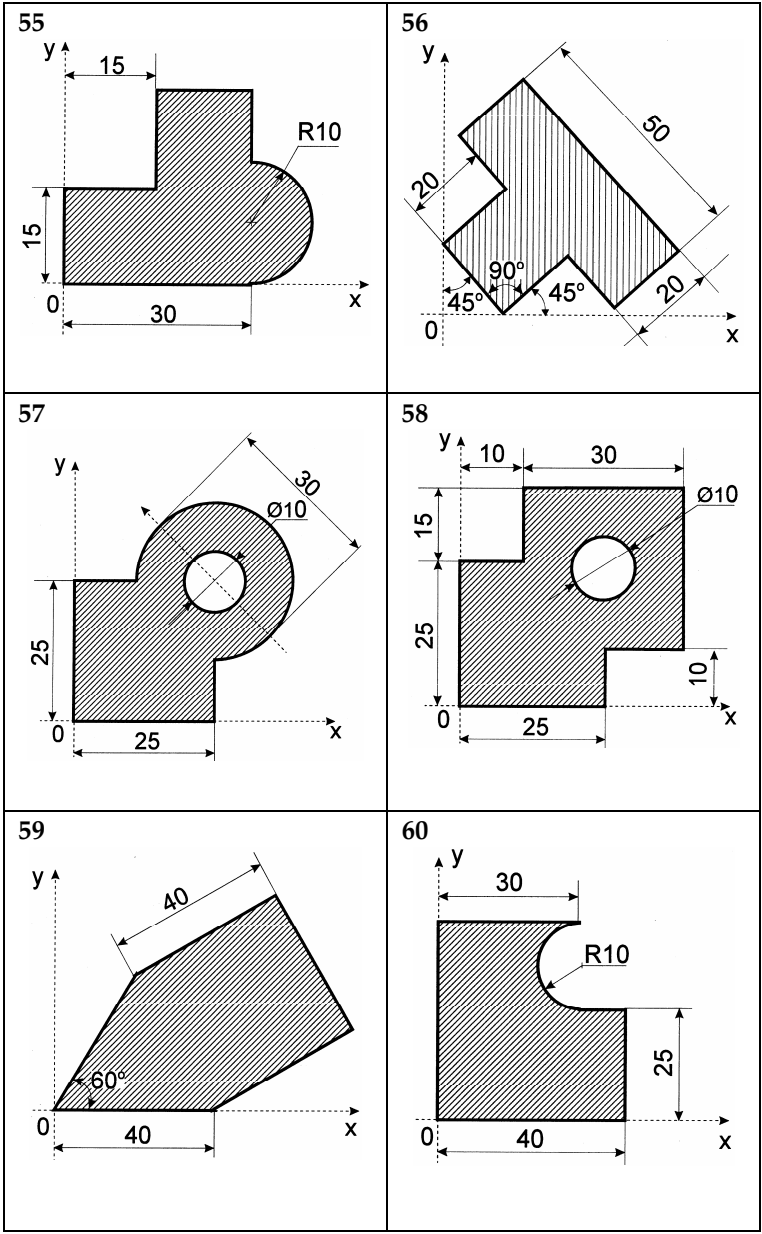
47

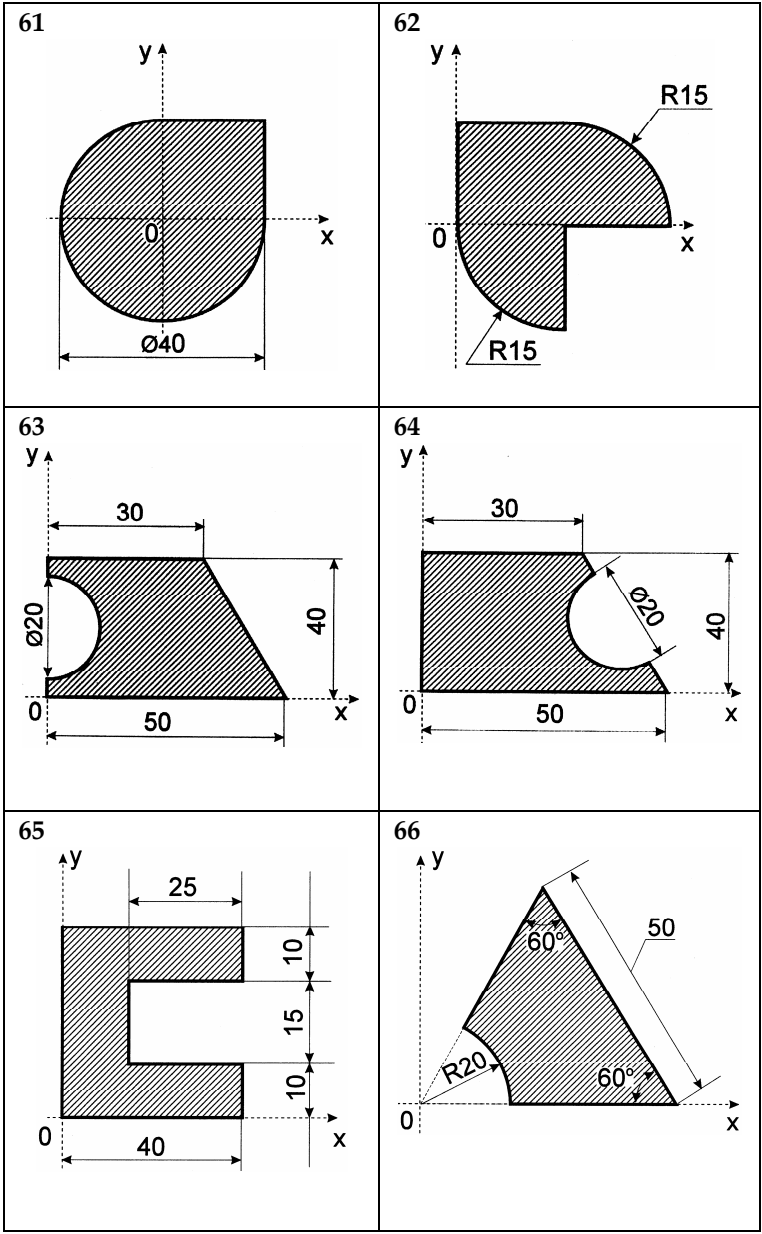


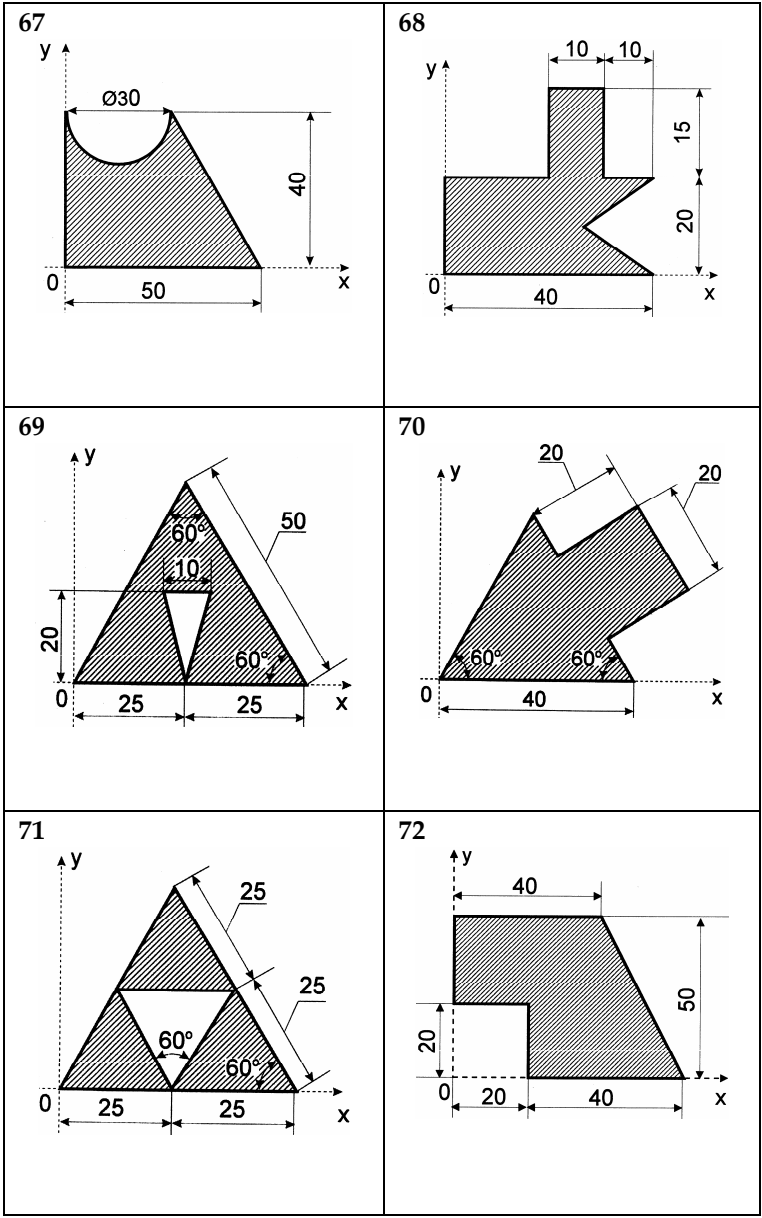
48

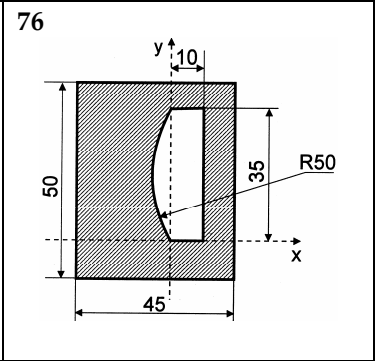
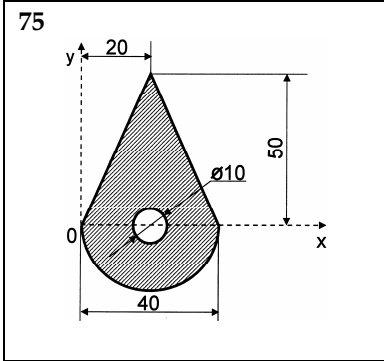
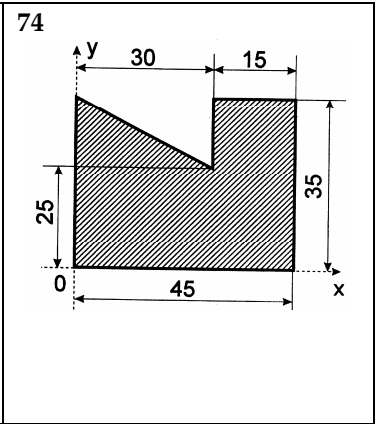
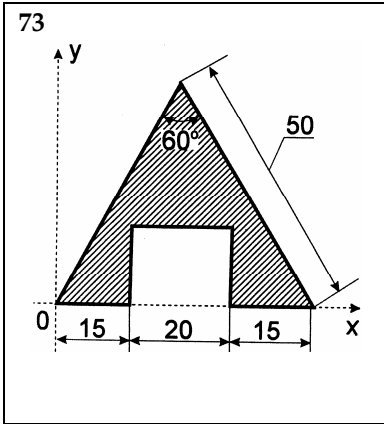












Довідкові матеріали

1. Найпростіші алгебраїчні формули

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Формула коренів квадратного рівняння

Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a , b , c – дійсні числа і $a \neq 0$, має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Градуси – радіани

Перехід від градусів у радіани: $\alpha(\text{рад}) = 0,0175 \cdot \alpha(\text{град})$.

Перехід від радіан у градуси: $\alpha(\text{град}) = 57,3 \cdot \alpha(\text{рад})$.

4. Формули подвійного кута

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; & \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; & \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

5. Формули ділення аргументу навпіл

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; & \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

6. Формули зниження степені

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

7. Формули додавання аргументу

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

8. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

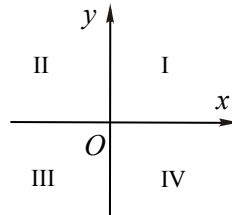
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

9. Знаки тригонометричних функцій за квадрантами

Функція	Квадрант			
	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-



10. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	град.	0	15	30	45	60	75	90	180
	рад	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$		0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1	0
$\cos \alpha$		1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$		∞	3,73	1,73	1,00	0,58	0,27	0	∞

11. Формули зведення

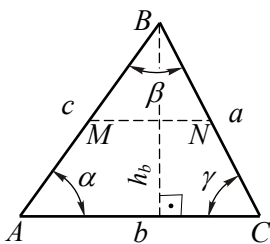
Функція	Аргумент x				
	$-\alpha$	$\pi/2 \pm \alpha$ ($90^\circ \pm \alpha$)	$\pi \pm \alpha$ ($180^\circ \pm \alpha$)	$3\pi/2 \pm \alpha$ ($270^\circ \pm \alpha$)	$2\pi \pm \alpha$ ($360^\circ \pm \alpha$)
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos x$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

12. Формули, які пов'язують функції одного і того самого аргументу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

13. Співвідношення в довільному та прямокутному трикутниках



a, b, c – сторони трикутника

α, β, γ – внутрішні кути трикутника

MN – середня лінія трикутника

h_b – висота трикутника, що опущена на сторону b

Сума кутів трикутника: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Нерівності трикутника: $b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$;
 $a - b < c < a + b$.

Теорема синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Теорема косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$;

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

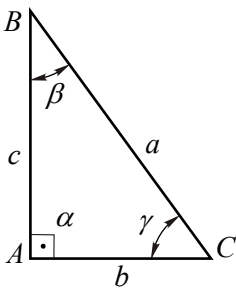
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Площа трикутника: $S = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin \alpha$;

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона),}$$

де $p = (a+b+c)/2$ – півпериметр трикутника.

Прямокутний трикутник:



b і c – катети, a – гіпотенуза;

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta + \gamma = 90^\circ;$$

$S = \frac{1}{2}bc$ – площа трикутника;

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ – теорема Піфагора.}$$

Якщо $\beta = 30^\circ$ то $b = \frac{a}{2}$.

$$\sin \gamma = \frac{c}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{b}{c};$$

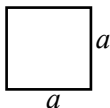
$$\sin \beta = \frac{b}{a}; \quad \cos \beta = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b};$$

$$c = a \cdot \sin \gamma = a \cdot \cos \beta;$$

$$b = a \cdot \sin \beta = a \cdot \cos \gamma.$$

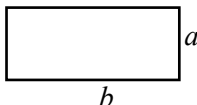
14. Площа (S) геометричних фігур

Квадрат



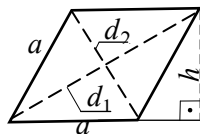
$$S = a^2.$$

Прямокутник



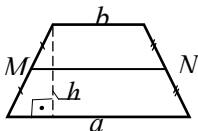
$$S = a \cdot b.$$

Ромб



$$S = h \cdot a = d_1 \cdot d_2 / 2.$$

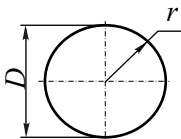
Трапеція



$$S = h \cdot (a + b) / 2;$$

Середня лінія:
 $MN = (a + b) / 2.$

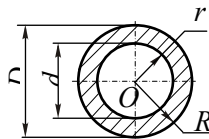
Коло і круг



$$S = \pi r^2 = \pi D^2 / 4;$$

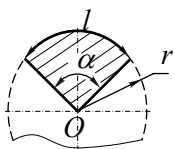
Довжина кола:
 $L = 2\pi r = \pi D.$

Кільце



$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(D^2 - d^2) / 4.$$

Сектор

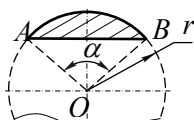


$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ};$$

Довжина дуги:

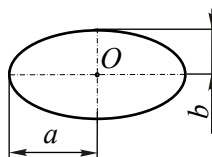
$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Сегмент



$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} - S_{\Delta OAB}.$$

Еліпс



$$S = \pi \cdot a \cdot b.$$

15. Визначення похідної від функції

Використовуються позначення:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{якщо } s = f(t), \text{ де } t \text{ — час.}$$

Похідну від функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначають символом $f'(x_0)$, або $y'(x_0)$.

За визначенням:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

16. Правила диференціювання функцій

Якщо $c = const$ (стала величина), $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – функції, які можуть бути здиференційовані по x , то:

1. $c' = 0$;
2. $x'_x = 1$;
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

17. Похідні та диференціали елементарних функцій

	Похідні	Диференціали
1.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1} dx$
2.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$
4.	$(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x dx$
5.	$(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0)$	$d(a^x) = a^x \ln a dx, (a > 0)$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$

Похідні

Диференціали

9. $(\cos x)' = -\sin x$

$d(\cos x) = -\sin x dx$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$

18. Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
($n \neq -1$).

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0).$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

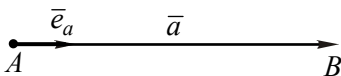
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ 10. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$ 12. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

19. Вектор



$$\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a, \text{ або } \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \vec{e}_{AB},$$

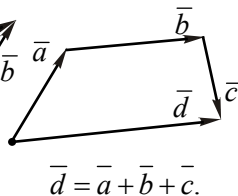
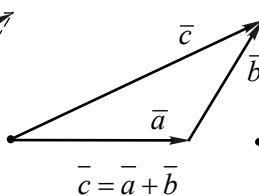
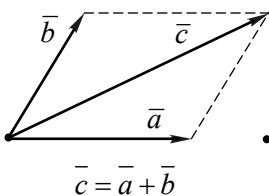
де $a \equiv |\vec{a}|$ – модуль або довжина вектора;

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$ – одиничний вектор або орт даного вектора.

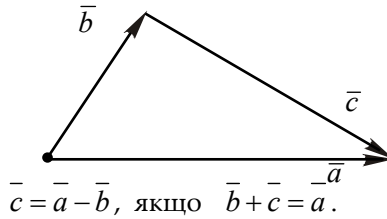
20. Додавання векторів

Вектори додаються за правилами:

- а) паралелограма б) трикутника в) замиканої



21. Віднімання векторів



22. Координатна форма вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти (взаємно перпендикулярні), які утворюють праву трійку координатних осей Ox, Oy, Oz ;

a_x, a_y, a_z – проекції вектора на осі координат.

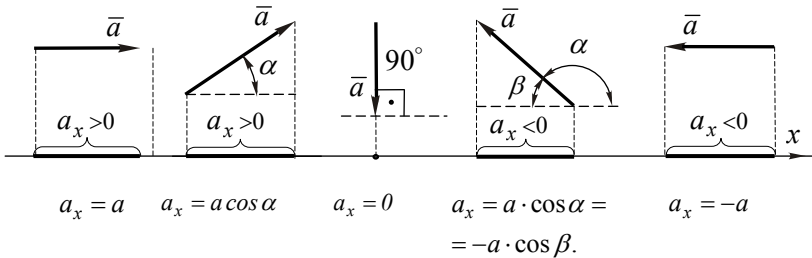
23. Проекції вектора на координатні осі

Якщо задані кути α, β, γ ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), утворені вектором \vec{a} відповідно з координатними осями Ox, Oy, Oz , то:

$$a_x = a \cos \alpha; \quad a_y = a \cos \beta; \quad a_z = a \cos \gamma.$$

Приклади:

$$\alpha = 0; \quad 0 < \alpha < 90^\circ; \quad \alpha = 90^\circ; \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \quad \alpha = 180^\circ;$$

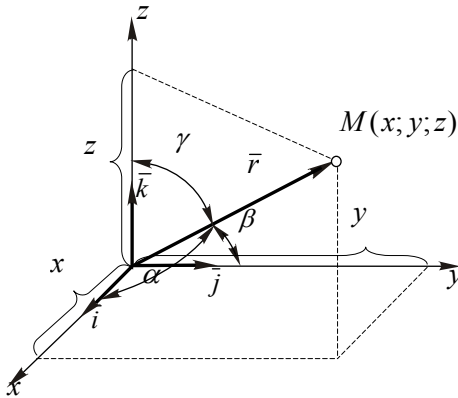


24. Напрямні косинуси

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a};$$

$$\text{причому } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

25. Радіус-вектор точки, його модуль та напрямні косинуси



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos \beta = \frac{y}{r}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

26. Скалярний добуток векторів (скаляр)

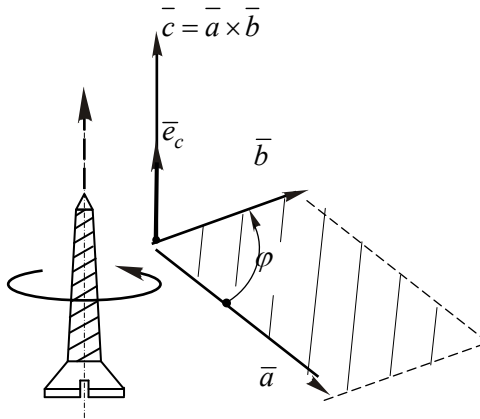
$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi, \text{ де } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

27. Векторний добуток векторів

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c}$$

Вектор \vec{c} напрямлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори, що перемножуються. Його напрям визначається за правилом правого гвинта: якщо обернути головку гвинта найкоротшою відстанню від першого множника до другого, то напрям руху самого гвинта дає напрям вектора \vec{c} .

Модуль векторного добутку



$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin \varphi, \quad \text{де} \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

28. Деякі фізичні константи

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Гравітаційна стала	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$
Прискорення вільного падіння (середнє)	$g = 9,807 \text{ м/с}^2$
Маса Землі	$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Середній радіус Землі	$R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч 1. Статика. Кінематика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1972. – 436 с.
4. Каплунова А.В. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки / Каплунова А.В., Михаловський В.А., Фельдман А.А. – К. : Держсільгоспосвіта, 1961. – 365 с.
5. Савин Г.Н. Теоретическая механика / Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. – К. : Вища школа, 1971. – 359 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М. : Наука, 1972. – 258 с.
7. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики / И.Н. Веселовский. – М. : Высш. шк., 1974. – 287 с.
8. *Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике ; под общ. ред. проф. А.А. Яблонского.* – М. : Высш. шк., 1978. – 326 с.
9. Булгаков В.М. Інженерна механіка. Ч I. Теоретична механіка / Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. – Вінниця : Нова книга, 2007. – 502 с.
10. Булгаков В.М. Теоретична механіка. Динаміка / Булгаков В.М., Лукач В.С., Литвинов О.І., Головач І.В. – Ніжин : МІЛАНІК, 2007. – 368 с.
11. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский Л.Г., А.И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – Ч. 1. – 368 с.; Ч. 2 – 640 с.
12. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Бутенин Н.В.,

- Луңц Я.Л., Меркин Д.Р. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 270 с.; Т. 2 – 542 с.
13. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин – М. : Наука, 1971. – 264 с.
 14. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика / Я.Л. Геронимус. – М. : Наука, 1973. – 511 с.
 15. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика / Н.Е. Жуковский. – М.; Л. : ГИТТЛ, 1952. – 811 с.
 16. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – *Крылов А.Н.* Собрание трудов. –М.: Наука, 1936. –Т. 7.
 17. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
 18. Добронравов В.В. Курс теоретической механики / Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А. – М. : Высш. шк., 1974. – 528 с.
 19. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / Яблонский А.А., Никифорова В.М. – М. : Высш. шк., 1977. – 431 с.
 20. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / Бать М.И., Джанелидзе Г.Т., Кельзон А.С. – М : Наука, 1985. – Т. 2. – 544 с.
 21. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / Бать М.И., Джанелидзе Г.Т., Кельзон А.С. – М : Наука, 1973. – Т. 3. – 488 с

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

- Абсолютне тверде тіло 30,
– прискорення, 407
– швидкість, 404
- Абсолютний час, 17, 284
- Аксиоми статички, 34-38
– про виключення сил, 35
– про дві сили, 34
– про дію і протидію, 38
– про звільнення від в'язей, 45
– про паралелограм сил, 36
– принцип затвердіння, 38
- Амонтон, 215
- Аналітична механіка, 11
- Аристотель, 20-21
- Архімед, 21
- Біномаль, 303
- Варіньон, 79
- Варіньона теорема, 79, 253
- Вектор вільний, 86
– закріплений, 77
– ковзний, 36
– кутового прискорення, 334
– кутової швидкості, 333
– моменту пари сил, 86
– моменту сили відносно точки, 75
– прискорення, 290
– сили, 33
– швидкості, 289, 299
- Векторий добуток,
Вінчі Леонард, 22
Взаємодія, 32, 47
В'язі механічні, 39
Галілей, 23, 25
Гамільтон, 27
Гвинтовий рух,
Головна нормаль, 303
Головний вектор, 97, 243
– момент, 97, 243-246
Гук, 24
Гюйгенс, 24
Д'Аламбер, 261
Декарт, 2419
Динаміка, 142
Додавання сил, 50-52
– аналітичний спосіб, 61
– геометричний спосіб, 51
– довільних сил, 93, 251
– збіжних сил, 50-52
– паралельних сил, 81
Додавання пар сил, 91
– поступальних рухів, 423
– обертань, 424-429
Ейлер, 25, 26, 229, 284
Жуковський, 28
Закони Ньютона, 18
– перший, 18
– другий, 18
– третій, 19
Інерціальна система відліку,

- 18, 32, 284
- геліоцентрична, 285
- геоцентрична, 285
- Кардано, 28
- Кеплер, 28
- Кінематика, 13, 14, 283
 - вільного руху тіла, 319
 - матеріальної точки, 283
 - обертального руху. 322
 - поступального руху, 320
 - плоско паралельного руху, 346-379
 - сферичного руху. 387-398
 - твердого тіла, 319, 400
- Класифікація систем сил, 46
- Коефіцієнт тертя ковзання, 215
 - – кочення, 224
- Конус тертя, 219
- Кривина кривої, 304
- Кузанський, 22
- Кулон, 215
- Кут повороту, 323
 - власного обертання, 389
 - нутації, 390
 - прецесії, 390
 - тертя, 217
- Кути Ейлера, 389
- Кондратюк, 29
- Коперник, 22
- Королев, 29
- Крилов, 28
- Лагранж, 26
- Лейбніц, 24
- Лінія дії сили, 32
- Ломоносов, 26
- Ляпунов, 28
- Матеріальна система, 31
 - точка, 31
- Метод перетину, 210-212
 - вирізання вузлів, 204-209
 - перерізів, 46
 - аналітичний. 61
- Метод симетрії, 273
 - розбиття, 274
 - доповнення, 275
- Механіка, 10
 - аналітична, 11
 - класична, 18, 33
 - теоретична, 14, 15, 30
- Мещерський, 28
- Момент сили алгебраїчний, 72
 - пари сил, 84
 - сили векторний, 75
 - відносно осі, 231, 238
- Ньютон, 17, 24
- Остроградський, 27
- Пара сил, 84, 238
 - обертань, 428
- План швидкостей, 371, 375
 - прискорень, 373, 371
- Плече сили, 74
- Площина нормальна, 303
 - спрям на, 303
 - стична, 303
- Прискорення, 290, 296, 303
 - абсолютне, 407
 - дотичне, 308
 - доцентрове, 309

- кутове, 325
- відносне, 409
- переносне, 410
- Коріоліса, 411-415
- точки, 236
- Проекція сили на вісь, 56
 - на площину, 57-58
 - рівнодійної, 60
 - моменту сили на вісь, 236
- Простір, 17, 283
- Пуансо, 27
- Радіус кривини кривої, 305
- Реакція в'язі, 39-45
- Рух твердого тіла, 319, 422
 - абсолютний, 422
 - відносний, 422
 - переносний, 422
 - складний, 422-438
- Сила, 32-33
 - активна, 47
 - внутрішня, 47, 115
 - зовнішня, 47, 114
 - зосереджена, 33, 111
 - зрівноважувальна, 34
 - нормального тиску, 216
 - реакції в'язі, 39-45
 - розподілена, 111-113
 - рівнодійна, 34, 51-53
 - тертя ковзання, 213
- Система відліку, 18
- Система сил, 34
 - збіжних сил, 46, 50
 - паралельних сил, 46, 81
 - довільних сил, 46, 93
- Система координат, 292-294
 - прямокутна, 292, 294
 - натуральна, 301-302
 - абсолютна, 403
 - рухома, 403, 405
- Система статично визначена, 113
 - – невизначена, 113
- Силловий гвинт, 249
 - багатокутник, 51
- Способи завдання руху точки, 287
 - векторний, 287
 - координатний, 292
 - натуральний, 298
- Стевін, 22
- Теорема статички
 - Варіньона, 79, 253
 - Ейлера – д'Аламбера, 391
 - Коріоліса, 407
 - про додавання швидкостей, 404
 - про еквівалентність пар сил, 89
 - перенесення пари, 89, 239
 - про три непаралельні сили, 53
 - статички, основна, 94
- Тіло тверде, 30
 - вільне, 39
 - невільне, 39
- Траєкторія точки, 288, 293
- Умови еквівалентності пар, 91, 241

- Умови рівноваги, 52
 - збіжних сил, 62
 - пар сил, 92, 242
 - паралельних сил, 100, 252
 - довільних сил на площині, 93, 98
 - у просторі, 251
- Ферма, 202-212
- Формула Ейлера, 228, 399
 - Пуассона, 397
- Центр ваги, 266
 - дуги кола, 278
 - сектора, 281
 - трикутника, 280
- Центр паралельних сил, 262
 - миттєвий швидкостей, 359-365
- Координати центра, 264-266
 - ваги тіла, 267
 - об'єму, 268
 - пластини, 270
 - лінії, 271
- Цюлковський, 29
- Цандлер, 29
- Чаплигін, 28
- Чебишев, 27
- Частота обертання, 326
- Швидкість, 289, 295, 299
 - колова, 329,
 - миттєва кутова, 396
 - точки, 289, 295
 - абсолютна, 404
 - відносна, 406
 - переносна, 407
 - кутова, 324

Навчальне видання

ЛИТВИНОВ Олег Іванович
МИХАЙЛОВИЧ Ярослав Миколайович
БОЙКО Андрій Васильович
БЕРЕЗОВИЙ Микола Георгійович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник
У двох частинах

Частина I
Статика. Кінематика

Редагування	Л.М. Талюта Н.В. Крошко
Макетування	І.О. Серова
Обкладинка	А.В. Братах

Підписано до друку 14.02.2013. Формат 60x84/16.
Папір офсет. №1. Гарнітура Palatino Linotype. Друк офс.
Наклад 1000 примірників, Зам. № 11

ДУ «НМЦ «Агроосвіта»
Київ-151, вул. Смілянська,11
тел. 249-94-04