

**О.І. Литвинов, Я.М. Михайлович,
А.В. Бойко, М.Г. Березовий**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник

У ДВОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА II ДИНАМІКА ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів
вищих технічних навчальних закладів*

**Київ
«Агроосвіта»
2013**

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.21я73
ТЗ6

*Затверджено Міністерством освіти і науки
України як підручник для студентів вищих
технічних навчальних закладів
(лист від 28.10.2010 №1/11-9970)*

Рецензенти:

Бендера І.М. – д. пед. н., професор, к. т. н., директор Інституту механізації та електрифікації сільського господарства (Подільський державний аграрно-технічний університет);

Девін В.В. – к. т. н., доцент, завкафедри загальнотехнічних дисциплін і фізики. (Подільський державний аграрно-технічний університет);

Ляшенко Б.А. – д. т. н., професор, Лауреат Державної премії з науки і техніки України (Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України);

Бородачов М.М. – д. т. н., професор кафедри механіки (Національний авіаційний університет).

ТЗ6 **Теоретична** механіка. Ч. II. Динаміка. Основи аналітичної механіки / [Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г.]. – К. : Агроосвіта, 2013. – 576 с.
ISBN 978-966-2007-30-5

Підручник містить чотири основні розділи теоретичної механіки: Частина I. «Статика. Кінематика»; Частина II. «Динаміка. Основи аналітичної механіки», що відповідає типовій програмі навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для вищих технічних навчальних закладів. У матеріалах підручника висвітлено основні теоретичні положення цих розділів, надано багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних та розрахунково-графічних робіт.

Видання рекомендовано студентам денної, заочної і дистанційної форм навчання вищих навчальних закладів технічного профілю, а також може бути корисним магістрам, аспірантам, інженерно-технічним працівникам.

**УДК 531.(075.8)
ББК 22.21я73**

ISBN 978-966-2007-30-5

© О.І. Литвинов, Я.М. Михайлович,
А.В. Бойко, М.Г. Березовий, 2013

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА	13
3.1. Динаміка матеріальної точки	13
3.1.1. Динаміка вільної матеріальної точки	13
Вступ. Задачі динаміки точки	13
Закони динаміки матеріальної точки	15
Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	23
Дві задачі динаміки матеріальної точки	25
Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної матеріальної точки	28
3.1.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	37
3.1.3. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки	38
Запитання для самоконтролю	43
3.1.4. Динаміка відносного руху матеріальної точки	44
Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки	44
Принцип відносності класичної механіки	47
Окремі випадки відносного руху точки	48
Відхилення тіл під час вертикального падіння	51
Запитання для самоконтролю	53
3.1.5. Коливання матеріальної точки	53
Кінематика гармонічних коливань	54
Класифікація коливань	55
Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки	57
Згасаючі коливання матеріальної точки	62
Запитання для самоконтролю	69
Змушені коливання точки без урахування опору	70
Явище механічного резонансу	74
Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя	76

Загальні властивості змушених коливань	80
Запитання для самоконтролю	82
3.2. Матеріальна система. Геометрія мас	83
3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи.....	83
3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла).....	84
3.2.3. Радіус інерції тіла	86
3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей.....	87
3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми.....	88
3.2.6. Відцентрові моменти інерції.....	90
3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку	91
Запитання для самоконтролю	94
3.3. Рух центра мас матеріальної системи	94
3.3.1. Класифікація сил і їхні властивості	94
3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи... ..	96
3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.....	97
3.3.4. Закон збереження руху центра мас	98
Запитання для самоконтролю	102
3.4. Основні теореми динаміки	103
3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил	104
3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи.....	104
3.4.3. Імпульс сили.....	105
3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.	106
3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи.....	108
3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи.....	109
Запитання для самоконтролю	110
3.5. Теореми про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи	110
3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки	

відносно центра і осі	110
3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження	112
3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі	114
3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання	115
3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження	116
Запитання для самоконтролю	
3.6. Динаміка твердого тіла.....	118
3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла.....	119
3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла	120
3.6.3. Фізичний маятник	123
3.6.4. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла	126
Запитання для самоконтролю	128
3.7. Робота і потужність сили.....	129
3.7.1. Елементарна робота сили	129
3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили.....	130
3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили.....	132
3.7.4. Робота сили в окремих випадках	133
3.7.5. Коефіцієнт корисної дії	138
Запитання для самоконтролю	139
3.8. Кінетична енергія матеріальної точки і системи.....	140
3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга	140
3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.....	142
3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла.....	146
3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.....	146
Запитання для самоконтролю	150
3.9. Теорія потенціального силового поля.....	151
3.9.1. Силоне поле. Потенціальне силоне поле і силова функція	151

3.9.2. Вираз проєкцій сили через силову функцію	154
3.9.3. Потенціальна енергія	154
3.9.4. Поверхні рівного потенціалу.....	155
3.9.5. Робота сили у потенціальному силовому полі	156
3.9.6. Закон збереження механічної енергії.....	156
3.9.7. Приклади потенціальних силових полів	157
Запитання для самоконтролю	160
3.10. Кінестатика невільної матеріальної системи.....	161
3.10.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи	161
3.10.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції	163
3.10.3. Кінестатичне дослідження плоского механізму.....	171
3.10.4. Визначення динамічних реакцій підшипників	176
3.10.5. Поняття про статичне і динамічне балансування.....	179
Запитання для самоконтролю	180
3.11. Елементарна теорія удару.....	181
3.11.1. Явище удару, ударний імпульс	181
3.11.2. Дія ударної сили на матеріальну точку. Основна теорема теорії удару	181
3.11.3. Загальні теореми теорії удару.....	183
3.11.4. Коефіцієнт відновлювання під час удару.....	186
3.11.5. Удар тіла об нерухому плиту	188
3.11.6. Прямий центральний удар двох тіл.....	190
3.11.7. Втрата кінетичної енергії під час удару двох тіл. Теорема Карно	194
3.11.8. Удар об обертове тіло.....	197
3.11.9. Дія удару на вісь обертання тіла. Центр удару. Визначення імпульсних реакцій.....	199
Запитання для самоконтролю	203
Розділ IV. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.....	204
4.1. Аналітичні принципи Лагранжа.....	204
4.1.1. Механічні в'язі та їх рівняння. Класифікація в'язей.....	204
4.1.2. Можливі переміщення системи. Ступінь вільності матеріальної системи	208

4.1.3. Ідеальні в'язі.....	211
4.1.4. Принцип можливих переміщень	212
4.1.5. Застосування принципу можливих переміщень.....	214
4.1.6. Загальне рівняння динаміки.....	216
4.1.7. Методика застосування загального рівняння динаміки	217
Запитання для самоконтролю	221
4.2. Диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах.....	221
4.2.1. Узагальнені координати системи. Узагальнені швидкості	221
4.2.2. Узагальнені сили та їх обчислення.....	225
4.2.3. Методика обчислення узагальнених сил.....	227
4.2.4. Випадок потенціальних сил	230
4.2.5. Умови рівноваги системи в узагальнених координатах.....	231
Запитання для самоконтролю	232
4.3. Рівняння Лагранжа другого роду	233
4.3.1. Виведення рівнянь Лагранжа	233
4.3.2. Методика і приклад розв'язування задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.....	236
4.3.3. Кінетичний потенціал. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем	239
Запитання для самоконтролю	249
4.3.4. Методика і приклади розв'язування задач із динаміки матеріальної системи	250
4.4. Канонічні рівняння динаміки	280
4.4.1. Рівняння Гамільтона для консервативних систем.....	280
4.4.2. Властивості функції Гамільтона	282
4.4.3. Канонічні рівняння для неконсервативних систем.....	283
4.4.4. Циклічні координати. Перші інтеграли канонічних рівнянь.....	284
4.4.5. Дужки Пуассона. Теорема Пуассона-Якобі	285
Запитання для самоконтролю	301
4.5. Елементарна теорія гіроскопа.....	302
4.5.1. Основні припущення елементарної теорії гіроскопа	304

4.5.2. Теорема Резаля	305
4.5.3. Основне рівняння елементарної теорії гіроскопа	307
4.5.4. Закон прецесії осі гіроскопа	308
4.5.5. Момент гіроскопічної реакції	309
4.5.6. Визначення гіроскопічних реакцій	310
Запитання для самоконтролю	312
4.6. Основи теорії малих коливань механічних систем	312
4.6.1. Малі коливання системи наоціл положення рівноваги	312
4.6.2. Потенціальна енергія системи в узагальнених координатах	314
4.6.3. Теорема Ляпунова – Лагранжа – Діріхле	316
4.6.4. Кінетична енергія системи в узагальнених координатах. ...	318
4.6.5. Рівняння Лагранжа із системи Гамільтона	320
4.6.6. Дисипативна функція Релея	322
4.6.7. Гамільтонова система рівнянь	325
Запитання для самоконтролю	337
4.6.8. Власні коливання систем з одним ступенем вільності ..	338
4.6.9. Коливання тіла на пружній нитці	342
4.6.10. Власні коливання з урахуванням лінійного опору	346
4.6.11. Власні коливання за наявності кулонівського тертя	353
4.6.12. Змушені коливання системи з одним ступенем вільності	354
4.6.13. Випадок періодичної сили. Явище резонансу	356
4.6.14. Коливання балки, навантаженої однією масою	358
4.6.15. Власні крутильні коливання вала з одним диском	360
4.6.16. Змушені коливання вала із одним диском	362
Запитання для самоконтролю	368
4.6.17. Диференціальні рівняння власних коливань з двома ступенями вільності	369
4.6.18. Коефіцієнти розподілу	372
4.6.19. Форми головних коливань	373
4.6.20. Явище биття	375
4.6.21. Головні координати. Рівняння руху в головних координатах	377
4.6.22. Випадок рівних частот	378

4.6.23. Власні коливання з урахуванням лінійного опору	379
4.6.24. Демпфер коливань (гасник коливань)	381
4.6.25. Змушені коливання системи з двома ступенями вільності	384
4.6.26. Коливання вала з вільними кінцями.....	386
4.6.27. Коливання вала з двома дисками і жорстко закріпленим кінцем	388
4.6.28. Коливання вала з трьома дисками і вільними кінцями	391
4.6.29. Власні коливання зі скінченним числом ступенів вільності	393
4.6.30. Коливання балки, навантаженої двома масами.....	394
4.6.31. Коливання колісного екіпажа	399
Запитання для самоконтролю	405
4.6.32. Згинальні коливання і вібрації балок. Коефіцієнти впливу	406
4.6.33. Вплив розмірів тіла на частоту коливань балки.....	415
4.6.34. Наближені методи визначення частот коливань балки. Метод Релея	418
4.6.35. Наближена формула Донкерлі	421
4.6.36. Параметричні коливання	424
4.6.37. Нелінійні коливання систем	427
Запитання для самоконтролю	431
4.7. Основи теорії стійкості руху	432
4.7.1. Стійкість положення рівноваги	433
4.7.2. Приклади визначення положення стійкої рівноваги....	436
4.7.3. Стійкість руху механічної системи	441
4.7.4. Визначення стійкості руху.....	443
4.7.5. Диференціальні рівняння збуреного руху	444
4.7.6. Канонічні рівняння збуреного руху	445
4.7.7. Стійкість руху за Ляпуновим.....	446
4.7.8. Методи вирішення задачі про стійкість руху	447
4.7.9. Приклади складання диференціальних рівнянь збуреного руху.....	448
Запитання для самоконтролю	458
4.7.10. Стійкість руху за першим наближенням.....	459
4.7.11. Диференціальні рівняння першого наближення	459

4.7.12. Теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням.....	460
4.7.13. Критерій Гурвіца.....	462
4.7.14. Приклади складання диференціальних рівнянь першого наближення.....	463
Запитання для самоконтролю	473
4.7.15. Прямий метод Ляпунова. Функції Ляпунова. Критерій Сильвестра.....	474
4.7.16. Геометрична інтерпретація функцій Ляпунова.....	480
4.7.17. Перша теорема Ляпунова про стійкість руху.....	483
4.7.18. Друга теорема Ляпунова про стійкість руху.....	484
4.7.19. Перша теорема Ляпунова про нестійкість руху.....	485
4.7.20. Друга теорема Ляпунова про нестійкість руху.....	487
4.7.21. Приклади побудови функцій Ляпунова	487
Запитання для самоконтролю	504
Практикум із застосування рівнянь Лагранжа другого роду ...	505
Варіанти завдань для самостійної роботи	541
Задачі з теорії механічних коливань.....	557
Довідкові матеріали.....	562
Література.....	570
Предметно-іменний покажчик	572

ПЕРЕДМОВА

Термін «динаміка», який вперше ввів у 1660 році видатний німецький учений, математик, філософ і механік Готфрід Вільгельм Лейбніц, означає у перекладі з грецької «*dynamic*» – «силу», що, як відомо, викликає прискорення тіла, до якого цю силу прикладено.

Отже, «справжньою» механікою є **третій розділ** теоретичної механіки – «Динаміка», в якому рух мас матеріальної точки, твердого тіла або матеріальної системи зі своїми властивостями вивчається з урахуванням дії прикладених сил, тобто, у найбільш повному вигляді, наскільки може дозволити механікам сучасний математичний апарат. У динаміці узагальнюються всі положення статички і кінематики та встановлюються найбільш загальні властивості механічного руху матеріальних систем. У третьому розділі викладено динаміку матеріальної точки, твердого тіла, матеріальної системи. Детально розглянуто загальні теореми динаміки матеріальної точки і матеріальної системи. Розв'язується багато прикладів і задач за основними темами.

У **четвертому розділі** – «Основи аналітичної механіки» – вивчаються найбільш загальні аналітичні методи розв'язання задач механіки складних вільних і невільних матеріальних систем. Тут у межах, дозволених програмою, розглядається механіка Лагранжа матеріальних систем: принцип можливих переміщень, загальне рівняння динаміки, диференціальні рівняння руху матеріальних систем в узагальнених координатах, які цей видатний учений поклав в основу створеної ним механіки.

Як зазначав Лагранж, цей розділ механіки є сукупністю загальних аналітичних методів розв'язання задач механіки матеріальних систем, що ґрунтуються не на наочних геометричних уявленнях, а на відкритті нових загальних принципів механіки у диференціальній та інтегральній формах.

Для ефективного розв'язування задач автори намагаються створити навчальний комплекс, який складається із підручника, збірника спеціалізованих задач для групи спеціальностей, методичних посібників із завданнями для розрахунково-графічних робіт, методичних розробок для самостійної роботи студентів.

Основним завданням навчального процесу під час вивчення теоретичної механіки є отримання міцних знань протягом оволодіння третім і четвертим розділами теоретичної механіки: «Динаміка» і «Аналітична механіка», тому що інформація з цих розділів широко використовується студентами не тільки у подальшому навчанні, але і у розв'язанні конкретних практичних інженерних задач після закінчення університету. Адже, тематика наданих у підручнику прикладів і задач віддзеркалює досягнення сучасної техніки.

Безперервний процес ускладнення машин і технічних пристроїв, поява нових принципів і схем технологічних процесів потребують від студента глибокого розуміння основ теоретичної механіки.

Розумне наближення навчальних задач до сучасної техніки сприяє розвитку відношення до теоретичної механіки з боку студента як до засадничої дисципліни. І чим ближче навчальні задачі до задач практики, тим ефективніше процес навчання.

РОЗДІЛ III

ДИНАМІКА

3.1. Динаміка матеріальної точки

3.1.1. Динаміка вільної матеріальної точки

Вступ. Задачі динаміки

Пізнання законів руху тіл людством було дуже повільним і не завжди вдалим. Навіть великий Аристотель (IV ст. до н.е.) вважав, що тіло раптово припинить рух, якщо припинить діяти сила. Правильно сформульовані закони руху тіл, що відбуваються в природі, були відкриті внаслідок тривалих спостережень.

Основи динаміки розроблені у XVI-XVII ст., коли практика суспільного виробництва поставила перед людиною низку важливих проблем у військовій справі, судноплаванні, виробництві товарів тощо.

Відкриття М. Коперніком (XVI ст.) геліоцентричної системи світу, а Й. Кеплером (XVII ст.) – законів руху планет, відіграло найважливішу роль у розвитку динаміки.

Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс (XVI-XVII ст.) – з цими іменами пов'язаний підготовчий період становлення динаміки. Л. да Вінчі досліджував рух тіла на похилій площині, тертя, питання теорії механізмів, увів поняття моменту сили.

Галілей Г. експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, досліджував рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, встановив закон пропорційності між вагою і масою тіла, сформулював принцип відносності класичної механіки.

Декарт Р. ввів поняття про кількість руху як міру механічного руху, відкрив закон збереження кількості руху, його ідеї виявилися плідними для подальшого розвитку динаміки.

Гюйгенс Х. досліджував фізичний маятник, вперше почав використовувати вирази осьового моменту інерції тіла і кінетичної енергії.

Засновником динаміки є І. Ньютон (XVII ст.). Він систематизував і узагальнив дослідження, пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Ньютон вперше сформулював основні закони динаміки, ввів поняття маси і узагальнив поняття сили, відкрив закон всесвітнього тяжіння як основу сучасної механіки і фізики. Систематичне викладення класичної механіки подано Ньютоном у творі «Математичні засади натуральної філософії» (1687 р.).

Вперше аналітично виклав динаміку Л. Ейлер (XVIII ст.), дійсний член Санкт-Петербурзької Академії наук. Він довів важливу теорему динаміки про зміну кінетичного моменту, створив теорію моментів інерції, механіку суцільних середовищ, теорію стійкості, ввів поняття потенціального силового поля.

У той самий час М.В. Ломоносов відкрив загальний закон природи – закон збереження матерії і руху. На базі цього закону всі закони збереження механіки і фізики є конкретними проявами закону Ломоносова, який є природничо-науковою основою матеріалізму.

Подальший розвиток динаміки пов'язаний з працями Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С.В. Ковалевської, О.М. Ляпунова, М.Є. Жуковського, С.О. Чаплигіна, О.М. Крилова та інших.

Механіка тіл змінної маси заснована І.В. Мещерським. Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів, яку створив К.Е. Цюлковський, подальший розвиток і практичне втілення її – у працях творця ракетної і космічної техніки С.П. Корольова.

У другій половині XX ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка, науковою базою якого стала теоретична механіка. Особливістю робототехніки є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. В Україні бурхливий розвиток отримала механіка суцільного середовища: теорія пружності і пластичності, гідроаеродинаміка. Дослідження вітчизняних учених Г.М. Савіна, О.М. Кільчевського, О.М. Гузя, В.Т. Грінченка є провідними у світовій науці.

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху моделей матеріальних об'єктів: точок, твердого тіла

і матеріальної системи під дією прикладених сил з урахуванням властивостей мас.

Основою теоретичної механіки є декілька гіпотез, пов'язаних з уявленнями про простір і час, поняттями інерціальності системи відліку, поняттями сили і маси, а також систематизовані спостереження за звичайними рухами тіл макросвіту: закони Галілея – Ньютона.

Динаміка досліджує загальні властивості механічного руху як теорію достатньо повільних переміщень одних макроскопічних тіл відносно інших, поєднуючи особливості кінематичних властивостей руху з властивостями сил, які спричиняють цей рух як внутрішній зв'язок між зовнішніми факторами (силами) і геометричними характеристиками рухів.

Теоретична або класична механіка є науковою основою, на якій побудовано теорію відносності, механіка великих швидкостей, пов'язана з іншими просторово-часовими уявленнями про світ.

У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або пряма задача полягає у тому, щоб за заданими масою і законом руху тіла визначити силу або рівнодійну системи сил, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або обернена задача динаміки – за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами руху визначити закон руху, який цими обставинами обумовлюється.

Динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла і динаміку матеріальної системи.

Закони динаміки матеріальної точки

Основою динаміки є закони, сформульовані І. Ньютоном для матеріальної точки у творі «Математичні засади натуральної філософії». За уявленнями класичної механіки час і простір, де відбувається рух, вважаються об'єктивною реальністю, але абсолютними і однорідними. Абсолютність простору допускає незалежність механічного руху від властивостей простору в різних його точках і в різних напрямках, тобто, його однорідність і ізотропність. Це геометричний тривимірний Евклідов простір.

У класичній механіці допускається існування такого годинника, тривалість періоду якого не змінюється під час довільних переміщень тіл. Цей постулат еквівалентний твердженню про те, що величина цього часового проміжку відносно різних систем відліку, які рухаються довільно, однакова.

Згідно з уявленнями про час можна встановити одночасність двох подій на різних об'єктах незалежно від швидкості їхнього руху відносно Землі, що характеризує абсолютність часу. Однорідність часу передбачає довільний вибір початку відліку і вимір інтервалів між окремими моментами часу.

Незалежність властивостей абсолютних простору і часу від руху матеріальних об'єктів пов'язана з гіпотезою про миттєву передачу взаємодії між тілами через деякий порожній простір. За сучасними уявленнями миттєвих взаємодій у макросвіті не існує, вони здійснюються за допомогою силових полів, які є одним із різновидів матерії.

Можна вважати, що взаємодія передається з кінцевою швидкістю – зі швидкістю світла, а сукупність тіл і полів є єдиною матеріальною субстанцією. Під впливом взаємодії тіла можуть змінювати своє відносне розташування, тобто, переміщуватись у просторі. До того ж зміна відносного розташування характеризується тривалістю, яка виражається деякою функцією часу.

Простір і час – є загальні форми існування матеріальних об'єктів. Створення теорії відносності підтвердило правильність такого уявлення. На думку Ейнштейна, «якщо б зникла матерія, то зникли б і простір, і час».

Таким чином, класична механіка вивчає такі переміщення тіл у просторі і часі, за яких процес передачі взаємодії тіл можна вважати практично миттєвим, а самі процеси, які при цьому відбуваються у фізичних полях, можна не розглядати.

Таке уявлення про простір і час дає можливість ввести відносну систему відліку як сукупність системи координат, жорстко пов'язаної з тілом відліку, і відмітника часу (годинника), встановленого на цьому тілі. При цьому система відліку має бути такою, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго

перебувати у стані спокою чи рівномірного і прямолінійного руху – це інерціальна галілеєва система відліку.

З достатнім ступенем точності за нерухому інерціальну систему можна вибрати геліоцентричну систему відліку Коперника з початком у центрі мас Сонячної системи і ортогональними осями координат, спрямованими до «нерухомих» зірок. Називати останніх нерухомими правомірно, тому що, приміром, річне кутове зміщення більшості зірок становить приблизно $0,01''$. Тому, систему відліку Сонце–зірки приймають за тверде тіло для порівняно довгих проміжків часу.

Не слід думати, що неправильне розуміння Ньютоном абсолютного простору призводить до хибності його законів. Для умов Землі і «нешвидких» рухів вони досить точно відображають реальну земну картину.

Перший закон Галілея-Ньютона, закон інерції

Існує система відліку, де ізольована матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

Закон інерції – один із фундаментальних законів природи. Він встановлює нерозривний зв'язок між матерією і рухом, характеризує намагання тіл зберегти той механічний рух, який тіло набуло раніше. Останнє називається властивістю інертності, що в перекладі з латинської означає «лінощі», «рутинність».

Отже, з цього закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити стан свого руху чи спокою. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки як результат її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного, виникає прискорення відносно інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям сили.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними параметрами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з

іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона або основний закон динаміки.

Основний закон динаміки

|| *Прискорення вільної матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і напрямлене вздовж вектора сили.*

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити літерою \vec{F} , прискорення – літерою \vec{a} , масу матеріальної точки – m і вважати останню згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

де сила \vec{F} може бути рівнодійною.

Співвідношення (3.1), яке встановлює зв'язок між силою, масою і прискоренням, є найважливішим у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки* у векторній формі.

Наведемо стисло характеристику сили і маси.

Векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл називається силою.

За сучасними уявленнями основу механічних взаємодій становлять гравітаційні і електромагнітні сили – сили ваги, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища.

За проявом сили можуть давати статичний і динамічний ефект. Перший викликає деформацію тіла, другий – зміну швидкостей точок тіла, тобто, прискорення.

Наприклад, ефект від сили ваги тіла, яке вільно рухається у повітрі чи вакуумі – зміна величини і напрямку вектора початкової швидкості і, як наслідок, зміна траєкторії від прямої до параболи.

Другий закон динаміки надає кількісні співвідношення між чинниками під час механічної взаємодії тіл, тому він є основою цього фундаментального узагальнення класичної механіки.

З іншого боку, якщо сили в розділі «Статика» розглядалися сталими за величиною і напрямом, то «Динаміка», як правило,

оперує зі змінними силами, які, взагалі, є функціями часу, відстані (координат) і швидкості:

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}).$$

Але природа багатьох сил допускає, що вони можуть бути функціями від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається таким чином:

$$\bar{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \bar{r},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл; γ – гравітаційна стала, $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ – відносна відстань (\bar{r}_1 і \bar{r}_2 – радіуси-вектори мас в інерціальній системі відліку).

За описанням руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості:

$$\bar{F}_{on} = -\alpha \bar{v},$$

де α – коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища.

Якщо швидкість збільшується, то сила опору може стати пропорційною квадрату, а то і кубу швидкості.

Масою матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла, що моделює точка.

Під інертними властивостями розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – взаємне притягання тіла залежно від положення відносно земної поверхні. Тому не можна вважати масу коефіцієнтом пропорційності між силою і прискоренням (3.1), а визначати її методами, які відображають вищезгадані властивості.

Перший метод пов'язаний з гравітаційними властивостями матерії і ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння. Встановлено,

що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння у порожнині у всіх точках земної кулі є сталою величиною. Це відношення визначає вагому масу

$$m_G = \frac{G}{g}, \quad (3.2)$$

де G – вага тіла; g – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (3.2) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Отже, можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням на терезах. Цей метод називається статичним.

Другий, динамічний метод, пов'язаний з інертними властивостями тіл. Якщо одна й та сама сила діє на тіла з різною масою, то вона викликає різні прискорення. Тоді з виразу (3.1) випливає

$$m_1 \cdot \bar{a}_1 = m_2 \cdot \bar{a}_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}.$$

Якщо вибрати одну із цих мас за еталон, то за останнього виразу можна визначити іншу інертну масу.

Дослідами Б. Бесселя встановлено тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до десятого порядку мализни. Цей закон природи називається принципом еквівалентності, він покладений в основу загальної теорії відносності.

Оскільки прискорення g , що входить до формули (3.2), змінюється в різних місцях земної поверхні, то буде різною і вага деякого тіла, тоді як його маса залишається незмінною.

Таким чином, поняття маси зосереджує в собі дві найзагальніші властивості фізичних тіл, які беруть до уваги в теоретичній механіці.

Перша – властивість інертності (про це йдеться в другому законі механіки).

Друга – гравітаційна властивість. Указані характеристики тіл у теоретичній механіці відображають внутрішні матеріальні властивості фізичних тіл.

Існує більш загальне формулювання другого закону Ньютона.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору прикладеній до точки сили.

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \quad (3.3)$$

де $m\bar{v}$ – кількість руху матеріальної точки як добуток маси на вектор швидкості.

Якщо маса не залежить від часу, то (3.3) можна спростити:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}.$$

Слід зазначити, що закон інерції можна одержати з другого закону (3.3), якщо система відліку інерціальна: $\bar{F} = 0$; $m = const$. Тоді $\bar{v} = const$: і швидкість зберігається протягом всього часу руху.

Основний закон динаміки у формі (3.1) дозволяє вибрати і основні одиниці механічних величин – довжину, масу і час.

Одиницею маси в Міжнародній системі одиниць СІ слугує кілограм (кг) як маса еталона.

Одиницею довжини слугує метр (м), *оддиницею часу* – секунда (с).

Одиниця сили є похідною одиницею. Один ньютон (Н) є такою силою, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с² за напрямом вектора сили.

Таким чином, одиниці маси, довжини, сили і часу мають визначатися з урахуванням основного закону динаміки, тому що ці категорії пов'язані між собою функціонально.

Три з них – маса, довжина і час – в офіційній системі СІ є незалежними, для них існують еталони. Одиниця сили виводиться із основних одиниць за допомогою основного закону динаміки..

Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії

Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Отже, дія дорівнює протидії.

При цьому слід враховувати: фізична взаємодія двох тіл, наслідком якої є механічний рух, хоча і викликає дві рівні за

величиною і протилежні за напрямом сили, що діють на одній прямій, але вони не зрівноважуються, тому що дія і протидія прикладені до різних тіл.

Якщо, наприклад, буксирний катер тягне канатом баржу, то і баржа тягне назад катер з рівною силою. У цьому неважко переконатися, якщо з'єднати катер і баржу канатом через два динамометри, закріплені на катері і баржі. Показники на двох динамометрах будуть завжди однакові, навіть під час руху з прискоренням. Чому ж система рухається у напрямі сили тяги катера? Тому, що катер відштовхується від води за допомогою лопатей гребного гвинта. Тут також сили, які прикладені з боку води на лопаті гвинта і з боку гвинта на воду, завжди однакові і протилежні за напрямом. Останні також не зрівноважуються, тому що прикладені до різних тіл.

Третій закон Ньютона виконується і в неінерціальній системі відліку, тому що він не містить кінематичних характеристик матеріальних об'єктів.

Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції)

Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

Із цього визначення можна зробити висновок, що кожна із сил надає точці прискорення, яке незалежне від дії інших сил. Цей закон впливає з аксіоми про паралелограм сил і справджується, якщо діючи на точку сили не залежать від її прискорення.

На підставі виразу (3.1):

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1; m\bar{a}_2 = \bar{F}_2; \dots m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Додамо ці вирази:

$$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{F}; \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}, \quad (3.4)$$

де \bar{a} – векторна сума прискорень від дії кожної сили окремо;

$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ – рівнодійна прикладених сил.

Отже, рух матеріальної точки під дією системи сил буде таким самим, як і під дією однієї сили, рівнодійної, що дорівнює їх векторній сумі.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, але добре узгоджуються з нею за «малих» швидкостей, навіть якщо властивості матеріальних об'єктів вважаються незалежними від властивостей простору і часу. Кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються тільки під час руху поблизу великих мас типу Сонця, де викривляється простір, або за величезних швидкостей, близьких до швидкості світла.

Насправді ж, простір і час є атрибутами рухомої матерії. Проте, у межах своєї компетентності теоретична механіка має велике значення під час дослідження механічних процесів, що зустрічаються на практиці. «Земна» класична механіка є фундаментом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки й техніки.

Закони Ньютона мають і велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона постулює в динаміці принцип незнищуваності матерії і руху. Другий закон встановлює пропорційність між силою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки, збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дозволяє глибше розкрити суть поняття сили, двобічної дії і протидії як взаємодії між двома матеріальними об'єктами, створюючи перехід до дослідження матеріальної системи.

Таким чином, сила як матеріальна категорія має джерелами фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, наслідком якої є перенесення механічного руху з одного тіла на інші тіла або перетворення енергії в рух.

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу «Кінематика» відомо три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний. Відповідно до цього мають місце і форми складання

диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. В основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (3.1).

1. Диференціальне рівняння у векторній формі

Оскільки у такому випадку прискорення матеріальної точки $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$, то диференціальне рівняння руху матиме такий вигляд:

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}). \quad (3.5)$$

Диференціальне рівняння (3.5) є *основним рівнянням динаміки точки у векторній формі*.

2. Диференціальні рівняння у координатній формі

Прискорення матеріальної точки у такому випадку визначається у проєкціях на відповідні осі прямокутної системи декартових координат:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Проектуючи ліву і праву частини основного закону динаміки (16.1) на відповідні осі координат, отримаємо шукані рівняння:

$$m \ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m \ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad m \ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (3.6)$$

де $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$ – алгебраїчні суми проєкцій сил на осі x , y і z .

Рівності (3.6) мають шостий порядок і є *основними диференціальними рівняннями точки в координатній формі*.

3. Диференціальні рівняння у натуральній формі

Прискорення матеріальної точки у такому випадку визначаються у проєкціях на дотичну $\bar{\tau}$, нормаль \bar{n} і дорівнюють:

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho},$$

де v – швидкість матеріальної точки; ρ – радіус кривини траєкторії, за якою рухається точка.

Проекція прискорення точки на бінормаль відсутня $a^b = 0$. Проектуючи ліву і праву частини (3.1) на осі натурального тригранника, дістанемо:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^n F_k^{\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_k^n, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_k^b, \quad (3.7)$$

де останнє рівняння в проекції на бінормаль є рівнянням статики.

Рівності (3.7) є диференціальними рівняннями руху точки в натуральній формі.

Як бачимо з виразу (3.1), вектор рівнодійної сили колінеарний вектору прискорення і розміщений у стичній площині траєкторії, тобто, її проекція на бінормаль дорівнює нулю. Про це інформує третє рівняння системи (3.7).

Рівнянню (3.5) надають перевагу під час доведення теорем. Рівняння (3.6) застосовують як для розв'язування задач, так і для теоретичних досліджень.

Рівняння (3.7) застосовують, здебільшого, якщо задана траєкторія руху точки, тобто, під час дослідження невідомої точки.

Дві задачі динаміки матеріальної точки

Розглянемо основні задачі динаміки матеріальної точки. Оскільки основний закон динаміки точки (3.1) і диференціальні рівняння руху (3.5), (3.6), (3.7) мають у лівій частині прискорення – кінематичну характеристику руху, а у правій частині – векторну суму сил, які діють на точку, або суму проекцій – силову характеристику руху, то, залежно від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

Перша задача динаміки точки

За заданими масою матеріальної точки і кінематичним законом її руху визначити рівнодійну силу, яка спричиняє цей рух.

У цьому випадку розв'язання задачі зводиться до диференціювання кінематичних рівнянь руху матеріальної точки. Тому ця задача називається диференціальною.

Який би спосіб не застосовували, треба знайти проекції сили на осі, які дорівнюють добутку маси на проекцію відповідного прискорення.

Схема розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки проста. Розглянемо алгоритм її розв'язання на прикладі.

Приклад 3.1

Матеріальна точка рухається згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де x, y – в метрах, t – в секундах, a, b, c – сталі величини.

Визначити рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

Розв'язання

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі x, y як першу похідну за часом від координат:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a; \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на осі координат як другу похідну за часом від координат:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють (3.6):

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, що діє на матеріальну точку:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі Oy , тому що $F_x = 0$, і спрямована у бік від'ємних значень цієї осі, адже $F_y = -2mc$.

Друга задача динаміки точки

Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку певної маси, і початковими умовами руху (координати і проекції швидкості в деякий початковий момент часу) визначити закон руху точки.

Друга або обернена задача динаміки матеріальної точки розв'язується методом інтегрування диференціальних рівнянь руху: треба здійснити перехід від проекцій прискорень, які введені в диференціальних рівняннях, до координат у функції часу. Тому друга задача динаміки називається інтегральною. При цьому повинні бути задані початкові умови руху матеріальної точки: координати і проекції швидкості точки у початковий момент часу. Останні мають конкретний вплив на остаточний результат.

Таким чином, під час розв'язування другої задачі динаміки відомі сили, які діють на точку певної маси, координати і проекції швидкостей у певний початковий момент часу. Необхідно знайти кінематичні рівняння руху точки (закон руху).

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (3.6) або (3.7). Визначивши проекції сил на осі координат F_x, F_y, F_z і підставивши їх в праву частину рівнянь, двічі інтегруємо систему.

Розв'язком цієї системи рівнянь є функції координат від часу і шість сталих інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad z = z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (3.8)$$

Для визначення сталих інтегрування підставимо початкові умови – координати і проекції швидкостей в деякий початковий момент часу t_0

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Остаточний розв'язок

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вирази (3.10) називають загальним розв'язком диференціальних рівнянь руху точки.

Розглядаючи рух точки у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі, застосовують диференціальні рівняння (3.7). Початковими умовами руху в цьому випадку будуть значення дугової координати $s(t_0)$ і початкова швидкість $v(t_0) = \dot{s}_0$.

Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної матеріальної точки

Інтегрування диференціальних рівнянь значною мірою залежить від виду функції сили, проекції якої підставляють у праві частини рівнянь. Загалом сила є функцією водночас трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості $\vec{F} = \vec{F}(t, s, v)$. Інтегрування в цьому випадку є складною задачею.

Проте, в техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать тільки від одного кінематичного параметра. Отже, сили, що мають місце під час дослідження роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах у разі їх деформації, а також сили притягання або відштовхування, що виникають під час взаємодії тіл, які є наслідком гравітаційних або електромагнітних сил.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються під час дослідження руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

Алгоритм розв'язання другої задачі динаміки

1. Складання розрахункової схеми і диференціального рівняння руху точки:

- а) вибрати початок відліку, поєднуючи його з початком руху, і провести координатну вісь, зазвичай, у бік руху, а в умовах рівноваги початок відліку зручно вибрати у положенні статичної рівноваги;
- б) зобразити точку, що рухається, у довільному положенні, але так, щоб було $v > 0$. Останнє є суттєвим, якщо серед сил є такі, що залежать від швидкості. Показати всі діючі на точку сили;
- в) підрахувати суму проекцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння. При цьому всі змінні сили виразити через ті кінематичні параметри t, \bar{r}, \bar{v} , від яких вони залежать.

2. Інтегрування диференціального рівняння руху:

Інтегрування відбувається методами вищої математики і залежить від вигляду правої частини рівняння, тобто, від формул прикладених сил. У випадку, коли сила залежить тільки від одного параметра: часу, переміщення або швидкості, то рівняння прямолінійного руху можна інтегрувати методом відокремлення змінних. Якщо при цьому необхідно визначити тільки функцію швидкості від часу, то для цього обмежуються одним інтегруванням рівняння.

3. Визначення довільних сталих інтегрування

Для визначення довільних сталих інтегрування потрібно використати початкові умови: координати і проекції

швидкостей в деякий час або на початку руху t_0 . Сталі інтегрування визначаються безпосередньо після кожного інтегрування.

Якщо у заданого диференціального рівняння змінні величини можна відокремити, то іноді використовуються визначені інтеграли у відповідних границях.

4. Знаходження шуканих величин і аналіз одержаних результатів

Для створення можливостей аналізу отриманого розв'язку методом підрахунку розмірності необхідно проводити розв'язування задачі у загальному вигляді, а числові дані підставляти тільки в остаточний результат.

Надамо приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили змінюються залежно від часу, переміщення і швидкості.

Прямолінійний рух точки

Допустимо, що матеріальна точка рухається прямолінійно, тоді вісь x треба направити у бік руху точки, крім того:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; F_z = 0.$$

Рушійна сила має бути спрямована вздовж осі $F_x = F$. Проте, ця умова прямолінійності руху точки є необхідною, але недостатньою. Потрібно, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі $v_0 = v(t_0) = v_{0x}$.

1. Рух точки під дією сили, яка змінюється з часом

Приклад 3.2

Трактор вагою G під час розгону із стану спокою рухається прямолінійно за горизонталлю і його сила тяги збільшується пропорційно часу $F = kt$, де t – час у секундах; k – сталий коефіцієнт пропорційності.

Визначити закон руху трактора під час розгону $x = x(t)$.

Розв'язання

Трактор рухається поступально, тому приймаємо модель точки. Зпрямуємо вісь x у напрямі руху, а початок відліку помістимо в нерухому точку, де трактор перебував на початку руху, коли $t_0 = 0$, тоді початкова координата $x(t_0) = x_0 = 0$ і початкова швидкість $v(t_0) = v_0 = 0$.

Запишемо диференціальне рівняння (3.6) в проекції на вісь x :

$$m = \frac{G}{g}; \quad m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x = kt. \quad (\text{а})$$

Відокремимо змінні у виразі (а), для чого помножимо на dt ліву і праву частини рівняння та інтегруємо:

$$\int dv_x = \frac{k}{m} \int t dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (\text{б})$$

Підставимо у вираз (б) $v_x = \frac{dx}{dt}$, знову відокремимо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int dx = \frac{k}{m} \int \frac{t^2}{2} dt + C_1 \int dt + C_2.$$

Після другого інтегрування:

$$x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \quad (\text{в})$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняння (б) і (в) підставимо початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то $v(t_0) = v_{0x} = 0$.

Розв'язуючи алгебраїчні рівняння, дістанемо $C_1 = 0; C_2 = 0$.

Остаточо закон руху:

$$x = \frac{kg}{6G} t^3 (м).$$

2. Рух точки під дією сили, пропорційної швидкості

Приклад 3.3

Тіло M вагою \bar{G} падає донизу без початкової швидкості із точки O , яку оберемо за початок координат (рис. 3.1).

Опір повітря пропорційний швидкості $\bar{R} = \alpha \bar{v}$, де α – сталий коефіцієнт пропорційності.

Визначити закон руху тіла $y = y(t)$.

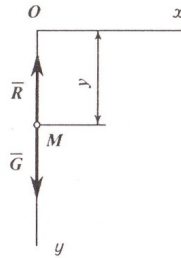


Рис. 3.1

Розв'язання

Допустимо, що задане тіло мале для земних умов, тому приймаємо його за точку. Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили ваги \bar{G} і сили опору повітря \bar{R} в проекції на вісь y (3.6):

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{y} = G_y - R_y = mg - \alpha v. \quad (a)$$

Знизимо порядок рівняння (a), переходячи до $\dot{y} = \frac{dv}{dt}$, і позначимо:

$$\frac{\alpha}{m} = k; \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow dv = (g - kv)dt. .$$

Відокремимо змінні $\frac{dv}{g - kv} = dt$.

Введемо нову змінну $u = g - kv \Rightarrow du = -kdv \Rightarrow dv = -\frac{du}{k}$ і отримаємо рівняння $\frac{du}{u} = -kdt$. Інтегруємо:

$$\ln u = -kt + C_1 \Rightarrow \ln(g - kv) = -kt + C_1. \quad (\text{б})$$

Із рівняння (б) визначимо значення C_1 , підставивши початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то

$$v(t_0) = v_0 = 0 \Rightarrow \ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення C_1 в рівняння:

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g \Rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \quad (\text{в})$$

Потенціюємо вираз (в) і визначаємо швидкість:

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (\text{г})$$

Із аналізу виразу (г) бачимо, якщо $t \rightarrow \infty$, $e^{-kt} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{g}{k}$, то швидкість стає максимальною і сталою $v_{\max} = \frac{g}{k}$, а рух – рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \Rightarrow dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (\text{д})$$

Інтегруємо рівняння (д):

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (\text{е})$$

Для визначення C_2 підставимо у вираз (е) початкові умови:

$$t = t_0 = 0; y = y_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{g}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставимо знайдене значення C_2 у вираз (е) і отримаємо закон руху:

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

3. Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

Приклад 3.4

Матеріальна точка M масою m рухається вздовж осі x під дією сили, пропорційної відстані $F = kmx$, де $k = 4$. На початку руху, якщо $t = t_0 = 0$, то координата і швидкість $x_0 = 5$ м; $v_0 = 2$ м/с.

Визначити закон руху точки $x = x(t)$.

Розв'язання

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x (3.6):

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx.$$

Після скорочень маємо диференціальне рівняння:

$$\ddot{x} - 4x = 0. \quad (\text{а})$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x = Ae^{ut}. \quad (\text{б})$$

Взявши першу \dot{x} і другу \ddot{x} похідні за часом від виразу (б), підставимо їх у рівність (а) і отримаємо характеристичне рівняння:

$$u^2 - 4 = 0,$$

корені якого $u_1 = 2$; $u_2 = -2$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (а):

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (\text{г})$$

Для визначення двох сталих інтегрування C_1 і C_2 треба друге рівняння, яке отримуємо, взявши похідну за часом від виразу (г):

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (д)$$

Підставивши у вирази (г) і (д) початкові умови, дістанемо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3; C_2 = 2.$$

Шуканий закон або рівняння руху точки:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \text{ (м)}.$$

Криволінійний рух точки

Приклад 3.5

Розглянемо рух важкої матеріальної точки, наприклад, каменя, який кинули під кутом α до горизонту в площині xOy з початковою швидкістю v_0 і на який діє тільки сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ (рис. 3.2).

Визначити рівняння руху $x(t)$, $y(t)$, рівняння траєкторії $y = f(x)$, час польоту t_1 , дальність польоту L і висоту польоту h .

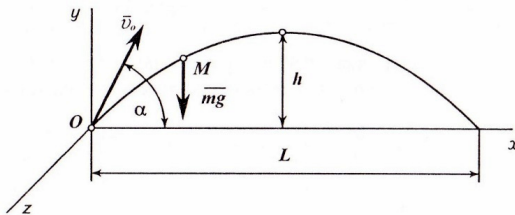


Рис. 3.2

Розв'язання

Користуючись розрахунковою схемою (рис. 3.2), складемо два диференціальні рівняння руху точки (3.6) у проєкціях на дві координатні осі:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (\text{а})$$

Початкові умови, якщо $t = 0$:

$$x_0 = 0; y_0 = 0; v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференціальні рівняння (а) і дістанемо закон зміни проекцій швидкостей:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases} \quad (\text{б})$$

Далі інтегруємо рівняння (б) і отримаємо рівняння руху:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases} \quad (\text{в})$$

Підставляючи початкові умови, визначаємо із рівнянь (б) і (в) сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_3 &= 0; & C_1 &= v_0 \cos \alpha; \\ C_4 &= 0; & C_2 &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Підставимо сталі інтегрування у вирази (б), (в) і остаточно визначимо закон зміни швидкостей і закон руху точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t; \\ y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (\text{г})$$

Для визначення рівняння траєкторії руху точки $y = f(x)$ виключимо параметр t з останніх рівнянь руху (г):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \frac{(v_0 \sin \alpha) x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \\ y &= tg \alpha \cdot x - \frac{g(1 + tg^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Отримане рівняння (д) траєкторії руху $y = f(x)$ відповідає параболі.

Визначаємо із виразу (г) час польоту t_1 в момент падіння точки на землю, коли $y = 0$

$$y = 0; \Rightarrow (v_0 \sin \alpha)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{gt_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальність польоту $L = x(t_1)$ визначимо із виразу (г)

$$L = x(t_1) = (v_0 \cos \alpha)t_1 = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальна висота польоту $h = y(t_2)$ визначиться в момент половини шляху і часу польоту: $t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$;

$$h = y_{\max} = (v_0 \sin \alpha)t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g(v_0^2 \sin^2 \alpha)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

3.1.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Рух невільної матеріальної точки у просторі обмежений певними умовами або тілами, які називаються в'язями.

В'язі примушують точку рухатись на деякій поверхні або вздовж лінії, яка є наслідком перетину двох поверхонь.

Вивчаючи рух невільної точки, використовують аксіому про звільнення від в'язей. Вона дозволяє вважати точку вільною, якщо умовно відкинути фізичні в'язі і замінити їх дію реакціями цих в'язей.

Диференціальне рівняння у векторній формі для невільної матеріальної точки має такий вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (3.11)$$

де \bar{F} – рівнодійна активних сил;

\bar{R} – рівнодійна сил реакцій в'язей.

Спроекуємо ліву і праву частини виразу (3.11) на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z і осі натуральної системи координат τ, n, b :

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, & m \frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\
 m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\
 m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z, & 0 &= F_b + R_b.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Рівності (3.12) є диференціальними рівняннями руху невільної матеріальної точки в прямокутних декартових (ліворуч) і натуральних осях координат (праворуч).

Під час розв'язання задачі невільної матеріальної точки зустрічаються певні складності. Якщо взяти рівняння (3.12) в декартових координатах, то система містить три невідомих проєкції в'язі як функції часу. Тому треба скласти три додаткові рівняння, які б враховували відповідні рівняння в'язей і їхні властивості.

3.1.3. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки

Закони Ньютона стосуються руху вільної матеріальної точки. На невільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій.

Аксіома про звільнення від в'язей дає можливість звести будь-яку невільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил і реакції відповідних в'язей.

Тому метод, який базується на принципі д'Аламбера, що розглядається у цьому параграфі, еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільнення від в'язей.

Згаданий метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або силу реакції в'язі, яка обмежує рух точки в певному напрямі.

Допустимо, що невільна матеріальна точка M рухається за заданою траєкторією (рис. 3.3) під дією рівнодійної активних сил:

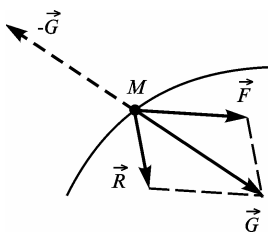


Рис. 3.3

\vec{F} і рівнодійної реакції в'язей \vec{R} . На підставі аксіоми про паралелограм сил векторна сума сил \vec{F} і \vec{R} дорівнює \vec{G} .

Запишемо у векторній формі диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} = \vec{G}. \quad (3.13)$$

Перепишемо рівняння (3.13):

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0. \quad (3.14)$$

Силу $(-m\vec{a})$ називають *силою інерції* точки і позначають:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то, на перший погляд, точка перебуває у стані рівноваги.

Але згадана рівновага є умовною, тому що сили \vec{F} і \vec{R} прикладені до точки M , а сила $(-m\vec{a})$, яка дорівнює $(-\vec{G})$, до цієї точки не прикладена.

Силою інерції матеріальної точки називають **вектор $\vec{\Phi}$** , який дорівнює за модулем **добутку маси точки на її прискорення** і спрямований протилежно вектору прискорення \vec{a} .

Сила інерції є головним вектором сил протидії, прикладених до зовнішніх тіл, одні з яких є джерелами активних сил, інші – в'язями,

тому в природі існують реально тільки її складові, прикладені до різних тіл.

Лише тоді, коли точка взаємодіє з одним тілом, головний вектор сил інерції фізично існує у вигляді однієї сили:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.15)$$

Рівність (3.15) є математичним відображенням принципу д'Аламбера. Сформулюємо цей принцип для матеріальної точки.

Активні сили і реакції в'язей, прикладені до точки, умовно зрівноважуються прикладеною до точки силою інерції.

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(m\ddot{x} \cdot \bar{i} + m\ddot{y} \cdot \bar{j} + m\ddot{z} \cdot \bar{k}), \quad (3.16)$$

де $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекції прискорення точки на відповідні осі координат. Проекції сили інерції на осі і повна сила інерції визначаються:

$$\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}; \quad \Phi = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}.$$

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -\left(m \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} \right), \quad (3.17)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – дотична складова прискорення; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – нормальна складова прискорення; ρ – радіус кривини траєкторії точки.

$$\text{Або} \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n; \quad \bar{\Phi}_\tau = -ma_\tau; \quad \bar{\Phi}_n = -ma_n,$$

де $\bar{\Phi}_\tau$ – тангенціальна складова сили інерції точки;

$\bar{\Phi}_n$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Допустимо, що точка M масою m розміщена на обертовому тілі і рухається разом з тілом на відстані r від осі O (рис. 3.4).

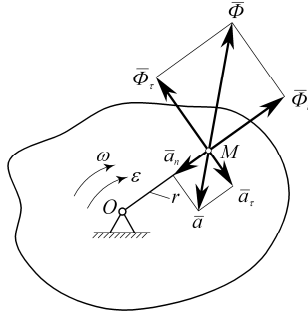


Рис. 3.4

Тоді сила інерції точки визначається так:

$\Phi_{\tau} = ma_{\tau} = mr\varepsilon$ – тангенціальна складова сили інерції точки M ;

$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 r$ – нормальна або відцентрова складова сили інерції.

Модуль повної сили інерції матеріальної точки

$$\Phi = \sqrt{\Phi_{\tau}^2 + \Phi_n^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Рівність (3.15) не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовляють прискорення точки відносно абсолютної системи координат.

Сила інерції матеріальної точки вважається фіктивною, тому що до самої точки вона не прикладена, а може бути прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення або до в'язі, яка обмежує її рух. До того ж, насправді, точка не перебуває в рівновазі, а має прискорення.

Принцип д'Аламбера є формально-математичним методом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, проте, він дає математично точні і прості співвідношення для ефективного розв'язання першої задачі динаміки.

Векторному рівнянню (3.15) відповідають три рівняння в проекціях:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, F_y + R_y + \Phi_y = 0, F_z + R_z + \Phi_z = 0. \quad (3.19)$$

Значення принципу д'Аламбера полягає в тому, що він дає змогу скласти рівняння руху невільної точки у формі рівнянь рівноваги.

Зрозуміло, що принцип д'Аламбера не дає можливості подолати складності під час розв'язання другої задачі динаміки, пов'язані з інтегруванням диференціальних рівнянь руху.

Приклад 3.6

Платформа з вантажем масою m опускається донизу з прискоренням \bar{a} (рис. 3.5).

Визначити реакцію платформи \bar{N} .

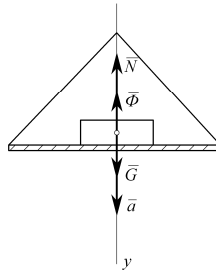


Рис. 3.5

Розв'язання

Оскільки рух платформи є поступальним, то він ідентичний руху точки. Покажемо на схемі активну силу ваги \bar{G} , реакцію платформи \bar{N} і силу інерції $\bar{\Phi}$.

$|\bar{\Phi}| = ma$ – сила інерції вантажу, $G = mg$ – вага вантажу.

Прикладемо умовно до вантажу силу інерції і запишемо рівняння рівноваги як суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum F_{iy} = 0; \Rightarrow G - \Phi - N = 0.$$

Звідси реакція платформи:

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

Якщо прискорення вантажу дорівнює прискоренню вільного падіння ($a = g$), то реакція платформи $N = 0$ (умова невагомості).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає динаміка, які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
4. Напишіть диференціальні рівняння руху невідомої матеріальної точки.
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь руху?
9. Якими способами зручніше розв'язувати задачі механіки?
10. Чому перша задача динаміки називається диференціальною, а друга – інтегральною?
11. Визначте поняття сили інерції.
12. Як виражається сила інерції точки в декартових і натуральних осях?
13. Як формулюється принцип д'Аламбера для матеріальної точки?
14. Якою є умова невагомості тіла?
15. Чому сила інерції є фіктивною, а принцип д'Аламбера не є законом?

3.1.4. Динаміка відносного руху матеріальної точки

Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Перші закони динаміки і всі отримані на їхній основі рівняння справедливі для руху матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку. Але є багато випадків, у яких закон руху матеріальної точки необхідно шукати в неінерціальних системах. Неінерціальність геоцентричної системи відліку можна спостерігати за допомогою досить тонких експериментів: відхилення тіла під час вільного падіння на схід і поворот площини коливання маятника (досліди Фуко). Проте, похибка тут невелика і у більшості прикладних задач системи відліку, зв'язані із Землею, наближено вважаються інерціальними.

Адже, розв'язання численних задач техніки потребує дослідження об'єктів відносно неінерціальної рухомої системи координат, наприклад, це стосується теорії складного руху точки.

Нехай існують сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, які діють на вільну матеріальну точку M , а також є відомим закон переносного руху системи координат $Oxyz$, що жорстко зв'язана з деяким тілом і рухається разом з ним відносно інерціальної системи відліку $O_1x_1y_1z_1$, яку вважаємо за нерухому систему (рис. 3.6).

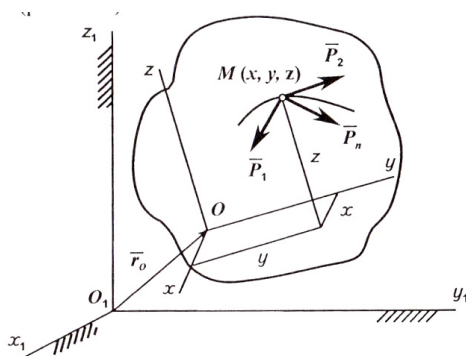


Рис. 3.6

Абсолютним рухом точки M є рух відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$, а відносним – рух відносно рухомої системи $Oxyz$.

Переносний рух точки – це рух тієї точки тіла або рухомого простору, з якою в цю мить збігається точка M .

Визначимо рівняння динаміки відносного руху точки.

Основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки для абсолютного руху має вигляд (3.1):

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_k,$$

де \bar{a} – абсолютне прискорення точки;

$\sum \bar{P}_k$ – векторна сума прикладених до точки сил.

Використаємо теорему Коріоліса і визначимо абсолютне прискорення точки через відносне, переносне і прискорення Коріоліса (2.88):

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k.$$

Підставимо вираз (2.88) у рівняння (3.1):

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_e + m\bar{a}_k = \sum \bar{P}_k \Rightarrow m\bar{a}_r = \sum \bar{P}_k + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k),$$

де $-m\bar{a}_e = \bar{\Phi}_e$ – переносна сила інерції точки;

$-m\bar{a}_k = \bar{\Phi}_k$ – коріолісова сила інерції.

І остаточно останнє рівняння набуває вигляду:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{P}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (3.20)$$

Вектори переносної $\bar{\Phi}_e$ і коріолісової $\bar{\Phi}_k$ сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат.

Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами.

Вираз (3.20) називається *основним рівнянням динаміки відносного руху точки*.

У проєкціях на осі рухомої системи координат отримаємо диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \sum P_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\
 m\ddot{y} &= \sum P_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\
 m\ddot{z} &= \sum P_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

У випадку непоступального переносного руху рухомої системи відліку **відносний рух** матеріальної точки **можна розглядати як абсолютний, якщо** до діючих на точку сил **приєднати переносну і коріолісову сили інерції** точки.

Рівності (3.21) відрізняються від відповідних рівнянь абсолютного руху наявністю в правих частинах проекцій переносної і коріолісової сил інерції.

Для обчислення цих сил інерції потрібно визначити спочатку переносне прискорення і прискорення Коріоліса.

Якщо переносний рух як рух рухомої системи є обертальним рухом з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε , то

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n,$$

де \bar{a}_e^τ – тангенціальне прискорення точки M у переносному русі, \bar{a}_e^n – нормальне прискорення точки M у переносному русі,

тоді

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m\bar{a}_e^\tau - m\bar{a}_e^n,$$

або

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n.$$

Якщо врахувати останню рівність, то рівняння (3.20) набуває вигляду:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{P}_k + \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_k. \tag{3.22}$$

Модуль прискорення Коріоліса визначається виразом (2.90):

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}).$$

Тоді сила інерції Коріоліса за модулем:

$$|\Phi_k| = 2m\omega_e v_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \tag{3.23}$$

Можуть бути різні випадки відносного руху точки залежно від характеру переносного руху, а також від накладених на точку

в'язей. Так, для невіЛЬНОЇ матеріальної точки рівняння відносного руху має вигляд:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{P}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k + \bar{R},$$

де \bar{R} – сила реакції в'язі.

Принцип відносності класичної механіки

Якщо переносний рух рухомої системи буде поступальний, рівномірний і прямолінійний, то переносне прискорення і прискорення Кориоліса дорівнюють нулю $\bar{a}_e = 0$; $\bar{a}_k = 0$. Тоді із виразу (3.20)

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k. \quad (3.24)$$

Тобто, рівняння (3.24) відносного руху не відрізняється від рівняння абсолютного руху (3.1), оскільки $\bar{a}_r = \bar{a}$, і відносний рух не відрізняється від абсолютного.

Таким чином, відносний рух матеріальної точки відносно рухомої системи відліку, що рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, відбувається так само, як і відносно нерухомої системи відліку.

Звідси випливає висновок, що такі системи відліку, які рухаються відносно інерціальної системи прямолінійно, поступально і рівномірно, також є інерціальними системами відліку, і рух матеріальної точки відносно таких систем можна розглядати як абсолютний рух. На цьому ґрунтується **принцип відносності Галілея**.

Ніякими механічними дослідженнями в середині системи, яка рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, неможливо виявити, що вона рухається.

Принцип Галілея, відкритий у 1630 р., поширюється і на фізичні явища.

Теорія відносності стверджує, що всі фізичні явища в інерціальних системах відліку відбуваються однаково.

Окремі випадки відносного руху точки Відносний спокій матеріальної точки

З рівняння (16.18) випливає умова відносного спокою. За відносного спокою відносна швидкість \bar{v}_r і відносне прискорення \bar{a}_r відсутні, внаслідок чого відсутня і коріолісова сила інерції, тому рівняння (3.20) набуває вигляду:

$$\sum \bar{P}_k + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (3.25)$$

З виразу (3.25) випливають умови відносного спокою точки.

У випадку відносного спокою матеріальної точки векторна сума прикладених до точки активних сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

Приклад 3.7

Розглянемо випадок відносного спокою матеріальної точки (тіла) на земній поверхні в місцевості поблизу міста Київ (рис. 3.7).

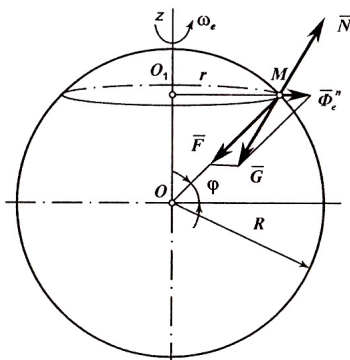


Рис. 3.7

Використаємо відомі величини:

$m = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг – маса Землі; $R = 6.37 \cdot 10^6$ м – радіус Землі;
 $\omega_e = 0.0000727$ с⁻¹ – кутова швидкість Землі; $\varphi \approx 50^\circ$ – широта міста Київ;
 m_1 – маса тіла на поверхні Землі; $G = m_1 g$ – вага тіла, що

приймається за точку; $O_1M = r$ – радіус обертання точки поверхні Землі навколо земної осі, N – сила реакції опори (земної поверхні).

Згідно із законом всесвітнього тяжіння сила притягання, що спрямована до центра Землі:

$$F = f \frac{m \cdot m_1}{R^2}, \quad (3.26)$$

де $f = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-2} \cdot \text{с}^2$ – гравітаційна стала.

Розв'язання

Умова відносного спокою точки:

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^n = 0,$$

де $\bar{\Phi}_e^n$ – переносна сила інерції, яка виникає внаслідок рівномірного обертання Землі відносно власної осі і є відцентровою силою інерції.

Модуль переносної сили інерції:

$$\Phi_e^n = m_1 \cdot a_e^n = m_1 \cdot r \cdot \omega_e^2; \quad r = R \cdot \cos \varphi \Rightarrow \Phi_e^n = m_1 \cdot R \cdot \omega_e^2 \cdot \cos \varphi.$$

Сила \bar{G} є рівнодієюю сили притягання Землі \bar{F} і переносної сили інерції $\bar{\Phi}_e^n$, тобто, вагою тіла. Напрямок сили ваги \bar{G} визначає напрям вертикалі в заданій точці земної поверхні, а площина, перпендикулярна напрямку сили \bar{G} , є горизонтальною площинною. За модулем сила інерції $\bar{\Phi}_e^n$ мала порівняно з вагою тіла \bar{G} :

$$\frac{\Phi_e^n}{G} = \frac{m_1 R \omega_e^2 \cos \varphi}{m_1 g} = \frac{R \omega_e^2 \cos \varphi}{g},$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння на широті 50° .

Відношення Φ_e^n / G має максимальне значення на екваторі:

$$\varphi = 0; \quad R = 6370 \text{ км}; \quad g = 9.78 \text{ м/с}^2; \quad \frac{\Phi_e^n}{G} = 0.00346 = \frac{1}{290}.$$

З останнього випливає, що вага тіла \bar{G} мало відрізняється від сили притягання Землі \bar{F} , і напрям вертикалі складає з напрямком

сили \bar{F} дуже малий кут. Найбільшу вагу мають тіла на полюсі, а найменшу – на екваторі за двома причинами.

1. Сила притягання \bar{F} на полюсах має найбільшу величину (Земля сплюснута).

2. Переносна сила інерції $\bar{\Phi}_e^n$ на полюсі дорівнює нулю, а на екваторі – максимальна.

Тому прискорення вільного падіння тіла на полюсі дорівнює $g = 9,83 \text{ м с}^{-2}$, а на екваторі – $g = 9,78 \text{ м с}^{-2}$.

Рух тіла на земній поверхні

Якщо матеріальна точка (тіло) рухається вздовж меридіана з півночі на південь на північній півкулі, то коріолісове прискорення \bar{a}_k спрямоване на схід, а коріолісова сила інерції $\bar{\Phi}_k$ – на захід. Коли рух точки відбувається з півдня на північ, то прискорення Коріоліса \bar{a}_k спрямоване на захід, а коріолісова сила інерції – на схід. Але в обох випадках точка внаслідок обертання Землі завжди відхиляється праворуч від напрямку її руху.

Звідси випливає висновок: на північній півкулі матеріальна точка завжди відхиляється праворуч від напрямку руху, на південній півкулі – ліворуч.

Цим пояснюється те, що річки північної півкулі мають підмитий, стрімкий правий берег (закон Бера), а річки південної півкулі – лівий.

Дуже цікавим є і таке природне явище, пов'язане з силами інерції Коріоліса. Якщо річка тече вздовж паралелі, то прискорення Коріоліса частинок води спрямоване вздовж радіуса кола цієї паралелі у напрямі до центра кола. Протилежні ж прискоренню сили інерції ніби підносять маси води і підтримують їх у деякій силевій оболонці.

Тому такі відомі річки, як Амазонка, Амур, Дунай, Хуанхе, Янцзи в місцях, де вони біжать уздовж паралелі, не мають, практично, берегів, часто змінюють своє русло, розливаються під час повені і затоплюють великі території.

Сили інерції Коріоліса спричиняють відхилення вітрів від свого сталого напрямку (пасати) і відхилення морських течій.

Відхилення тіл під час вертикального падіння

Із спостережень відомо, що всі тіла, які вільно падають, незначно відхиляються від вертикалі у східному напрямі у зв'язку з обертанням Землі. З'ясуємо наслідки цього явища, розглядаючи відносний рух тіла, що падає, без початкової швидкості відносно рухомої системи відліку, жорстко зв'язаної з земною кулею, що обертається навколо своєї осі (рис. 3.8).

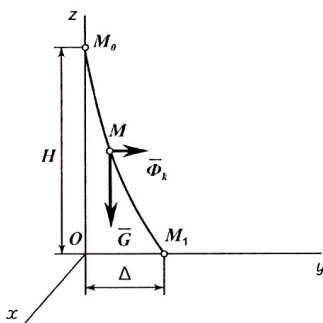


Рис. 3.8

Вісь Oz прямокутної системи декартових координат $Oxyz$ нехай з'єднує початкове положення тіла M_0 , початок відліку O і центр Землі, вісь Ox направимо за дотичною до меридіана, а вісь Oy – на схід перпендикулярно до площини меридіана xOz за дотичною до паралелі.

Складемо диференціальні рівняння відносного рух точки у формі проєкцій на осі вибраної системи відліку (3.21):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx} = 0; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky} = \Phi_k = 2m\omega_e v_r \cos\varphi; \\ m\ddot{z} &= \sum F_{kz} = -G = -mg. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Двічі інтегруючи перше рівняння системи (3.27) за нульових початкових умов, отримуємо закон руху вздовж осі x : $x = 0$. З цього випливає, що точка M рухається в площині yOz .

Інтегруючи третє рівняння, отримуємо закон руху вздовж вертикальної осі z :

$$z = H - gt^2 / 2. \quad (3.28)$$

У другому рівнянні (3.27) є проекція сили інерції Коріоліса. Щоб визначити напрям вектора коріолісової сили інерції у випадку вільного падіння малого тіла, треба врахувати напрямок відносної швидкості v_r точки M . Цей напрямок майже не відхиляється від вертикалі, а тому з достатнім ступенем точності можна прийняти $v_r = \dot{z} = gt$, взявши похідну за часом від виразу (3.28). Тоді прискорення Коріоліса буде спрямоване на захід (вліво, рис.3.8), а сила інерції Коріоліса $\overline{\Phi}_k$ – протилежно, на схід (у напрямку осі y).

Таким чином, точка або мале тіло за вільного падіння з висоти H може відхилитися від вертикалі на схід тільки під дією сили інерції Коріоліса.

Отже, друге рівняння набирає вигляду:

$$m\ddot{y} = 2m\omega_e gt \cos \varphi.$$

Після інтегрування здобудемо:

$$\dot{y} = \omega_e gt^2 \cos \varphi + C_1; \quad y = \frac{1}{3} \omega_e gt^3 \cos \varphi + C_1 t + C_2;$$

За початковими умовами: $t_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, y = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0$.

Підставляючи довільні сталі інтегрування, дістанемо для руху точки вздовж осі y :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega_e gt^2 \cos \varphi; \\ y &= \frac{1}{3} \omega_e gt^3 \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.29)$$

де ω_e – кутова швидкість переносного обертання Землі;
 φ – широта місцевості, де перебуває точка.

Підставляючи у рівність (3.29) час падіння $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ із виразу (3.28), остаточно визначаємо відхилення на схід точки (тіла):

$$y_{\max} = \Delta = \frac{2}{3} H \omega_e \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi. \quad (3.30)$$

Вираз (3.30) дає можливість визначити відхилення для будь-

якої місцевості Землі. Так, для Києва ($\varphi \approx 50^\circ$) відхилення у разі падіння з висоти $H = 100$ м становить приблизно $\Delta \approx 1$ см.

Тіло, яке кидають вертикально догори, відхиляється не на схід, а на захід, оскільки сила інерції Коріоліса у цьому випадку спрямована перпендикулярно до площині меридіана zOx на захід.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке інерціальна система відліку?
2. Які досліди доводять, що геоцентрична система відліку не є інерціальною?
3. Запишіть основне рівняння динаміки відносного руху точки у векторній і координатній формах.
4. Що таке сила інерції Коріоліса, як її визначити і як вона впливає на природні явища?
5. Сформулюйте принцип відносності Галілея.
6. Які ви знаєте умови відносного спокою точки?
7. Доведіть, чому один берег річки високий, а інший – ні?
8. Чому береги річок, що біжать уздовж паралелі, низькі?

3.1.5. Коливання матеріальної точки

Коливальний рух – це рух, за якого деякі параметри цього руху періодично змінюються і повторюються.

Якщо параметри коливального руху змінюється за законом синуса або косинуса, то такий рух називається *гармонічним коливальним рухом*.

Наука про коливання становить основу низки галузей фізики і техніки. Коливання, які розглядаються у різних галузях, відрізняються за фізичною суттю (механіка, радіотехніка, акустика тощо), але основні закони цих коливань залишаються ідентичними.

Отже, вивчення і дослідження механічних коливань є важливим не тільки для вдосконалення техніки, але й для багатьох інших галузей.

Кінематика гармонічних коливань

Якщо точка M рухається вздовж кола радіусом R рівномірно (рис. 3.9), то радіус точки OM обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω за законом $\varphi = \alpha + \omega t$. Точка M_0 є початковим положенням на траєкторії, яке визначається кутом α .

Точка M_1 , що є проекцією точки M на вісь x , рухається за законом:

$$x = OM_1 = OM \cos(\omega t + \alpha) = R \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.31)$$

Аналогічно, точка M_2 , проекція точки M на вісь y , здійснює такий закон руху:

$$y = OM_2 = OM \sin(\omega t + \alpha) = R \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.32)$$

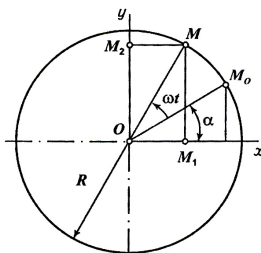


Рис. 3.9

Точку M відносно точок M_1 і M_2 називають допоміжною.

Таким чином, якщо допоміжна точка M рухається рівномірно вздовж кола радіусом R , то її проекції на координатні осі x і y здійснюють гармонічні коливання згідно з функціями синуса або косинуса.

Величина R , що стоїть множником перед функціями синуса або косинуса, називається **амплітудою коливань**.

Амплітудою називається **максимальне відхилення точок M_1 і M_2 від точки O , як середнього положення або положення рівноваги.**

Величина ω для точок M_1 і M_2 є **коловою або циклічною частотою**, це кутова швидкість радіуса допоміжної точки M .

Колова частота вимірюється в $[\text{рад}/\text{с}][\text{с}^{-1}]$

Фазою коливань в радіанах називається вираз $(\omega t + \alpha)$, де α є початковою фазою коливань, коли час $t = 0$.

Повне коливання точок M_1 і M_2 відбудеться тоді, коли кожна з точок двічі пройде через те саме положення, а допоміжна точка M здійснить один повний оберт.

Найменший проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання, а точка матиме ту саму координату, називається періодом коливань T (с).

$$\text{Очевидно, що } \omega \cdot T = 2\pi; \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.33)$$

Кількість коливань за одиницю часу (за одну секунду) називається **частотою коливань** і вимірюється в герцах [Гц]:

$$f = \frac{1}{T}; \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}]. \quad (3.34)$$

Класифікація коливань

Колівальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку M , що відхиляється від положення спокою або рівноваги (точка O), діє сила \bar{F} , яка намагається повернути точку в попереднє положення рівноваги. Така сила називається **поновлювальною** (рис. 3.10).

Практично важливими є випадки, коли поновлювальна сила, пропорційна величині відхилення, є лінійною функцією переміщення (деформації):

$$F = c \cdot OM,$$

де c – коефіцієнт пропорційності,

OM – переміщення точки або деформація пружного елемента.

Прикладом такої сили є сила пружності пружини, шини, деформованого тіла.

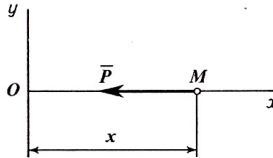


Рис. 3.10

Коефіцієнт пропорційності у цьому випадку називають *лінійним коефіцієнтом жорсткості, який чисельно дорівнює силі, що припадає на одиницю переміщення* (деформації пружини). Одиницею вимірювання коефіцієнта жорсткості у системі одиниць СІ є Н/м.

Коливання можуть відбуватись і під дією сил, підпорядкованих іншим законам.

На основі енергетичного балансу прямолінійні коливання матеріальної точки поділяються на чотири основні типи.

1. *Вільні коливання* під дією поновлювальної сили;
2. *Вільні згасаючі коливання* під дією поновлювальної сили і сили опору, пропорційної першому ступеню швидкості;
3. *Змушені коливання без опору* під дією поновлювальної сили і збурювальної сили;
4. *Змушені коливання з опором* під дією поновлювальної сили, сили опору і збурювальної сили.

Динаміка коливань.

Вільні коливання матеріальної точки

Вільні коливання точки відбуваються під дією поновлювальної сили, яка є лінійною функцією переміщення точки від положення рівноваги і завжди спрямована в напрямі положення рівноваги, де б точка в цей момент часу не знаходилась.

Розглянемо динаміку прямолінійних вільних коливань на прикладі коливання вантажу на пружині вздовж осі x , яку спрямуємо донизу у бік руху тіла (рис. 3.11). Довжина пружини у недеформованому стані l_0 .

Поволі відпустимо вантаж, він опиниться в положенні статичної рівноваги. Відношення ваги вантажу до статичної деформації λ_{cm} , якщо система пружина – вантаж перебуває у стані рівноваги є *коефіцієнтом жорсткості пружини* c [$H / м$]:

$$c = G / \lambda_{cm}; \Rightarrow G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

У стані рівноваги сила пружності дорівнює силі ваги:

$$F_{np} = G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

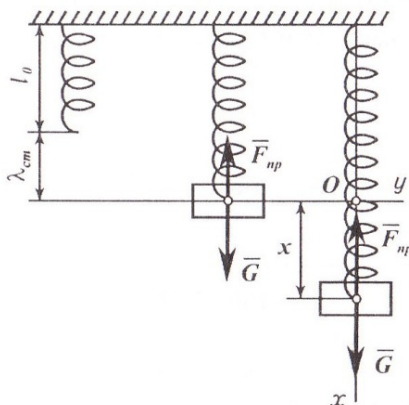


Рис. 3.11

Коливання вантажу масою m відбувається навколо положення статичної рівноваги O , який називається *центром коливань*. Якщо вантаж відхилився від цього положення, то на нього крім сили ваги діють і дві складові сили пружності пружини, статична і динамічна:

$$F_{np} = c(\lambda_{cm} + x) = c\lambda_{cm} + cx.$$

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь x :

$$m\ddot{x} = G - F_{np}; \Rightarrow m\ddot{x} = c \cdot \lambda_{cm} - c(\lambda_{cm} + x); \Rightarrow m\ddot{x} = -c \cdot x,$$

де $(c \cdot x)$ – поновлювальна сила, яка є рівнодієюною сили ваги і сили пружності пружини. *Стала сила G* , як неважко побачити, не змінює характеру коливань, а лише *зміщує центр* цих коливань у бік дії сили на величину статичної деформації λ_{cm} .

Тоді: $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$. Позначимо $\frac{c}{m} = k^2$; $\Rightarrow k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ і, остаточно,

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (3.35)$$

Рівність (3.35) є диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (3.35) шукаємо у вигляді $x = e^{nt}$ і для визначення n складаємо характеристичне рівняння, підставляючи розв'язок і його другу похідну в рівняння

$$n^2 + k^2 = 0; \Rightarrow n_{1,2} = \pm ik, \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ – уявна одиниця.}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.35):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3.36)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 розв'язку (3.36) знаходимо за допомогою початкових умов:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0. \end{cases}$$

Оскільки невідомих сталих інтегрування дві, то знайдемо друге рівняння, взявши похідну $v = \dot{x}(t)$ від виразу (3.36):

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3.37)$$

У рівняння (3.36) і (3.37) підставимо початкові умови x_0 і v_0 , якщо $t_0 = 0$:

$$\left. \begin{cases} x_0 = C_1 & C_1 = x_0 \\ C_2 k = v_0 & C_2 = \frac{v_0}{k} \end{cases} \right\}. \quad (3.38)$$

Значення довільних сталих (3.38) підставимо у рівність (3.36):

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (3.39)$$

Вираз (3.39) є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.36), законом вільних коливань. Його можна подати у вигляді однієї гармоніки шляхом підстановки:

$$x_0 = A \sin \alpha; \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \alpha. \quad (3.40)$$

Враховуючи підстановку (3.40), розв'язок (3.39) запишеться:

$$\begin{aligned} x &= A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt. \\ x &= A \sin(kt + \alpha). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Сталі коефіцієнти A і α знаходимо з рівнянь (3.40), якщо ліві і праві частини спочатку піднести до квадрата:

$$x_0^2 = A^2 \sin^2 \alpha; \quad \frac{v_0^2}{k^2} = A^2 \cos^2 \alpha, \quad (3.42)$$

а потім почленно додати:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (3.43)$$

Якщо у виразах (3.40) перше рівняння поділити на друге, то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}; \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0}. \quad (3.44)$$

Закон руху (3.41) інформує, що точка здійснює гармонічні коливання, амплітуда яких (3.43) і початкова фаза (3.44) залежать лише від початкових умов і важливої характеристики системи – колової або циклічної частоти вільних коливань $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ [c^{-1}].

Період вільних коливань:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (3.45)$$

Період вільних коливань можна знайти за наближеною формулою через таке еквівалентне перетворення:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\sqrt{\frac{\pi^2 G \cdot \lambda_{cm}}{g \cdot G}} = 2\sqrt{\lambda_{cm}}. \quad (3.46)$$

Необхідно зазначити, що вільні гармонічні коливання в дійсності не існують, тому що завжди є реальний опір, завдяки чому згасання коливань неминуче. Отже, вільні коливання – це теоретична модель. Проте, під час згасання зменшується лише амплітуда коливань, а частота коливань залишається незмінною.

Тому частота вільних коливань є «динамічною індивідуальністю» системи і залежить тільки від характеристик самої системи загалом.

Для простих коливальних систем частота залежить тільки від співвідношення маси і жорсткості пружних елементів. Це загальна закономірність. Підвищуємо масу – знижується власна частота, підвищуємо жорсткість – збільшується. А для періоду коливань – навпаки (3.45).

Вільні коливання мають фундаментальне значення. Знаючи характеристики вільних коливань, можна передбачити поведінку механічної системи під дією різних збурювальних факторів.

Для розв'язання задач на вільні коливання матеріальної точки можна запропонувати такий алгоритм.

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, що діють на згадану точку.

2. Вибрати початок відліку у центрі коливань і спрямувати вісь у бік руху точки.

3. Записати початкові умови руху точки.

4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на вибрану вісь.

5. Інтегрувати диференціальне рівняння руху двічі.

6. Визначити довільні сталі інтегрування за допомогою початкових умов.

7. Записати остаточний закон коливального руху матеріальної точки.

Приклад 3.8

Вантаж масою $m = 2$ кг падає з висоти $h = 40$ см на середину твердої квадратної плити, закріпленої на чотирьох симетрично розміщених пружинах (рис. 3.12). Коефіцієнт жорсткості пружини $c_1 = 2$ Н/см.

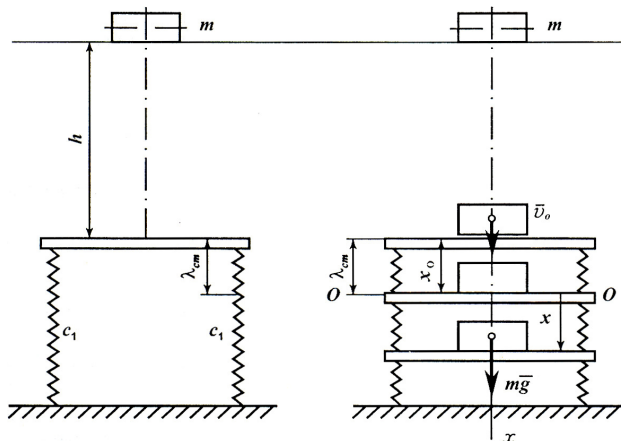


Рис. 3.12

Визначити закон коливального руху вантажу $x = x(t)$, якщо під час контакту з плитою вантаж заклинює і далі він рухається разом з плитою. Масою плити знехтувати.

Розв'язання

Спрямуємо вісь x вертикально донизу, початок осі помістимо в точку статичної рівноваги, де деформація пружини дорівнює статичній деформації λ_{cm} . Зведений коефіцієнт жорсткості пружин, з'єднаних паралельно $c = 4c_1 = 800 \text{ Н/м}$.

Початкова швидкість вантажу в момент торкання пластини визначається:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2,8 \text{ м/с}.$$

Отже, початкові умови руху вантажу на пружинах:

$$x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -\frac{2 \cdot 9.8}{800} = -0,0245 \text{ м},$$
$$\dot{x}_0 = v_0 = 2,8 \text{ м/с}.$$

Вантаж здійснює вільні коливання з коловою частотою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Закон руху вільних коливань (3.41):

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда коливань, яку визначимо з виразу (3.43):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{(0,0245)^2 + \frac{2,8^2}{20^2}} = 0,142 \text{ м};$$

де α – початкова фаза коливань (3.44):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} = \frac{(-0,0245) \cdot 20}{2,8} = -0,175 \Rightarrow \alpha = -0,1754 \text{ рад}.$$

Остаточний закон коливального руху вантажу:

$$x = 0,142 \sin(20t - 0,1754) \text{ м}.$$

Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянуті вище вільні коливання матеріальної точки в реальних умовах поступово згасають, оскільки на коливання

впливає опір середовища. Розглянемо випадок коливання точки, коли сила опору пропорційна першому ступеню швидкості:

$$\bar{R} = -\mu\bar{v},$$

де μ – коефіцієнт пропорційності.

Знак «мінус» інформує, що вектори сили і швидкості спрямовані протилежно.

На точку масою m під час її руху діють поновлювальна сила $-cx$ (рівнодійна сили ваги і сили пружності пружини) і сила опору \bar{R} (рис. 3.13), де x – відхилення точки від положення статичної рівноваги O , початку системи координат:

$$\bar{R} = -\mu\bar{v}; \quad R_x = -\mu \dot{x}. \quad (3.47)$$

Диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}; \Rightarrow m\ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0. \quad (3.48)$$

Рівняння (3.48) поділимо на масу m і введемо позначення:

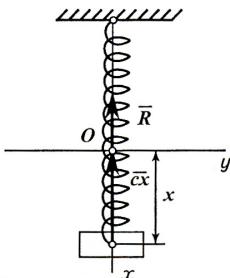


Рис 3.13

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0; \quad \frac{\mu}{m} = 2n; n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{c}{m} = k^2; k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

де n – коефіцієнт згасання;

k – циклічна частота вільних коливань.

Зазначимо, що коефіцієнт згасання n і циклічна частота k мають однакову розмірність, тому їх можна порівнювати.

Остаточно отримаємо *диференціальне рівняння згасаючих коливань*:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (3.49)$$

Рівняння (3.49) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (3.50)$$

Корені характеристичного рівняння (3.50):

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.51)$$

Розв'язок рівняння має різний вигляд залежно від співвідношення коефіцієнтів n і k . Якщо корені рівняння (3.50) є дійсними і різними чи дійсними і рівними $n^2 - k^2 \geq 0; \Rightarrow n \geq k$, тобто, якщо опір більший порівняно з відновлювальною силою, то відбувається аперіодичний рух за законом

якщо $n > k \Rightarrow x = C_1 e^{\left(-n + \sqrt{n^2 - k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-n - \sqrt{n^2 - k^2}\right)t}, \quad (3.52)$

якщо $n = k \Rightarrow x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (3.53)$

Оскільки вираз e^{-nt} є експоненціальною функцією, яка монотонно зменшується до нуля, то матеріальна точка під час коливань поступово наблизатиметься до стану рівноваги, де $x = 0$.

Наближений графік аперіодичного руху наведений на рис. 3.14. Крива 1 відповідає початковій швидкості $v_{x0} > 0$, крива 2 – $v_{x0} < 0$.

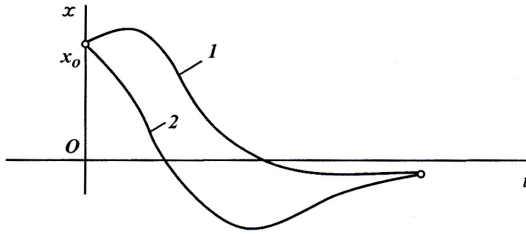


Рис 3.14

Якщо опір малий порівняно з поновлювальною силою $k > n$, то корені характеристичного рівняння (3.50) комплексні:

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.54)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.49) має вигляд:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.55)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо із початкових умов. Оскільки сталі інтегрування дві, то потрібне друге рівняння, яке знайдемо як похідну за часом від виразу (3.55):

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ & + e^{-nt} \left(-C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Підставимо початкові умови: $x(t_0) = x_0$ і $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0$, якщо $t_0 = 0$, в рівняння (3.55) і (3.56) і визначимо сталі інтегрування:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (3.57)$$

Підставивши значення C_1 і C_2 у рівняння (3.55), остаточно отримаємо **закон згасаючих коливань**:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.58)$$

Переміщенню x у виразі (3.58) можна надати іншого вигляду,

якщо ввести підстановки і зробити перетворення

$$x_0 = B \sin \beta; \quad \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = B \cos \beta, \quad (3.59)$$

$$\text{тоді } x = e^{-nt} \left(B \sin \beta \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \cos \beta \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right);$$

$$\text{або} \quad x = B e^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta \right). \quad (3.60)$$

Величини B і β визначаються з рівнянь (3.59). Обидва рівняння треба піднести до квадрата і додати:

$$x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2} = B^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta); \Rightarrow B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \quad (3.61)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (3.59), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}. \quad (3.62)$$

Рух точки, що відповідає рівнянню (3.60), має коливальний характер, тому що координата x періодично змінює свій знак завдяки синусу. Коливання, що відбуваються за цим законом, називаються **згасаючими коливаннями**. Амплітуда $B e^{-nt}$ завдяки множнику e^{-nt} з плином часу зменшується, наближаючись до нуля.

Оскільки $-1 \leq \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) \leq 1$, то координати x згасаючих коливань розміщуються між двома симетричними відносно осі абсцис кривими, що відповідають рівнянню $x = \pm B e^{-nt}$, і називаються **амплітудними кривими**. Між ними розміщується графік згасаючих коливань, показаний на рис. 3.15.

Проміжок часу T , який дорівнює періоду функції $\sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta)$, називають **періодом згасаючих коливань**:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (3.63)$$

де $\sqrt{k^2 - n^2}$ – *колова частота* згасаючих коливань;
 β – *початкова фаза* коливань.

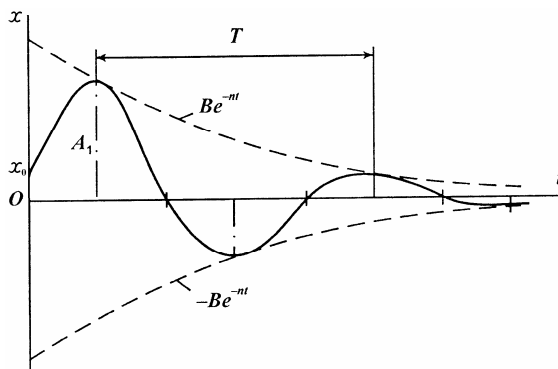


Рис. 3.15

Для характеристики процесу згасання вводять поняття *декременту згасаючих коливань* як відношення однієї з амплітуд до попередньої. Декремент коливань є знаменником геометричної прогресії, константою коливального процесу:

$$q = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Be^{-n\left(\tau + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-n\tau}} = e^{-\frac{nT}{2}}; \Rightarrow q^{-1} = e^{\frac{nT}{2}}. \quad (3.64)$$

Логарифмічний декремент згасаючих коливань є модулем натурального логарифма:

$$\ln|q^{-1}| = \frac{nT}{2}. \quad (3.65)$$

Приклад 3.9

Для визначення опору води під час руху на дуже малих швидкостях модель судна опустили в посудину, прив'язавши до неї ніс і корму за допомогою двох однакових пружин A і B , сили пружності яких пропорційні деформаціям пружин (рис. 3.16).

Результати спостережень показали, що відхилення моделі від положення рівноваги після кожного розмаху коливань зменшується, складаючи геометричну прогресію, знаменник якої

дорівнює 0,9, а тривалість кожного розмаху дорівнює 0,5 с.

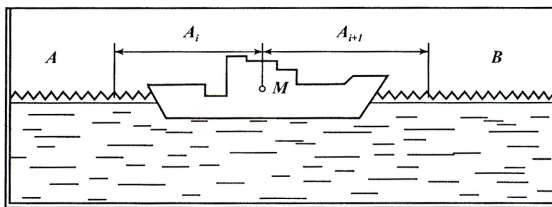


Рис. 3.16

Визначити силу опору води, яка припадає на одиницю маси моделі, якщо швидкість моделі дорівнює 1 м/с . Вважати, що опір води пропорційний першому ступеню швидкості.

Отже, задано: відношення амплітуд $\frac{A_{i+1}}{A_i} = 0,9$, період коливань $T = 1\text{ с}$, опір води $R = \mu v$, де μ – коефіцієнт пропорційності, $v = 1\text{ м/с}$.

Визначити відношення сили опору води до маси моделі R/m .

Розв'язання

Амплітуда згасаючих коливань визначається за формулою:

$$A = Be^{-nt}, \text{ де } n = \frac{\mu}{2m}. \quad A_i = Be^{-nt_i}, \quad A_{i+1} = Be^{-n\left(t_i + \frac{T}{2}\right)}.$$

Визначимо відношення амплітуд:

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{Be^{-n\left(t_i + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-nt_i}} = e^{-\frac{nT}{2}} = 0,9. \quad (\text{а})$$

З виразу (а) визначимо коефіцієнт згасання n :

$$-\frac{nT}{2} = \ln \frac{9}{10}; \Rightarrow \frac{nT}{2} = \ln \frac{10}{9}; \Rightarrow n = \frac{2}{T} \ln \frac{10}{9}, \quad n = \frac{\mu}{2m}. \quad (\text{б})$$

З виразу (б) визначимо коефіцієнт пропорційності сили опору:

$$\frac{\mu}{2m} = \frac{2}{T} \ln \frac{10}{9} \Rightarrow \mu = \frac{4m}{T} \ln \frac{10}{9}.$$

Сила опору дорівнює

$$R = \mu v = \frac{4mv}{T} \ln \frac{10}{9}. \quad (\text{в})$$

З виразу (в) визначимо питому силу опору води, яка припадає на одиницю маси

$$\frac{R}{m} = \frac{4v}{T} \ln \frac{10}{9} = \frac{4 \cdot 1}{1} \cdot 0,1044 = 0,42 \frac{H}{кг}.$$

Відповідь:

$$\frac{R}{m} = 0,42 \left(\frac{H}{кг} \right).$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фаза коливань, колова частота, період коливань?
2. Як визначається колова частота вільних коливань, від яких параметрів вона залежить?
3. Напишіть закон вільних коливань.
4. Що таке аперіодичні коливання?
5. Чому дорівнює частота згасаючих коливань?
6. За якою функцією зменшуються амплітуди згасаючих коливань?
7. Що таке декремент згасаючих коливань, логарифмічний декремент?
8. Який вигляд мають диференціальні рівняння вільних і згасаючих коливань?
9. Від яких факторів залежить циклічна частота і період вільних коливань?
10. Від яких факторів залежить амплітуда і початкова фаза вільних коливань?

Змушені коливання матеріальної точки без урахування опору

На матеріальну точку (рис. 3.17), крім поновлювальної сили $F = -cx$ (рівнодійна сили ваги і статичної складової сили пружності), може діяти сила, яка періодично змінюється і називається *збурювальною силою*. Проекція сили збігається з напрямком руху і змушує матеріальну точку до коливань:

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),$$

де Q_0 – амплітудне значення збурювальної сили, Н;

p – колова частота збурювальної сили, рад/с;

$pt + \delta$ – фаза збурювальної сили, рад; δ – початкова фаза.

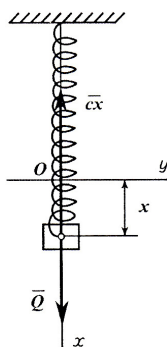


Рис. 3.17

Сила Q є збурювальною гармонічною силою. *Коливання, які виникають під дією збурювальної сили, називаються змушеними.*

Запишемо диференціальне рівняння зазначеного руху точки згідно з розрахунковою схемою (рис. 3.17):

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta), \quad (3.66)$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{Q_0}{m} \sin(pt + \delta).$$

$$\text{Позначимо: } \left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Тоді *диференціальне рівняння змушених коливань точки без опору* набуває вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.68)$$

Вираз (3.68) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.69)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.68).

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (3.41):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда вільних коливань, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$ (3.43), яка

залежить від початкових умов;

$\alpha = \arctg \frac{x_0 k}{v_0}$ – початкова фаза (3.44).

Частинний розв'язок рівняння (3.68) шукаємо у вигляді:

$$x_2 = C \sin(pt + \delta). \quad (3.70)$$

Для підстановки розв'язку в рівняння (3.68) визначимо похідні від виразу (3.70) за часом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Cp \cos(pt + \delta), \\ \ddot{x}_2 &= -Cp^2 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Підставимо значення виразів (3.70), (3.71) у рівняння (3.68):

$$\begin{aligned}
 -Cp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 C \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta), \\
 C(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta).
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

Порівнюємо коефіцієнти при синусах зліва і справа у виразі (3.72), (вони мають бути однакові) і визначимо динамічну амплітуду C :

$$C(k^2 - p^2) = h_0 \Rightarrow C = \frac{h_0}{k^2 - p^2}. \tag{3.73}$$

Частинний розв'язок отримаємо, підставивши визначену амплітуду C у рівняння (3.70):

$$x_2 = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{3.74}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.68) має вигляд:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{3.75}$$

Другий доданок розв'язку або друга гармоніка в рівнянні (3.75) характеризує змушені коливання, колова частота яких дорівнює коловій частоті збурювальної сили.

Амплітуда змушених коливань може бути представлена:

$$C = \frac{h_0}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0 m}{mc}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0}{c}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm}}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \tag{3.76}$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$ – деформація пружного елемента під дією амплітудного значення сили Q_0 , яка прикладається статично.

Визначимо відношення динамічної амплітуди до статичної.

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ якщо } p < k \text{ (низькочастотні коливання)}, \tag{3.77}$$

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}, \text{ якщо } p > k \text{ (високочастотні коливання)}, (3.78)$$

де η – коефіцієнт динамічності.

Коефіцієнт динамічності η констатує, у скільки разів амплітуда змушених коливань C більша, ніж статична деформація пружного елемента λ_{cm} під дією амплітудного значення Q_0 збурювальної сили.

Графік залежності коефіцієнта динамічності від співвідношення частот збурювальної сили і вільних коливань показаний на рис. 3.18.

Якщо $p = k \Rightarrow \frac{p}{k} = 1$, як можна побачити з рис. 3.18, коефіцієнт динамічності необмежено зростає (крива 1), що видно і з виразу (3.77). Тут має місце, так званий, механічний резонанс, за якого амплітуди змушених коливань теоретично необмежено зростають.

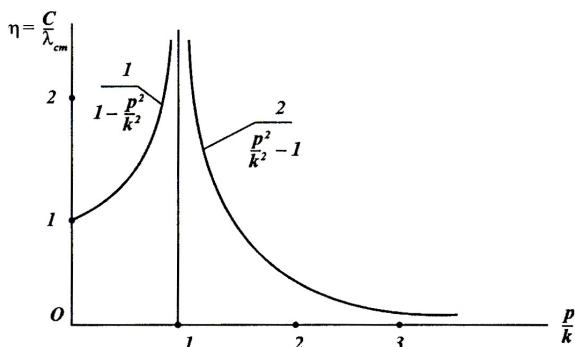


Рис. 3.18

У зарезонансному режимі, коли $p > k$ згідно з виразом (3.78), крива 2 коефіцієнта динамічності знижується асимптотично із нескінченності до координатної осі $\frac{p}{k}$.

Явище механічного резонансу

Характер коливань різко змінюється, якщо колова частота збурювальної сили збігається з коловою частотою вільних коливань.

У механіці це явище називають механічним резонансом. Амплітуди змушених коливань з плином часу необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Запишемо диференціальне рівняння резонансних коливань, замінюючи в правій частині виразу (3.68) p на k , оскільки вони збігаються у цих обставинах:

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(kt + \delta). \quad (3.79)$$

Розв'язок однорідного рівняння (без правої частини) не відрізняється від розв'язку для вільних коливань (3.41):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha).$$

Частинний розв'язок рівняння (3.79) x_2 шукаємо у формі, яка є лінійно незалежною від x_1 :

$$x_2 = Ct \cos(kt + \delta). \quad (3.80)$$

Для підстановки частинного розв'язку в диференціальне рівняння резонансних коливань знайдемо другу похідну за часом:

$$\ddot{x}_2 = -Ck \sin(kt + \delta) - Ck \sin(kt + \delta) + Ck^2 t \cos(kt + \delta).$$

Підставимо \ddot{x}_2 і x_2 у диференціальне рівняння і після скорочень маємо:

$$-2Ck \sin(kt + \delta) = h_0 \sin(kt + \delta) \Rightarrow C = -\frac{h_0}{2k}.$$

Загальний розв'язок, що характеризує закон руху точки під час резонансу:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(kt + \alpha) - \frac{h_0}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (3.81)$$

Перетворимо вираз загального розв'язку, переходячи у другому доданку до синуса з відповідним зсувом фази:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{2k} t \sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \quad (3.82)$$

Аналіз закону свідчить, що рух точки за виразом (3.82) – це накладання вільних і змушених коливань. Перша гармоніка у формулі резонансних коливань характеризує вільні коливання, друга – змушені коливання, амплітуда яких дорівнює $\frac{h_0}{2k} t$. Остання зростає пропорційно часу і за $t \rightarrow \infty$ необмежено збільшується. Графік змінення *амплітуди змушених коливань* показано на рис. 3.19, де амплітудні прями (пунктирні лінії із початку координат) відповідають рівнянням $x = \pm \frac{h_0}{2k} t$.

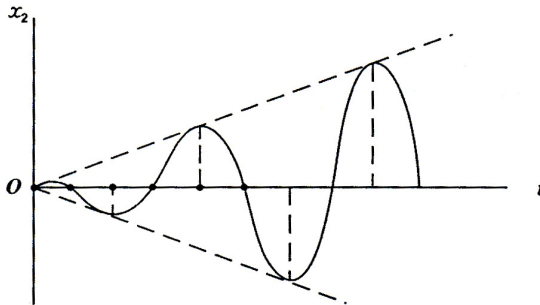


Рис. 3.19

Крім того, із загального розв'язку можна побачити, що під час резонансу фаза коливань синуса відстає на величину кута $\frac{\pi}{2}$ порівняно з фазою коливань збудовувальної сили Q .

У реальних конструкціях через різного роду тертя і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань зростає повільніше, ніж за

теоретичною моделлю, але, незаперечно, вона може досягати небезпечних величин.

Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя

Розглянемо коливання точки (рис. 3.20), на яку діють такі задані сили:

$$F = -cx - \text{поновлювальна сила,}$$

$$\bar{R} = -\mu\bar{v} - \text{сила опору, пропорційна швидкості,}$$

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta) - \text{збурювальна гармонічна сила.}$$

Проекція сили опору на координатну вісь $R_x = -\mu \dot{x}$.

За таких умов диференціальне рівняння коливального руху точки:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.83)$$

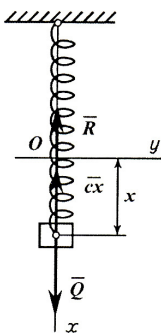


Рис. 3.20

Поділимо рівняння (3.83) на масу точки і введемо позначення:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{Q_0}{m}\sin(pt + \delta); \quad (3.84)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2; \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \\ \frac{\mu}{m} = 2n; \quad n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

З урахуванням виразу (3.85) вихідне диференціальне рівняння точки набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.86)$$

Вираз (3.86) є диференціальним рівнянням змушених коливань точки за наявності сил опору. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається із двох доданків:

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.87)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Якщо $k > n$, розв'язок x_1 набуває вигляду:

$$x_1 = Be^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta); \quad (3.88)$$

де

$$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}.$$

Але гармоніка x_1 досить швидко згасає, нею, як правило, нехтують. Доданок x_2 – це частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.86).

Розв'язок x_2 шукаємо у вигляді:

$$x_2 = D \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.89)$$

Для підстановки x_2 у рівняння (3.86) знайдемо похідні за часом:

$$\dot{x}_2 = Dp \cos(pt + \delta - \gamma), \quad (3.90)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.91)$$

Значення виразів (3.89), (3.90) і (3.91) підставимо в рівняння (3.86):

$$\begin{aligned} -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma) + 2nDp \cos(pt + \delta - \gamma) + \\ + k^2 D \sin(pt + \delta - \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} h_0 \sin(pt + \delta) = h_0 \sin((pt + \delta - \gamma) + \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta - \gamma) \cos \gamma + \\ + h_0 \cos(pt + \delta - \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз, тоді рівняння (3.92) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (D(k^2 - p^2) - h_0 \cos \gamma) \sin(pt + \delta - \gamma) + \\ + (2nDp - h_0 \sin \gamma) \cos(pt + \delta - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Для того, щоб вираз (3.93) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти за синуса і косинуса були однакові. Звідки:

$$\left. \begin{aligned} D(k^2 - p^2) &= h_0 \cos \gamma, \\ 2nDp &= h_0 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

Якщо друге рівняння системи (3.94) поділити почленно на перше, то отримаємо величину кута γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (3.95)$$

Якщо обидва рівняння (3.94) піднести до квадрата і потім почленно додати, то отримаємо вираз для визначення амплітуди D :

$$D^2 \left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right] = h_0^2, \quad (3.96)$$

звідки

$$D = \frac{h_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (3.97)$$

Якщо зробити перетворення, підставивши значення величин $\frac{h_0}{k^2} = \frac{Q_0 \cdot m}{m \cdot c} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}$, остання величина є деформацією пружного

елемента під дією амплітудного значення сили H , то отримаємо амплітуду змушених коливань точки з опором:

$$D = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}}, \quad (3.98)$$

і тоді змушені коливання відбуватимуться за законом:

$$x = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}} \sin(pt + \delta - \gamma), \quad (3.99)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$; c – коефіцієнт жорсткості пружного елемента,

p – колова частота збурювальної сили, $k^2 = \frac{c}{m}$; m – маса вантажу, k – колова частота вільних коливань, $n = \frac{\mu}{2m}$, μ – коефіцієнт пропорційності у виразі сили опору, n – коефіцієнт згасання, $\frac{n}{k} = h$ – коефіцієнт демпфірування, $\gamma = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}$ – кут зсуву за фазою.

Проведемо аналіз амплітуди змушених коливань (3.98).

1. Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота вільних коливань $p \ll k$, то амплітуда змушених коливань наблизатиметься до статичного значення $D \rightarrow \lambda_{cm}$, тобто, коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елемента.

2. Якщо частота збурювальної сили значно більша, ніж частота вільних коливань $p \gg k$, то амплітуда дорівнюватиме:

$$D \rightarrow \frac{\lambda_{cm}}{\frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm} \cdot k^2}{p^2} = \frac{\frac{Q_0}{c} \cdot \frac{c}{m}}{p^2} = \frac{Q_0}{p^2} = \frac{h_0}{p^2}.$$

З останнього виразу випливає, що величину амплітуди D можна отримати будь-якою малою.

Це важливий випадок для практики.

3. Якщо частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних коливань $p=k$, то амплітуда D може досягати максимальних значень.

Настає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Незначне збільшення коефіцієнта демпфірування різко змінює характер коливального процесу.

На рис. 3.21 показано графік зміння коефіцієнта динамічності η (вісь ординат) у функції відношення частот p/k (вісь абсцис) за різних значень коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Графік називається амплітудно-частотною характеристикою коливальної системи.

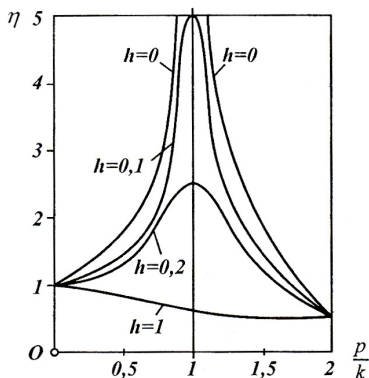


Рис. 3.21

Загальні властивості змушених коливань

1. Амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов.
2. Змушені коливання і за наявності сил опору не згасають.
3. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної

сили і від характеристик системи не залежить.

4. Навіть за великих значень збурювальної сили технічними засобами можна досягти такої оптимальної конструкції, що змушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізнятиметься від частоти вільних (власних) коливань.

5. Навіть за малих значень збурювальної сили можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наближатиметься до частоти вільних коливань (механічний резонанс).

Приклад 3.10

Вантаж масою $m = 0,4 \text{ кг}$ підвішений на пружині, яка здатна розтягнутися на 10 см під дією сили 40 Н (рис.3.22). Верхній кінець пружини здійснює гармонічні коливання вздовж вертикальної прямої за законом $O_1C = b \sin pt$, де амплітуда $b = 0,02 \text{ м}$; колова частота $p = 7 \text{ с}^{-1}$.

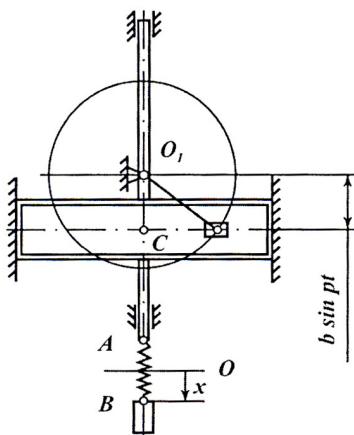


Рис. 3.22

Визначити закон змушених коливань вантажу $x = f(t)$.

Розв'язання

За формулою (3.74) закон змушених коливань має вигляд

$$x = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \text{ У цьому прикладі початкова фаза } \delta = 0.$$

Збурювальна сила, яка діє на кінець пружини

$$Q = c \cdot b \sin pt,$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини:

$$c = \frac{F}{\Delta l} = \frac{40}{10 \cdot 10^{-2}} = 400 \text{ Н/м}.$$

Тоді: $Q = c \cdot b \sin pt = 400 \cdot 0,02 \cdot \sin 7t = 8 \sin 7t \text{ (Н)}.$

$Q_0 = 8 \text{ (Н)}$ – амплітудне значення сили;

$h_0 = \frac{Q_0}{m} = \frac{8}{0,4} = 20 \text{ м/с}^2$ – зведена амплітуда збурювальної сили,

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{400}{0,4} = 1000 \text{ 1/с}^2; p^2 = 7^2 = 49 \text{ 1/с}^2.$$

Змушені коливання відбуваються за законом:

$$x = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{20}{1000 - 49} \sin 7t = 0,02 \sin 7t \text{ (м)}.$$

Відповідь: $x = 0,02 \sin 7t \text{ м}.$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних коливань і змушених коливань без опору?
2. Скільки доданків має закон змушених коливань? Проаналізуйте їх.
3. Що таке коефіцієнт динамічності і як він визначається?
4. Які умови виникнення механічного резонансу і як змінюється амплітуда коливань під час резонансу?
5. Які доданки входять до диференціального рівняння змушених коливань з опором? Зробіть аналіз цих доданків.

3.2. Матеріальна система. Геометрія мас

Механічна *система матеріальних точок* (далі матеріальна система) – це така *сукупність* взаємодіючих матеріальних *точок, положення і рух яких взаємопов'язано* і взаємозумовлено. Класичним прикладом матеріальної системи є сонячна система. Сюди ж можна віднести будь-який механізм, машину, споруду тощо.

Визначимо таку динамічну характеристику матеріальної системи як маса і розглянемо питання про розподіл маси матеріальної системи або твердого тіла як окремого випадку системи, тобто, геометрію мас.

3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи

Допустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок, маси яких $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Положення кожної точки системи відносно фіксованої у просторі точки O визначається її радіусом-вектором $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$.

Маса матеріальної системи дорівнює арифметичній сумі мас окремих точок, які входять до складу системи.

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k . \quad (3.100)$$

Центр мас матеріальної системи визначається відповідно до положення центра ваги тіла.

Центр мас системи (центр інерції) є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k , \quad (3.101)$$

де \vec{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи.

Якщо з центром мас пов'язати прямокутну систему декартових координат x, y, z , то, проєктуючи вираз (3.101) на осі цієї координатної системи, дістанемо координати центра мас матеріальної системи:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k; y_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k; z_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (3.102)$$

де $x_k, y_k, z_k; m_k$ – координати і маси точок матеріальної системи.

В однорідному гравітаційному полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з центром ваги, але між ними є глибокі фізичні відмінності. Поняття центра мас більш широке. Воно дає змогу у деяких випадках звести задачу про рух матеріальної системи до задачі про рух однієї точки – центра мас. Крім того, положення центра мас залежать тільки від розподілу маси і не залежать від вибору системи координат і закону її руху.

Урахування деяких особливостей розподілу мас системи полегшує визначення положення центра мас. Наприклад, якщо матеріальна система має площину симетрії, то центр мас розміщений в цій площині. Якщо система має дві площини симетрії, то центр мас розміщений на лінії перетину цих площин. Якщо система має три площини симетрії, то центр мас перебуває в точці перетину цих площин.

3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)

Положення центра мас системи або тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас за об'ємом. Наприклад, якщо маси точок системи змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не зміниться, але на обертальний рух тіла відносно центра мас це суттєво вплине. Тому в механіці введена ще одна характеристика розподілу мас – момент інерції. Поняття моменту інерції належить до найважливіших понять механіки.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі z називається добуток маси точки на квадрат її відстані r_z до осі:

$$I_z = mr_z^2.$$

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутоків мас точок системи на квадрати їх відстаней до цієї осі.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.103)$$

Момент інерції тіла відносно осі – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла за обертального руху навколо цієї осі. У разі обертання тіла навколо нерухомої точки момент інерції визначається відносно миттєвої осі, яка проходить через цю нерухому точку. Одиницею моменту інерції в Міжнародній системі СІ є $[кг \cdot м^2]$.

Для твердого тіла момент інерції визначається інтегралом, поширеним на всю масу:

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (3.104)$$

Розрізняють моменти інерції *осьові або аксіальні, полярні, відцентрові*.

Покажемо, як визначити осьові і полярний моменти інерції суми точкових мас тіла відносно осей координат і початку координат (рис. 3.23).

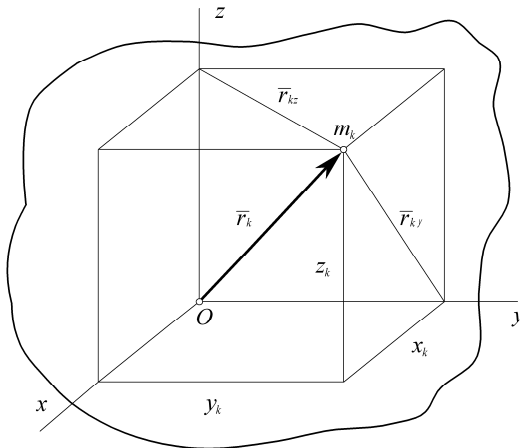


Рис. 3.23

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції тіла можна обчислювати за формулами:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \\
 I_y &= \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\
 I_x &= \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2).
 \end{aligned}
 \tag{3.105}$$

де r_k – радіус-вектор k -ї точки (рис 3.23), який визначається:

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

Додамо три осьові моменти інерції:

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2\sum m_k r_k^2 = 2I_0.$$

Отже, сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції I_0 , який визначається, як сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до полюса O .

$$I_0 = \sum m_k r_k^2, \tag{3.106}$$

Осьові і полярні моменти інерції тіл і систем є додатними величинами.

3.2.3. Радіус інерції тіла

Для обчислення моментів інерції користуються у деяких випадках поняттям радіуса інерції.

Радіусом інерції називають таку відстань від осі, на якій треба розмістити масу тіла, щоб добуток квадрату цієї відстані на масу визначав осьовий момент інерції тіла.

$$I_z = m \cdot \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \tag{3.107}$$

де m – маса тіла.

Геометрично радіус інерції тіла відносно певної осі можна інтерпретувати як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра з рівномірно розподіленою масою на бічній поверхні, момент інерції якого дорівнює моменту інерції тіла відносно цієї осі.

3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей

Допустимо, що відомо положення центра мас тіла C , з яким пов'язана центральна прямокутна система декартових координат $Sxyz$ (рис. 3.24).

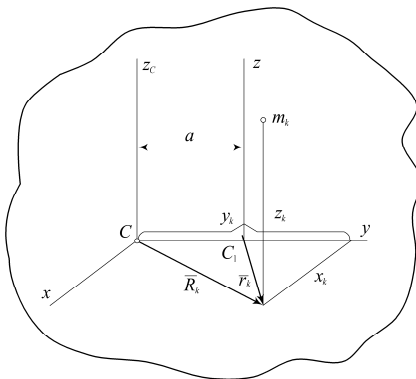


Рис. 3.24

Визначимо, чому дорівнює момент інерції тіла I_z відносно осі z , яка паралельна заданій центральній осі z_c і розміщена на відстані a від неї.

Сформулюємо теорему Гюйгенса – Штейнера.

Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно центральної паралельної осі і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Для доведення розглянемо довільну точку m_k з координатами x_k, y_k, z_k відносно центральної прямокутної системи декартових координат $Sxyz$. Відстані точки до вертикальних паралельних осей z_c і z дорівнюють відповідно R_k і r'_k .

Визначимо шуканий момент інерції тіла відносно паралельної осі z як суму добутоків мас на квадрати їх відстаней до цієї осі:

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k [(y_k - a)^2 + x_k^2] = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) + a^2 \sum m_k - 2a \sum m_k y_k.$$

Проаналізуємо доданки цієї формули.

$$\sum m_k (y_k^2 + x_k^2) = \sum m_k R_k^2 = I_{z_c} - \text{момент інерції тіла відносно осі } z_c.$$

$$\sum m_k = m - \text{маса тіла,}$$

$$\sum m_k y_k = m \cdot y_c = 0, \text{ оскільки координата центра мас відносно}$$

центральної осі дорівнює нулю $y_c = 0$. Звідки остаточно

$$I_z = I_{z_c} + m \cdot a^2. \quad (3.108)$$

Із аналізу виразу (3.108) видно, що центральна вісь z_c є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

1. Однорідний тонкий стрижень масою m обертається навколо осі z , яка проходить через кінець стрижня (рис. 3.25).

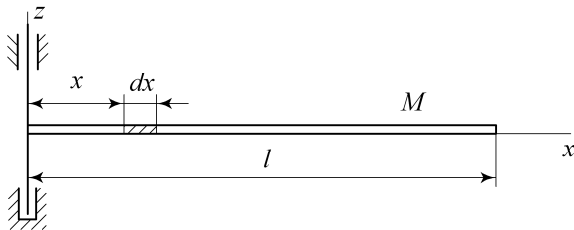


Рис. 3.25

Визначимо момент інерції стрижня як суцільного тіла:

$$I_z = \int dm \cdot r^2, \quad r = x;$$

$dm = \mu \cdot dx$ – елементарна маса тонкого стрижня (лінії),

де $\mu = \frac{m}{l}$ – маса одиниці довжини стрижня. Тоді осьовий момент інерції стрижня

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \frac{\mu x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{m \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (3.109)$$

а) Однорідний стрижень обертається відносно центральної осі z_c (рис. 3.26).

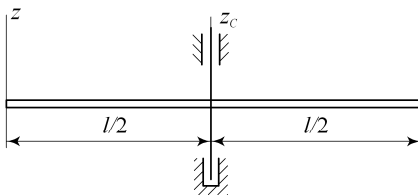


Рис. 3.26

Згідно з теоремою Гюйгенса–Штейнера $I_z = I_{z_c} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$, звідки

$$I_{z_c} = I_z - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}. \quad (3.110)$$

2. Однорідне тонке кільце радіуса R або тонка циліндрична труба, маховик. Вісь z перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розміщені на однаковій відстані R від осі z , тому момент інерції кільця дорівнює $I_z = mR^2$.

Для двох інших взаємно перпендикулярних осей x і y момент інерції вдвічі менше.

3. Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R (рис. 3.27).

Визначимо одиничну масу площі круга $\mu = \frac{m}{\pi R^2}$, тоді елементарна маса пластини $dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr$.

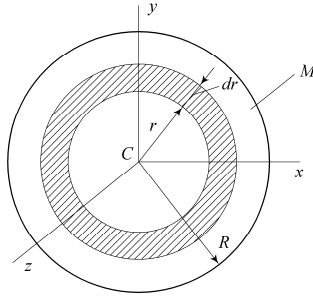


Рис. 3.27

Визначимо момент інерції тіла відносно осі z :

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\pi R^4}{2} = \frac{m\pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2; \quad (3.111)$$

для двох інших осей: $I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2$.

4. Прямий коловий однорідний конус масою m і радіусом основи R :

$$I_z = 0.3mR^2,$$

де z – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

5. Однорідна куля радіуса R . $I_z = I_x = I_y = 0.4mR^2$.

3.2.6. Відцентрові моменти інерції

Осьові моменти інерції не повністю характеризують розподіл маси за об'ємом тіла або системи. Для характеристики асиметричного розподілу мас у механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{xz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{yz} = \sum m_k x_k z_k. \quad (3.112)$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом:

$$I_{xy} = \int_{(m)} dm \cdot x \cdot y.$$

Відцентровий момент інерції дорівнює сумі добутків мас точок на їх відстані до двох координатних осей.

Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент у цій точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає точку

Знайдемо залежність між моментами інерції матеріальної системи (тіла) відносно довільної осі, що перетинає точку, і моментами інерції відносно координатних осей

Допустимо, що напрям довільної осі N заданий кутами α, β, γ з відповідними осями координат x, y, z (рис. 3.28).

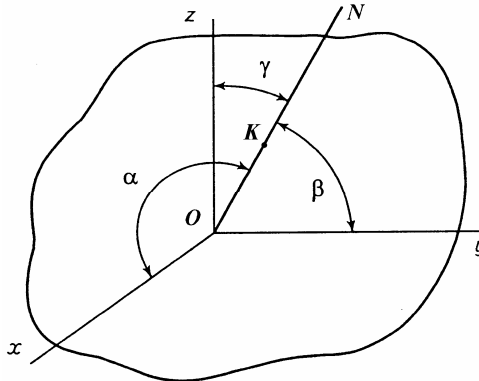


Рис. 3.28

Відомі також осьові і відцентрові моменти інерції тіла $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$.

Тоді залежність між моментом інерції тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі ON , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz має такий вигляд [1]:

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (3.113)$$

Візьмемо на осі ON точку K , таку, що $OK = d = \frac{1}{\sqrt{I_N}}$.

Помножимо обидві частини виразу (3.113) на d^2 і, взявши до уваги, що координати x, y, z точки K задовольняють рівностям:

$$x = d \cos \alpha; \quad y = d \cos \beta; \quad z = d \cos \gamma;$$

дістанемо рівняння поверхні другого порядку:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz = 1, \quad (3.114)$$

на якій рухається точка K , кінець відрізка OK , навколо нерухомого центра O початку координат, окреслюючи згадану поверхню, якщо змінюється напрям осі ON . Указана множина точок (3.114) є поверхнею еліпсоїда, який називається *еліпсоїдом інерції*. Осі симетрії еліпсоїда називаються *головними осями інерції* для тієї точки тіла, в якій побудовано еліпсоїд.

Якщо взяти іншу точку тіла, то напрями головних осей змінюються. А якщо осі координат збігаються з осями симетрії еліпсоїда, то рівняння поверхні (3.114) набуває канонічної форми:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

тобто, *відцентрові моменти інерції тіла відносно головних осей інерції дорівнюють нулю*.

Як наслідок, за відомому еліпсоїді інерції можна визначити момент інерції відносно будь-якої осі, що проходить крізь точку O . А якщо відомі головні осі інерції, то спрощуються рівняння руху твердого тіла, як це видно на прикладі спрощення формули (3.113) для моменту інерції відносно осі:

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то вісь, перпендикулярна до цієї площини, є головною віссю інерції для точки перетину її з площиною.

Якщо однорідне тіло має вісь симетрії Oz , то в тілі завжди знайдуться точки із симетричними координатами за один і другий бік від осі:

$$\begin{cases} x_k; & y_k; & z_k; \\ -x_k; & -y_k; & z_k. \end{cases}$$

Асиметрія відносно осі Oz в цих обставинах відсутня і відцентрові моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію, дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь Oz , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, називається **головною віссю інерції** тіла.

Таким чином, якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції тіла дорівнюють нулю, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції цього тіла для точки O початку координат.

Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції називаються головними моментами інерції.

Через довільну точку будь-якого однорідного тіла завжди можна провести хоча б одну систему трьох взаємно перпендикулярних осей, які будуть осями симетрії і для яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається **центральною віссю**.

Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є **головною центральною віссю інерції**.

Момент інерції тіла відносно головної центральної осі інерції називається **головним центральним моментом інерції**.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які моменти інерції тіла вам відомі?
2. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
3. Що таке радіус інерції тіла?
4. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера для паралельних осей.
5. Як обчислити моменти інерції стрижня, суцільного і порожнистого циліндра, кулі, конуса?
6. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
7. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
8. Які осі в тілі є головними центральними осями інерції?
9. Що таке еліпсоїд інерції і яка його формула?
10. Чи змінюється положення головних осей інерції тіла за переходу від однієї точки тіла до іншої?

3.3. Рух центра мас матеріальної системи

3.3.1. Класифікація сил та їх властивості

Сили, що прикладені до точок матеріальної системи, виконують дві суттєво різні функції, а тому поділяються на дві категорії: а) *сили внутрішні* і *зовнішні*; б) *сили активні* і *сили реакції в'язей*.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. Внутрішні сили позначаються \bar{F}_k^{in} . Вони мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як

дія і протидія ($\bar{F}_1^{in} = -\bar{F}_2^{in}$);

– векторна сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0; \quad (3.115)$$

– векторна сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільної осі дорівнюють нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^{in}) = 0. \quad (3.116)$$

Указані властивості внутрішніх сил (3.115), (3.116) отримані на основі третього закону механіки про дію і протидію. Але ці умови рівноваги можна розглядати як достатні, якщо внутрішні сили прикладені до абсолютно твердого тіла.

Зовнішні сили – це сили взаємодії між матеріальними точками системи і фізичними тілами, які не належать до цієї матеріальної системи.

Зовнішні сили позначаються \bar{F}_k^e . Розглянута класифікація сил застосовується, зазвичай, для вільної матеріальної системи.

Активні сили називають ще заданими силами. **Реакції в'язей** – це сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок. Сили реакцій є невідомими і залежать від закону руху системи. Ця класифікація застосовується для невільної матеріальної системи, а реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей. За допомогою цієї аксіоми невільна матеріальна система перетворюється у вільну. Слід наголосити, що така класифікація сил є відносною. Розглянутим у статичці методом перерізів внутрішню силу можна перетворити у зовнішню. А внутрішня сила двигуна автомобіля стає рушійною, провокуючи появу зовнішньої сили тертя між ведучими колесами і дорогою.

3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи

Розглянемо вільну матеріальну систему, яка складається із n матеріальних точок з масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; положення кожної точки системи відносно якого-небудь центра визначається її радіусом-вектором $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$; до кожної точки системи прикладено, відповідно, рівнодійна внутрішніх сил $\vec{F}_1^{in}, \vec{F}_2^{in}, \vec{F}_3^{in}, \dots, \vec{F}_n^{in}$ і рівнодійна зовнішніх сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \vec{F}_3^e, \dots, \vec{F}_n^e$.

Для кожної точки матеріальної системи можна скласти диференціальне рівняння:

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{in} + \vec{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.117)$$

Система n рівнянь (3.117) і є *системою диференціальних рівнянь руху матеріальної системи у векторній формі*.

У проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z системи (3.117) відповідають $3n$ наступних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^{in} + F_{kx}^e, \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^{in} + F_{ky}^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^{in} + F_{kz}^e. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Рівності (3.118) є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, за інтегруванням якої отримаємо $6n$ довільних сталих, які треба визначати з початкових умов руху. Математичні складності пов'язані і з деякими іншими обставинами. Подолати ці обставини допомагають загальні теорети динаміки, які починаємо розглядати.

3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Про характер руху матеріальної системи іноді можна мати уяву, спостерігаючи за рухом центра мас матеріальної системи.

Приміром, важливо дослідити, чи є прямолінійною траєкторія руху центра мас такої сільськогосподарської машини як культиватор, щоб зробити висновок, яку ширину захисної зони можна взяти під час обробітку міжрядь просапних культур і не допустити їх пошкодження, а також у підсумку дослідження запропонувати заходи, які б дозволили удосконалити характеристики руху машин у цьому технологічному процесі.

Розглянемо теорему про рух центра мас системи. Для матеріальної системи із n матеріальних точок запишемо диференціальні рівняння у формі (3.117) і підсумуємо їх за всіма точками системи:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.119)$$

Згідно з наведеними властивостями внутрішніх сил (3.115), перший доданок у правій частині рівняння (3.119) зникає:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.120)$$

Із виразу (3.101) можна записати:

$$m \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (3.121)$$

Візьмемо двічі похідну за часом від лівої і правої частин виразу (3.121):

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}. \quad (3.122)$$

З отриманого виразу (3.122) випливає, що його права частина збігається з лівою частиною виразу (3.120), тому:

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.123)$$

На підставі аналізу математичного виразу (3.123) сформулюємо теорему про рух центра мас матеріальної системи.

Добуток маси матеріальної системи, зведеної до центра мас, на прискорення її центра мас дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на цю матеріальну систему.

Можна надати інше, ніби фізичне формулювання закону.

Центр мас матеріальної системи рухається як вільна матеріальна точка, в якій зосереджена маса всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Рівнянню (3.123) відповідають три рівняння у проєкціях на декартові осі координат:

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e; \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e; \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \quad (3.124)$$

З теореми випливає, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, внутрішні сили не змінюють положення і швидкості центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас, але через зовнішні сили.

Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух центра мас автомобіля лише через сили тертя коліс із дорогою, а якщо тертя мале (лід), то рух може і не відбутися (машина буксує).

Зазначимо, що пари сил, прикладені до системи, не можуть змінити характер руху центра мас, оскільки головний вектор пар сил дорівнює нулю.

Пари сил можуть спричинити обертання системи навколо центра мас.

3.3.4. Закон збереження руху центра мас

У деяких випадках головний вектор зовнішніх сил може дорівнювати нулю, а тому із виразу (3.123):

$$\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = 0.$$

Звідси швидкість центра мас є сталою величиною:

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \text{const}.$$

На цій основі сформулюємо закон збереження руху центра мас матеріальної системи.

Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває у спокої.

Може статися, що проекція головного вектора зовнішніх сил лише на одну вісь, наприклад, вісь x дорівнює нулю.

Тоді за виразом (3.124):

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \Rightarrow \frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = \text{const}.$$

Якщо одна із проєкцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проєкція швидкості центра мас на цю вісь зберігає свою величину.

Цей висновок впливає безпосередньо з рівнянь (3.124). Крім того, необхідно зазначити, що коли швидкість центра мас або проєкція швидкості на вісь на початку руху дорівнювала нулю, то за законом зберігається незмінним положення центра мас (радіус-вектор або координата):

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = \text{const}; v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow x_c = \text{const}.$$

У цьому випадку закон збереження руху центра мас дозволяє за переміщенням однієї частини системи знайти переміщення другої її частини.

Нехай задані маси точок системи m_1, m_2, \dots, m_n та їх початкові координати $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ під дією внутрішніх сил отримали

переміщення $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, які змінили координати точок:

$$x_{10} + \Delta x_1; \quad x_{20} + \Delta x_2; \quad \dots; \quad x_{n0} + \Delta x_n.$$

Координата центра мас на початку:

$$x_{c0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + \dots + m_n x_{n0}}{m}, \quad (\text{a})$$

де m – маса всієї матеріальної системи.

Координата центра мас у кінцевому положенні:

$$x_{c1} = \frac{m_1(x_{10} + \Delta x_1) + m_2(x_{20} + \Delta x_2) + \dots + m_n(x_{n0} + \Delta x_n)}{m} \quad (\text{б})$$

Але за законом про збереження положення центра мас його координата зберігається, оскільки сума проєкцій сил на горизонталь дорівнює нулю (сила ваги мас вертикальна) $x_c = \text{const}; \Rightarrow x_{c0} = x_{c1}$.

Порівнюємо і праві частини виразів (а) і (б), звідки після скорочення матимемо:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = 0, \quad (3.125)$$

або
$$G_1 \Delta x_1 + G_2 \Delta x_2 + \dots + G_n \Delta x_n = 0, \quad (3.126)$$

де $G_k = g \cdot m_k$ – вага k -ї точки системи.

Рівняння (3.125) і (3.126) використовують під час розв'язання задач про рух системи під дією зрівноваженої системи сил або внутрішніх сил.

Приклад 3.11

Кузов автомобіля вагою \bar{P} здійснює на ресорах вертикальні гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T навколо центра мас точки C як положення рівноваги (рис. 3.29). *Визначити величину реакцій ресор.*

Розв'язання

На рис. 3.29 позначено:

C – центр мас кузова, де прикладена сила ваги;

y_c – поточне зміщення центра мас уздовж вертикалі;
 \bar{N} – шукана реакція ресори (кузов має дві ресори).

Закон гармонічних коливань кузова такий (за умовою):

$$y_c = A \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (\text{а})$$

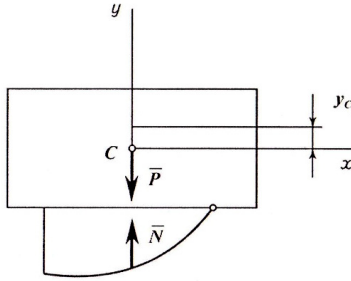


Рис. 3.29

Запишемо теорему про рух центра мас у проекції на вісь y :

$$m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = 2N - P. \quad (\text{б})$$

Для визначення реакції N необхідно підставити в ліву частину виразу (б) значення прискорення $a_{cy} = \frac{d^2 y_c}{dt^2}$, яке визначимо, взявши двічі похідну за часом від виразу (а):

$$\frac{dy_c}{dt} = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow \frac{d^2 y_c}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (\text{с})$$

Підставимо закон зміни прискорення (с) у вираз (б), враховуючи масу кузова $m = \frac{P}{g}$.

$$-\frac{P}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi}{T} t = 2N - P; \Rightarrow N = \frac{P}{2} - \frac{P}{g} \cdot \frac{2\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Приймаючи, що максимальне і мінімальне значення функції синуса дорівнює плюс або мінус одиниці, отримуємо відповідь:

$$N_{\max} = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{4\pi^2}{gT^2} A \right); \quad N_{\min} = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{4\pi^2}{gT^2} A \right).$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
2. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної системи у векторній і координатній формах.
4. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас матеріальної системи.
5. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?
6. Надайте формулювання закону збереження центра мас матеріальної системи.
7. Чи зберігається положення центра мас системи, якщо одне із тіл системи переміщується під дією внутрішніх сил на деяку відстань?
8. Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил матеріальної системи?
9. Порівняйте два формулювання закону руху центра мас матеріальної системи.
10. Наведіть приклад, коли внутрішні сили спонукають до руху?

3.4. Основні теореми динаміки

Вирішення другої основної задачі динаміки матеріальної системи зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху з урахуванням початкових умов. Інтеграли рівнянь руху надають вичерпну інформацію про рух системи.

Проте, загальний розв'язок для матеріальної системи, крім окремих випадків, знайти не вдається.

Задача про два тіла, що рухаються під дією гравітаційних сил, є дуже складною для загального випадку. Класичну задачу про три тіла в загальному вигляді не вирішено.

Для невільної матеріальної системи слід водночас розв'язувати дві задачі: визначення руху системи і визначення реакцій в'язей.

Проте, існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях.

Це задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи або визначенням руху центра мас і основних мір механічного руху системи: головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії.

До ефективних методів розв'язування таких задач належать основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху і мірами дії сил: імпульс сили, робота сили.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

Основні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і матеріальної системи, що значно спрощує розв'язання низки задач динаміки.

Розглянемо послідовно теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і системи, моменту кількості руху, кінетичної енергії.

3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил

До основних мір руху належать кількість руху, момент кількості руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили.

Із диференціальних рівнянь руху випливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – основні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

Цікава дискусія точилася у XVII-XVIII ст. між прихильниками Р.Декарта і Г.Лейбніца про те, яка із мір механічного руху – кількість руху або кінетична енергія (жива сила, як її тоді називали) – визначає динамічні властивості тіл. Дискусія закінчилася безрезультатно. Тільки у XIX ст. вчені дійшли висновку, що обидві міри руху одночасно існують в кожному тілі.

Декартова міра, кількість руху як перша міра руху, характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла у формі самого ж механічного руху. Друга міра руху, кінетична енергія, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватися в еквівалентну кількість потенціальної, теплової та інших видів енергії. Тільки релятивістська механіка (XX ст.) об'єднала ці дві міри руху в одну – тензор енергії (імпульс).

3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи

Однією з найважливіших динамічних характеристик руху матеріальної точки і матеріальної системи є *перша міра механічного руху – кількість руху*.

Кількість руху матеріальної точки є векторною функцією і дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (3.127)$$

Напрямок вектора кількості руху \bar{q} збігається з напрямком

вектора швидкості \bar{v} . Одиницею кількості руху є [кг м/с].

Головний вектор кількостей руху матеріальних точок або кількість руху матеріальної системи є вектором, який дорівнює векторній сумі кількостей руху точок системи:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k. \quad (3.128)$$

Вектор кількості руху системи визначається і через швидкість центра мас. Запишемо вираз (3.101) інакше $m \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$ і візьмемо

похідну за часом від лівої і правої частин $m \frac{d \bar{r}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{r}_k}{dt}$.

Оскільки $\frac{d \bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$, а $\frac{d \bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, то

$$m \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}; \Rightarrow \bar{Q} = m \bar{v}_c. \quad (3.129)$$

Головний вектор кількості руху матеріальної системи дорівнює добутку маси m системи на вектор швидкості її центра мас.

Проекції кількості руху матеріальної системи на осі прямокутної системи декартових координат:

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = m v_{cx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = m v_{cy}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = m v_{cz}. \quad (3.130)$$

Звідси головний вектор кількості руху матеріальної системи і його напрямні косинуси:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2};$$

$$\cos(\hat{Q}, x) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos(\hat{Q}, y) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos(\hat{Q}, z) = \frac{Q_z}{Q}.$$

3.4.3. Імпульс сили

Ефект дії сили залежить не тільки від її величини, а й від тривалості дії. Для характеристики дії сили на тіло за певний

проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили і імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Елементарний імпульс $d\bar{S}$ сили \bar{F} – це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії:

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt. \quad (3.131)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили збігається з напрямком вектора сили. Одиницею імпульсу сили у Міжнародній системі одиниць СІ є $[H \cdot c]$. Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили:

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} d\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (3.132)$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат.

$$S_x = \int_0^{t_1} dS_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} dS_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} dS_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (3.133)$$

Повний імпульс

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

У випадку, якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили:

$$\bar{S} = \bar{F}t. \quad (3.134)$$

3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки у формі:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.135)$$

Перетворимо вираз (3.135):

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot dt. \quad (3.136)$$

Рівність (3.136) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

Диференціал кількості руху матеріальної точки дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів сил, що діють на задану точку.

Інтегруємо почленно ліву і праву частини виразу (3.136) в заданих границях:

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (3.137)$$

Права частина виразу (3.137) є сумою імпульсів сил за кінцевий проміжок часу:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (3.138)$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів сил, які діють на точку за цей самий проміжок часу.

Вираз (3.138) у проєкціях на осі ортогональної системи декартових координат x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}; & mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}; & mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (3.139)$$

Приклад 3.12

Автомобіль масою $m = 1000$ кг рухається вздовж прямої горизонтальної дороги зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с.

Далі протягом 10 с сила тяги двигуна автомобіля збільшується на 150 Н за кожен секунду. Визначити швидкість автомобіля v_1 після десятої секунди розгону.

Розв'язання

Вважаємо рух автомобіля поступальним. Тоді його можна прийняти за матеріальну точку.

На підставі виразу (3.139) запишемо:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx} = S. \quad (\text{а})$$

Оскільки рух за прямою, то можна позбавитись індексів:

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S; \quad \Rightarrow mv_1 - mv_0 = S. \quad (\text{б})$$

Визначимо імпульс сили тяги двигуна за виразом (3.132):

$$F = 150t; \quad S = \int_0^{t_1} F dt;$$
$$S = \int_0^{t_1} 150t dt = 150 \int_0^{10} t dt = 150 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500 \text{ (Нс)}.$$

Із виразу (б)
$$v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12,5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_1 = 12,5 \text{ м/с}$.

3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи

Для матеріальної системи, яка складається з n матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати:

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e, \quad (3.140)$$

де $m\bar{v}_c = \bar{Q}$ – кількість руху матеріальної системи.

Формула (3.140) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему.

Перепишемо вираз (3.140):

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt. \quad (3.141)$$

Інтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (3.141) в границях від Q_0 до Q_1 і від 0 до t_1 :

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (3.142)$$

Зміна вектора кількості руху матеріальної системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Рівність (3.142) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі.

Проектуємо вираз (3.142) на осі x, y, z нерухомої прямокутної інерціальної системи координат і отримуємо скалярні рівняння:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (3.143)$$

3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи

Якщо в процесі руху матеріальної системи імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то із виразу (3.140):

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const}; \quad \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = 0; \Rightarrow \bar{Q}_1 = \bar{Q}_0. \quad (3.144)$$

Якщо імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.

Аналогічно і відносно проекцій головного імпульсу на якусь нерухому вісь координат. Якщо $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{kx}^e = 0$, то $Q_{1x} - Q_{0x} = 0; \Rightarrow Q_{1x} = Q_{0x}$.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
2. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
3. Як визначити імпульс змінної і сталої сил?
4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
5. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
6. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.
7. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?
8. Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?
9. В якій системі координат справджуються закони збереження кількості руху точки і системи?
10. У чому суть дискусії між ученими 17-18 ст. про міри руху?

3.5. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи

3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі

Поняття моменту відносно центра і осі можуть бути застосовані до будь-яких векторів, зокрема, до вектора сили в статиці або до вектора кількості руху матеріальної точки в динаміці.

Моментом кількості руху ($m\bar{v}$) матеріальної точки відносно центра O є вектор \bar{l}_o , який перпендикулярний до площини OAB , яку утворює вектор ($m\bar{v}$) і центр O , і спрямований у той бік,

звідки здається, що вектор $(m\vec{v})$ намагається повернути цю площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.30).

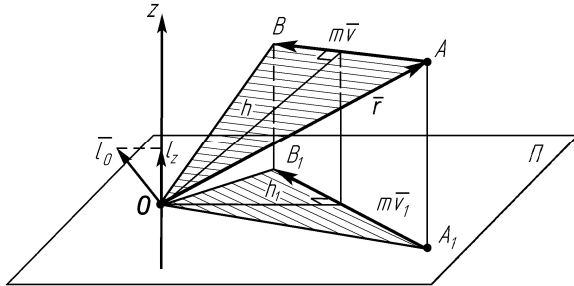


Рис. 3.30

Модуль моменту кількості руху точки відносно центра O дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече h – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на якій розміщений вектор $(m\vec{v})$:

$$l_0 = mv \cdot h = 2S\Delta OAB. \quad (3.145)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра O може бути записаний у вигляді векторного добутку радіуса-вектора \vec{r} рухомої точки A відносно центра O на вектор кількості руху точки

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.146)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z дорівнює моменту проєкції $m\vec{v}_1$ кількості руху точки на площину Π , перпендикулярну осі z , відносно точки O перетину осі із площиною:

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = \pm n_{\Pi} (m\vec{v}) \cdot h_1 = mv_1 \cdot h_1 = 2S\Delta OA_1B_1. \quad (3.147)$$

Момент кількості руху відносно центра як векторний добуток може бути виражений через визначник:

$$\begin{aligned}\bar{l}_0 &= \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(ymv_z - zmv_y) + \bar{j}(zmv_x - xmv_z) + \bar{k}(xmv_y - ymv_x).\end{aligned}$$

Розкладемо вектор \bar{l}_0 за ортами ортогональної системи координат:

$$\bar{l}_0 = \bar{i}l_x + \bar{j}l_y + \bar{k}l_z.$$

Порівнюючи останні два вирази, можна записати:

$$l_x = ymv_z - zmv_y; \quad l_y = zmv_x - xmv_z; \quad l_z = xmv_y - ymv_x,$$

де x, y, z – координати точки A прикладання вектора кількості руху;

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти координатних осей; mv_x, mv_y, mv_z – проекції вектора $m\bar{v}$ на осі координат.

Одиницею моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі координат є $[кг \cdot м^2 / с]$.

3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження

Допустимо, що рух точки M вздовж траєкторії відбувається зі швидкістю \bar{v} і прискоренням \bar{a} під дією сили \bar{P} (рис. 3.31).

Тоді момент кількості руху точки і момент сили \bar{P} відносно центра O дорівнюють відповідно:

$$\bar{l}_0 = \bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \quad \bar{M}_0 = \bar{m}_0(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P},$$

де \bar{r} і $(m\bar{v})$ – змінні вектори;

\bar{r} – радіус-вектор точки M відносно центра O ;

\bar{P} – сила, що прискорює точку.

Візьмемо похідну за часом від вектора моменту кількості руху матеріальної точки:

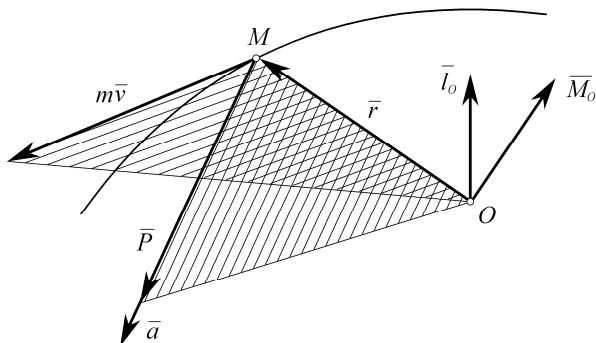


Рис. 3.31

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Але перший доданок $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$, оскільки вектори векторного добутку паралельні. Перетворимо другий доданок:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{P},$$

де \vec{P} – рівнодійна сила, що діє на точку. У підсумку другий доданок:

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{m}_o(\vec{P}) = \vec{M}_o.$$

Остаточно матимемо:

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{m}_o(m\vec{v})) = \vec{m}_o(\vec{P}) = \vec{M}_o \Rightarrow \frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{m}_o(\vec{P}). \quad (3.148)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно довільного центра O дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того самого центра.

Проектуємо вираз (3.148) на осі системи декартових координат:

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(P); \quad \frac{dl_x}{dt} = m_x(P); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(P). \quad (3.149)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої координатної осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно цієї ж осі.

Під час руху матеріальної точки може статися, що права частина рівняння (3.148) дорівнює нулю:

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = const.$$

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно центра залишається незмінним.

Наприклад, під час руху планет сонячної системи під дією центральної сили притягання момент останньої відносно центра Сонця дорівнює нулю. Тому момент кількості руху планет завжди перпендикулярний площині екліптики і є незмінним за модулем.

За аналогією цей закон стосується і моменту кількості руху відносно будь-якої осі (3.149):

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = const.$$

3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі

Розглянутий матеріал про момент кількості матеріальної точки поширимо на систему матеріальних точок, вводячи поняття кінетичного моменту системи.

Кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра O є вектор \bar{L}_o , який дорівнює векторній сумі моментів кількості руху точок системи \bar{l}_{ok} відносно цього самого центра:

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k). \quad (3.150)$$

де \vec{l}_{ok} – момент кількості руху k -ї точки системи;

$m_k \vec{v}_k$ – кількість руху k -ї точки;

\vec{r}_k – радіус-вектор, що з'єднує k -ю точку системи з нерухомим центром.

Кінетичним або головним моментом кількості руху матеріальної системи відносно будь-якої осі Oz є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху точок системи відносно цієї осі:

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_k (m_k \vec{v}_k).$$

3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ (рис. 3.32).

Швидкість елементарного об'єму dm , віддаленого від осі обертання на відстань r становить $v = r\omega$, кількість руху $dQ = vdm = r\omega dm$, а елементарний кінетичний момент відносно осі Oz – $dl_z = rdQ = rvdm = r^2\omega dm$. Для всього тіла кінетичний момент $L_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm$, де інтегрування поширено на всю масу тіла.

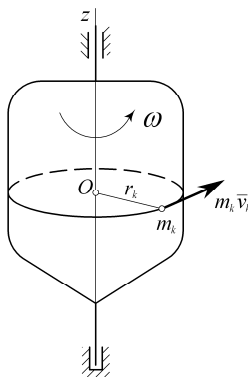


Рис. 3.32

Інтеграл $\int_{(m)} r^2 dm$ залежить лише від характеру розподілу маси в тілі і є моментом інерції тіла відносно осі обертання $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$. З урахуванням цього кінетичний момент тіла відносно осі Oz запишеться:

$$L_z = I_z \omega. \quad (3.151)$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі на кутову швидкість тіла.

3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження

Нехай матеріальна система складається із n матеріальних точок,

де m_1, m_2, \dots, m_n – маси точок матеріальної системи;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – зовнішні сили, прикладені до точок;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – внутрішні сили взаємодії між точками;

$\bar{l}_{10}, \bar{l}_{20}, \dots, \bar{l}_{n0}$ – моменти кількості руху точок відносно центра O .

Для кожної точки застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху (3.148), відокремивши її від системи і прикладаючи моменти внутрішніх сил:

$$\frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_o (\bar{F}_k^{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Підсумуємо цей вираз по всіх точках системи

$$\sum \frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^{in}), \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^{in}),$$

де $\sum \bar{l}_{ok} = \bar{L}_o$ – кінетичний момент системи,

$\sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^{in}) = 0$ – головний вектор внутрішніх сил.

Остаточо:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) = \bar{M}_o \quad (3.152)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту \bar{L}_o матеріальної системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того самого центра.

Проектуємо векторне рівняння (3.152) на осі декартових координат і отримуємо аналітичні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \sum m_z (\bar{F}_k^e) = M_{Oz}; & \frac{dL_x}{dt} &= \sum m_x (\bar{F}_k^e) = M_{Ox}; \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum m_y (\bar{F}_k^e) = M_{Oy} \end{aligned} \quad (3.153)$$

Рівняння (3.152) виражає теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи в диференціальній формі.

Доведемо цю теорему в інтегральній формі, для чого запишемо вираз (3.152) у вигляді $d\bar{L}_o = \bar{M}_o dt$. Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t , одержимо:

$$\bar{L}_o(t) - \bar{L}_o(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{M}_o dt = \bar{L}_o^e, \quad (3.154)$$

де \bar{L}_o^e – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра O .

Вираз (3.154) використовують під час вивчення елементарної теорії удару.

Під час руху матеріальної системи може статися, що сума моментів сил відносно центра дорівнює нулю:

$$\sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) = 0; \Rightarrow \bar{L}_o = \sum \bar{m}_o (m_k \bar{v}_k) = const.$$

Якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає свою величину.

Як випадок, сума моментів сил відносно осі може дорівнювати нулю:

$$\sum m_z(F_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \sum m_z(m_k v_k) = const.$$

З останнього виразу випливає, що для твердого тіла, яке обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω , кінетичний момент теж зберігає своє значення $L_z = I_z \cdot \omega = const$, а це означає, що коли, наприклад, зменшується осьовий момент інерції тіла I_z , то кутова швидкість обов'язково збільшуватиметься, щоб зберегти добуток незмінним:

$$I_{z_1} \cdot \omega_1 = I_{z_2} \cdot \omega_2 = \dots = const.$$

Цей закон природи добре демонструє лава Жуковського, яку розкручують навколо вертикальної осі. І якщо в цей момент людина, яка стоїть на лаві, різко підніме руки в сторони, збільшуючи свій момент інерції навколо вертикальної осі, то кутова швидкість дуже помітно знижується.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте поняття моменту кількості руху матеріальної точки і системи.
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Напишіть математичний вираз теореми.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи. Напишіть математичний вираз теореми.
4. Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки.
6. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи.
7. Наведіть приклади із побуту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.

8. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат.
9. Як визначити головний момент кількості руху матеріальної системи?
10. Що демонструє лава Жуковського?

3.6. Динаміка твердого тіла

3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла

Як і в разі матеріальної точки для твердого тіла розглядають дві основні задачі динаміки: пряма і обернена. Для невільного руху тіла треба визначити і реакції в'язей. Аналізуючи сили, слід зазначити, що внутрішні сили у твердому тілі врівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло є зовнішніми. Крім того, за другою класифікацією сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні сили і реакції в'язей.

У динаміці твердого тіла вибирають нерухому систему координат і дві допоміжних системи: поступальну, осі якої паралельні осям нерухомої системи і яка рухається разом з полюсом, і систему координат, що незмінно зв'язана з тілом.

Положення вільного тіла у просторі визначається шістьма параметрами (наприклад, три координати полюса і три кути Ейлера). Тому для розв'язання згаданих задач динаміки необхідно шість рівнянь, які зв'язують кінематичні параметри із силами, що діють на тверде тіло. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний рух навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла.

За поступального руху тіло перебуває у спокої відносно системи осей, що паралельні осям нерухомої системи координат. Тому для здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент зовнішніх сил відносно центра мас і початкова кутова швидкість дорівнювали нулю.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в

проекціях на осі нерухомої системи координат

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \\ m\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e, \end{cases} \quad (3.155)$$

де m – маса тіла; x_c, y_c, z_c – координати центра мас;

$F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проекції k -ї зовнішньої сили на осі координат.

Рівняння (3.155) дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки поступального руху тіла.

3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла

Невільне тверде тіло (рис. 3.33) під дією прикладених до нього зовнішніх сил $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω , маючи один ступінь вільності.

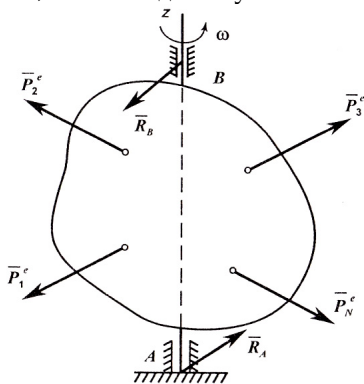


Рис. 3.33

Виведемо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи або твердого тіла відносно осі:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k). \quad (3.156)$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z :

$$L_z = I_z \cdot \omega, \quad (3.157)$$

де I_z – сталий осьовий момент інерції тіла; ω – кутова швидкість.

Візьмемо похідну за часом від виразу (3.157) і підставимо в (3.156):

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.158)$$

Вираз (3.158) є шуканим *диференціальним рівнянням обертального руху тіла відносно нерухомої осі.*

Відомо, що кутове прискорення може бути виражено:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Відповідно до останнього і диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі може бути записане у варіантах:

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.159)$$

Добуток осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно цієї самої осі.

Вивчаючи обертальний рух тіла, за додатний приймають напрям обертання. Тоді моменти рушійних сил, які створюються двигунами і спрямовані у напрямі обертання, мають додатні значення, а моменти сил опору, спрямовані протилежно напрямку обертання – від'ємні.

Таким чином, обертання відбувається за рахунок різниці моментів рушійних сил і моментів сил опору.

Якщо $\sum m_z (\bar{P}_k^e) > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – обертальний рух прискорений,

якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух сповільнений,

якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Приклад 3.13

Колесо масою m і радіусом R обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω_0 . Визначити час гальмування t_1 і кут повороту колеса φ_1 до зупинки, якщо сила тиску, прикладена до колодки, дорівнює T , а коефіцієнт тертя ковзання – f (рис. 3.34).

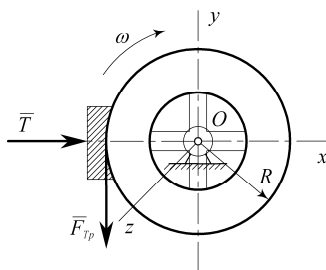


Рис. 3.34

Розв'язання

Запишемо диференціальне рівняння обертального руху колеса (21.2) і підставимо в праву частину момент прикладених сил, який направлений проти напрямку руху (гальмівний момент):

$$I_{oz} \frac{d\omega}{dt} = -F_{mp} \cdot R = -f \cdot T \cdot R \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування:

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t + C_1;$$

Довільну сталу інтегрування шукаємо із початкових умов: якщо $t_0 = 0$, то $\omega = \omega_0$.

Після підстановки в попередній вираз, отримуємо $C_1 = \omega_0$. Остаточо закон зміни кутової швидкості:

$$\omega = \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t. \quad (a)$$

Під час зупинки колеса $\omega = 0$. Із виразу (а) час гальмування:

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}. \quad (б)$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \left(\omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \right) \cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}} t^2 + C_2.$$

Якщо $t_0 = 0$, то $\varphi_0 = 0$, $C_2 = 0$ і остаточно:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}}. \quad (в)$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса $I_{oz} = MR^2$.

Підставимо відповідні значення в рівняння (б), (в) і отримаємо в заданих параметрах час гальмування і кут повороту до зупинки:

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}; \quad \varphi_1 = \frac{fT t_1^2}{2MR}.$$

3.6.3. Фізичний маятник

Фізичним маятником називається тверде тіло, що має нерухому горизонтальну вісь обертання, яка не збігається з центром ваги тіла. Це приклад неврівноваженого тіла. Маятник може обертається навколо горизонтальної осі під дією тільки сили ваги G .

Це тіло має один ступінь вільності, тому його положення визначається одним кутом повороту φ (рис. 3.35).

Диференціальне рівняння обертального руху маятника навколо осі:

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_z (\bar{P}_k^e), \Rightarrow \sum m_z (\bar{P}_k^e) = -G \cdot h = -G \cdot r_c \sin \varphi, \Rightarrow I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -G r_c \sin \varphi,$$

де r_c – відстань від нерухомої осі Oz до центра мас C .

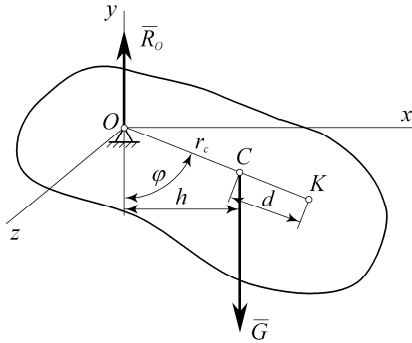


Рис. 3.35

Обмежимося малим кутом відхилення тіла від стану рівноваги для лінеаризації рівняння, коли $\sin \varphi \approx \varphi$.

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Gr_c \cdot \varphi; \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{Gr_c}{I_z} \cdot \varphi. \text{ Позначимо } \frac{G \cdot r_c}{I_z} = k^2,$$

$$\text{тоді} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0; \Rightarrow \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (3.160)$$

Рівняння (3.160) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Характеристичне рівняння і його корені:

$$u^2 + k^2 = 0, \quad u_{1,2} = \pm ki, \quad \text{де } i = \sqrt{-1}.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.160):

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (3.161)$$

Для визначення двох довільних сталих інтегрування за початковими умовами $t = 0$: $\omega_0 = 0$; $\varphi = \varphi_0$, знайдемо друге рівняння як похідну за часом від виразу (3.161):

$$\omega = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt. \quad (3.162)$$

Із виразів (3.161) і (3.162) визначаємо сталі інтегрування:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \varphi_0.$$

Остаточно отримаємо *закон малих коливань* фізичного маятника:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad (3.163)$$

де k – циклічна (колова) частота вільних (власних) коливань.

Період коливань маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G \cdot r_c}}. \quad (3.164)$$

Визначимо зведену довжину фізичного маятника.

Зведеною довжиною фізичного маятника називають довжину такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника.

Періоди коливань математичного і фізичного маятників:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G \cdot r_c}}.$$

Порівняємо періоди і знайдемо зведену довжину фізичного маятника:

$$2\pi \sqrt{\frac{l_{36}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{G \cdot r_c}} \Rightarrow l_{36} = \frac{I_z \cdot g}{G \cdot r_c} = \frac{I_z}{m \cdot r_c}.$$

Застосуємо теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$I_z = I_{zc} + mr_c^2, \\ l_{36} = \frac{I_{zc} + mr_c^2}{mr_c} = r_c + \frac{I_{zc}}{mr_c}; \quad \Rightarrow l_{36} = r_c + d; \quad d = \frac{I_{zc}}{mr_c},$$

де d – відстань між центром мас тіла і точкою K (рис. 3.35).

Точка K називається *центром коливань фізичного маятника*. До неї прикладена рівнодійна сил інерції точок тіла під час його коливання навколо осі.

Центр коливань має *властивість взаємності* з точкою підвішування O : якщо тіло підвісити в точці K , то центром

коливань стає точка O .

Теорія коливань фізичного маятника використовується в техніці для створення експериментальних способів визначення моментів інерції тіл складної геометричної форми. До цих способів входять методи маятникових і крутильних коливань, метод низхідного тягаря тощо.

3.6.4. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса.

Поступальний рух визначається двома координатами полюса, а обертальний – кутом повороту навколо полюса.

Якщо обрати за полюс центр мас тіла C , то поступальна частина руху буде визначатися векторним рівнянням:

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{P}_k^e, \quad (3.165)$$

де \bar{a}_c – прискорення центра мас,

$\sum \bar{P}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням:

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_z (\bar{P}_k^e), \quad (3.166)$$

де I_{zc} – момент інерції відносно центральної осі, що перпендикулярна площині руху,

$\sum m_z (\bar{P}_k^e)$ – головний момент зовнішніх сил.

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}^e, \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}^e, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{P}_k^e) \end{cases} \quad (3.167)$$

Отже, для реалізації плоского руху необхідно, щоб сума проєкцій сил на вісь z і суми моментів зовнішніх сил або головні моменти навколо двох інших осей дорівнювали нулю:

$$\sum \bar{P}_{kz}^e = 0; \quad \sum m_x(\bar{P}_k^e) = 0; \quad \sum m_y(\bar{P}_k^e) = 0.$$

Приклад 3.14

Суцільний однорідний коловий циліндр (рис. 3.36) радіуса R котиться вздовж похилої площини без ковзання. Визначити величину прискорення центра циліндра \bar{a}_c і силу \bar{F} , яка утримує циліндр від проковзування.

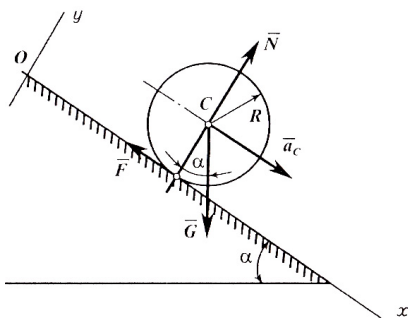


Рис. 3.36

m – маса циліндра; $G = m \cdot g$ – вага циліндра;

R – радіус циліндра; ε – кутове прискорення циліндра.

Розв’язання

Запишемо диференціальні рівняння плоского руху (3.167):

$$\begin{cases} m \cdot a_c = G \sin \alpha - F, & (a) \\ I_{zc} \cdot \varepsilon = F \cdot R. & (б) \end{cases}$$

Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{a_c}{R}$ підставимо в рівняння (б):

$$I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R \Rightarrow F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Тоді рівняння (a) матиме вигляд:

$$m \cdot a_c = mg \sin \alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Для суцільного циліндра:

$$I_{zc} = \frac{mR^2}{2}; \Rightarrow ma_c = mg \sin \alpha - \frac{ma_c}{2}.$$

Відповідь: $a_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha; F = \frac{1}{3}G \sin \alpha.$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?
2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
3. Напишіть формулу і сформулюйте вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
4. У яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
5. Напишіть закон коливань фізичного маятника. Чому дорівнює період коливань?
6. Що таке зведена довжина фізичного маятника і як вона визначається?
7. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?
8. Що таке фізичний маятник і чим він відрізняється від математичного?
9. Як визначити положення центра коливань фізичного маятника?
10. Які методи визначення моменту інерції тіл надає теорія коливань фізичного маятника?

3.7. Робота і потужність сили

3.7.1. Елементарна робота сили

Матеріальна точка M рухається під дією сили \vec{F} вздовж криволінійної траєкторії. Положення точки в довільний момент часу t визначається радіусом-вектором \vec{r} , проведеним із фіксованої точки O початку нерухомої системи відліку (рис. 3.37).

Під час переміщення точки радіус-вектор за нескінченно малий проміжок часу dt отримує приріст $d\vec{r}$ як елементарне переміщення точки.

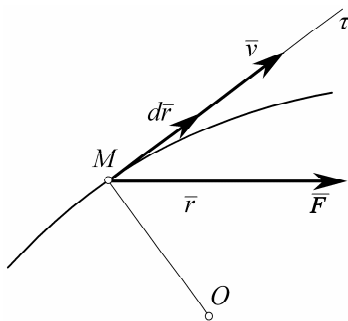


Рис. 3.37

Елементарною роботою сили \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається міра дії сили, рівна скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.168)$$

Вираз (3.168) визначає роботу сили за векторним способом задання руху точки.

За натуральним способом задання руху точки $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$ ($\vec{\tau}$ – орт дотичної до траєкторії в точці M ; ds – диференціал дуги траєкторії). Тоді елементарна робота:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = F ds \cos(\hat{F}, \vec{\tau}). \quad (3.169)$$

Елементарна робота сили за натуральним способом задання руху точки дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладання сили вздовж траєкторії і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Отже, роботу виконує дотична проекція сили:

$$\begin{aligned} F \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) &= F_{\tau}, \\ \delta A &= F_{\tau} \cdot ds. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Якщо кут між векторами сили і швидкості $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) < 90^\circ$, то елементарна робота додатна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 0^\circ$; $\Rightarrow \delta A = F \cdot ds$, то робота максимальна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) > 90^\circ$, то робота від'ємна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 90^\circ$, то робота дорівнює нулю, тобто, сила, перпендикулярна вектору швидкості, роботу не виконує.

Зв'яжемо з точкою O прямокутну систему декартових координат з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Визначимо елементарну роботу сили в координатній формі. Для цього силу \vec{F} і елементарне переміщення $d\vec{r}$ розкладемо за ортами осей системи координат:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

і підставимо у вираз роботи (3.168):

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.171)$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладання сили.

3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили

Допустимо, що точка M перемістилася з положення M_1 у положення M_2 (рис. 3.38). Потрібно визначити роботу сили \vec{F} на кінцевому переміщенні.

Величина, рівна криволінійному інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж дуги кривої, окресленої точкою прикладання сили під час її переміщення, називається роботою сили на кінцевому переміщенні або **повною роботою сили**.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.172)$$

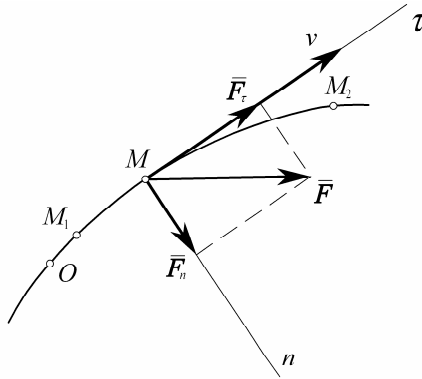


Рис. 3.38

За координатного способу задання руху повна робота сили виражається:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.173)$$

За натурального способу задання руху повна робота сили:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos(\vec{F}, \vec{v}). \quad (3.174)$$

Якщо перейти від криволінійного інтеграла (3.173) до визначеного, то треба врахувати $dx = \dot{x}dt$; $dy = \dot{y}dt$; $dz = \dot{z}dt$:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

де t_1, t_2 – моменти часу, коли точка перебувала в положеннях M_1 і M_2 (рис. 3.38).

Робота сталої сили:

$$A = F \cdot S \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}). \quad (3.175)$$

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні точки її прикладання дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Одиницею роботи сили в системі СІ є джоуль Дж .

Потужність сили – це фізична алгебраїчна величина, яка характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}.$$

Знаючи потужність сили, можна визначити виконану роботу за деякий проміжок часу $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$. Якщо ж потужність стала, то $A = Nt$, де $t = t_2 - t_1$ – згаданий проміжок часу.

Одиницею потужності в системі СІ є ват Вт [Дж · с⁻¹].

3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили

Робота рівнодійної сили на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому самому переміщенні.

Нехай система складається із n сил. Проекція рівнодійної сили \vec{R} на вісь τ дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх сил на цю вісь (рис. 3.39).

$$R \cdot \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{v}}) = F_1 \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{v}}) + F_2 \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_2, \vec{v}}) + \dots + F_n \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_n, \vec{v}}) \quad (3.176)$$

Помножимо почленно рівняння (3.176) на dS і, інтегруючи на переміщенні від точки M_1 до точки M_2 , остаточно одержимо:

$$\int_{M_1}^{M_2} R \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{v}}) \cdot ds = \int_{M_1}^{M_2} F_1 \cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{v}}) \cdot ds + \int_{M_1}^{M_2} F_2 \cos(\widehat{\vec{F}_2, \vec{v}}) \cdot ds + \dots + \int_{M_1}^{M_2} F_n \cos(\widehat{\vec{F}_n, \vec{v}}) \cdot ds.$$

$$A_R = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (3.177)$$

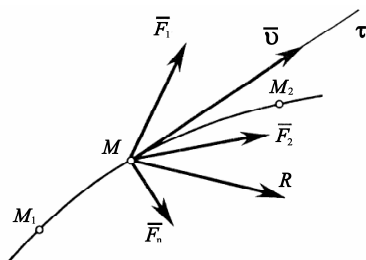


Рис. 3.39

3.7.4. Робота сили в окремих випадках

Робота сили ваги

Припустимо, що матеріальна точка M рухається вздовж деякої траєкторії із положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$ під дією сталої сили ваги $G = mg$, де g – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили \vec{G} на переміщенні точки M_1M_2 . Оберемо нерухому прямокутну систему декартових координат, як на рис. 3.40.

Проекції сили \vec{G} на координатні осі:

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg. \quad (3.178)$$

Використаємо координатний вираз елементарної роботи сили (3.173):

$$\delta A = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mg dz. \quad (3.179)$$

Знак мінус означає, що сила \vec{G} спрямована протилежно

відносно осі Oz .

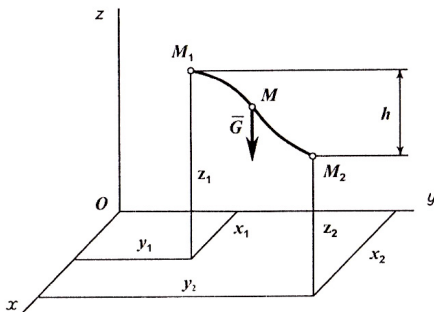


Рис. 3.40

Робота, що виконується силою \bar{G} на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2 :

$$A = \int_{M_2}^{M_1} \delta A = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh, \quad (3.180)$$

де $h = z_1 - z_2$ – величина вертикального переміщення точки M .

Якщо $z_1 > z_2$, то робота сили ваги додатна, а якщо $z_1 < z_2$, то робота сили ваги від’ємна.

Таким чином, робота, що виконується силою ваги:

$$A = \pm mgh, \quad (3.181)$$

де знак «плюс» відповідає переміщенню точки донизу, а знак «мінус» – переміщенню точки вгору.

Робота, що виконується силою ваги матеріальної точки, дорівнює добутку модуля сили ваги на різницю висот початкового і кінцевого положення точки.

Робота сили ваги матеріальної точки не залежить від виду траєкторії, за якою рухається точка, а залежить тільки від різниці за вертикаллю між положеннями точки.

Робота, що виконується силою ваги твердого тіла на замкненому переміщенні його центра ваги, дорівнює нулю.

Робота лінійної сили пружності

Визначимо спочатку елементарну роботу пружної сили F_{np} , яка підкоряється закону Гука, прикладеної до точки B пружини (рис. 3.41) під час її деформації на елементарну величину dx .

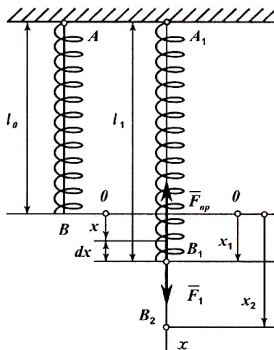


Рис. 3.41

Основною характеристикою пружного елемента є *коефіцієнт жорсткості* c (Н/м) – відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини його деформації.

Якщо обрати вісь x уздовж осі пружини у напрямі її розтягу, а початок координат O – у положенні недеформованої пружини довжиною l_0 , то сила пружності:

$$F_{np} = -cx, \quad (3.182)$$

де x – деяка деформація пружного елемента.

Знак «мінус» свідчить, що вектор сили спрямований у бік, протилежний напрямку переміщення кінця пружини точки B .

Елементарна робота сили (3.173):

$$\begin{aligned} \delta A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad F_{npz} = -cx; \quad F_{npy} = F_{npz} = 0. \\ \delta A &= -F_{np} dx = -cxdx. \end{aligned} \quad (3.183)$$

За переміщенням точки прикладання сили з положення B_1 у положення B_2 , тобто, на відстань $x_2 - x_1$, сила пружності виконує роботу:

$$A = \int_{B_1}^{B_2} \delta A = - \int_{x_1}^{x_2} F_{np} dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = - \frac{cx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(x_2^2 - x_1^2)}{2}. \quad (3.184)$$

Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука, дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на різницю квадратів координат кінця і початку переміщення точки прикладання сили, яке відраховується від положення недеформованого стану.

Якщо позначити деформацію пружини $x_2 - x_1 = h$, то роботу сили пружності можна визначити:

$$A = - \int_0^h F_{np} dx = -c \int_0^h x \cdot dx = - \frac{ch^2}{2}.$$

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно напрямку переміщення точки її прикладання.

Якщо кінець пружини відпускати до початкового положення, то сила пружності виконує додатну роботу

Робота і потужність сили, прикладеної до обертового тіла

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z під дією довільно розміщеної у просторі зовнішньої сили \vec{P} , прикладеної в точці M на відстані r від осі (рис. 3.42). Визначимо роботу цієї сили.

Для цього проведемо крізь точку M площину Π , перпендикулярну осі. Розкладемо вектор сили \vec{P} на дві складові: \vec{P}_1 розміщену у площині Π , і \vec{P}_2 , паралельну осі z .

Відомо, що складова \vec{P}_2 роботу не виконує, оскільки її напрям перпендикулярний вектору швидкості \vec{v} і згідно з формулою (3.169) її робота дорівнює нулю.

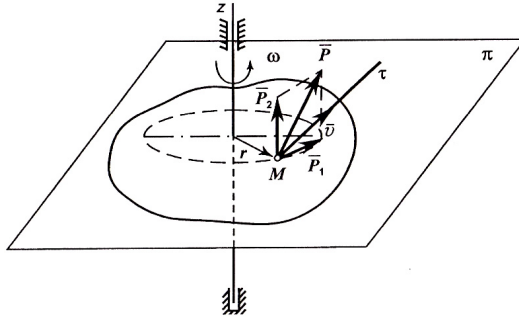


Рис. 3.42

Елементарна робота сили:

$$\delta A = P_1 \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P_1, \vec{v}}) = P_1 r \cdot \cos(\widehat{P_1, \vec{v}}) \cdot d\varphi = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла;

$ds = r \cdot d\varphi$ – елементарна дуга кола, що окреслює точка M під час обертання разом з тілом;

$F_1 r \cdot \cos(\widehat{F_1, \vec{v}}) = M_z^e$ – обертальний момент сили \vec{F}^e відносно осі z .

Елементарна робота сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно осі z , дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі z на елементарний кут повороту тіла.

Повна робота сили дорівнює інтегралу від елементарної роботи:

$$A = \int_0^\varphi M_z^e \cdot d\varphi. \quad (3.185)$$

Якщо обертальний момент є сталою величиною ($M_z = \text{const}$), то:

$$A = M_z^e \cdot \varphi. \quad (3.186)$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (3.187)$$

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, характеризує швидкість виконаної роботи і дорівнює добутку моменту сили відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

3.7.5. Коефіцієнт корисної дії

Сили, що прикладені до тіл матеріальної системи, можна поділити на рушійні, робота яких є додатною, і сили опору, робота яких від'ємна.

У свою чергу, сили опору складаються із сил корисного опору, для подолання яких призначений механізм або машина, і сил шкідливого опору. До останніх належать сили тертя у шарнірах механізмів, сили гідравлічних і повітряних опорів тощо.

Коефіцієнтом корисної дії є відношення роботи сил корисного технологічного опору $A_{кор}$ до повної витраченої роботи рушійних сил $A_{випр}$.

Оскільки сили шкідливого опору займають значне місце в повній роботі сил, то, безумовно, механічний к.к.д. машин завжди суттєво менший від одиниці:

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{випр}} = \frac{N_{кор}}{N_{випр}} < 1. \quad (3.188)$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке елементарна робота сили?
2. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
3. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
4. Напишіть формулу роботи сталої сили, спрямованої під кутом до вектора швидкості.
5. Як визначити роботу рівнодійної сили?
6. Визначте роботу сили ваги і сили пружності.
7. Як визначається робота сили, прикладеної до обертового тіла?
8. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
9. Як визначити потужність сили, прикладеної до обертового тіла?
10. Як визначити потужність сили, прикладеної до тіла, що рухається поступально?
11. Як визначити елементарну роботу сили, прикладеної до обертового тіла?
12. Чому дорівнює повна робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла?
13. Чому робота сили пружності є від'ємною?
14. В яких випадках робота сили ваги є додатною, а в яких – від'ємною?
15. Що таке коефіцієнт жорсткості пружного елемента, як він визначається і яка його розмірність?

3.8. Кінетична енергія матеріальної точки і системи

3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо).

Кінетична енергія – це друга найважливіша міра механічного руху. Ця міра руху була введена Г. Лейбніцем і названа «живою силою». У XIX ст. з появою поняття енергії Г. Гельмгольц назвав цей вид енергії кінетичною.

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості в нерухомій системі координат:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.189)$$

де \bar{v} – швидкість матеріальної точки відносно заданої системи відліку.

Вираз (3.189) приймає різний вигляд залежно від способу задання руху точки. За векторного способу $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ і кінетична енергія дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2. \quad (3.190)$$

За координатного способу швидкість $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$,

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти осей прямокутної системи декартових координат:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (3.191)$$

За натурального способу $\bar{v} = v_r \bar{e}_r$; $v_r = \dot{s}$; \bar{e}_r – орт дотичної:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2. \quad (3.192)$$

Кінетичною енергією матеріальної системи в нерухомій системі координат називається скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій точок, що належать системі:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2, \quad (3.193)$$

де \bar{v}_k – швидкість k -ї матеріальної точки відносно нерухомої інерціальної системи координат.

Зрозуміло, що кінетична енергія є додатною величиною і не залежить від напрямів швидкостей точок системи.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи в абсолютному русі. Система у цьому разі здійснює складний рух, швидкість кожної точки якої складається з векторної суми переносної і відносної швидкостей. Обмежимося тим випадком, коли переносний рух є поступальним зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас системи, а початок рухомої системи координат збігається з центром інерції (центр мас). Матеріальна система рухається довільним чином відносно рухомої системи координат, а разом з рухомою системою координат виконує поступальний рух навколо нерухомої системи координат. Тоді абсолютна швидкість довільної точки матеріальної системи $\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}$, де \bar{v}_c – швидкість центра мас, \bar{v}_{kr} – швидкість точки відносно рухомої системи координат, що здійснює поступальний рух. Підставимо абсолютну швидкість точки у вираз (3.193) і після перетворень маємо три доданки:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2 + \bar{v}_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr}. \end{aligned}$$

Останній доданок у цьому виразі дорівнює нулю на підставі (3.101): початок відліку рухомої системи координат вибраний у центрі мас і тому:

$$\bar{r}_c = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \dot{\bar{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr} = 0.$$

Остаточно маємо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2. \quad (3.194)$$

Формула (3.194) є математичним виразом теореми Кьоніга.

Кінетична енергія матеріальної системи у довільному русі дорівнює сумі кінетичних енергій поступального переносного руху системи разом із центром мас і відносного руху навколо центра мас.

3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Нехай матеріальна точка масою m рухається вздовж криволінійної траєкторії із положення M_1 в положення M_2 під дією рівнодійної сили \bar{P} .

Згідно з основним законом динаміки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P}, \quad (3.195)$$

де m – маса точки; \bar{a} – вектор прискорення точки; \bar{P} – рівнодійна сил, що діють на точку (рис. 3.43).

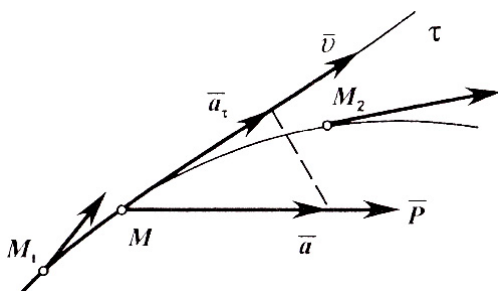


Рис. 3.43

Спроектуємо рівняння (3.195) на дотичну:

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}), \quad (3.196)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення.

Підставимо значення a_τ у вираз (3.196):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}). \quad (3.197)$$

Рівняння (3.197) помножимо на елементарне переміщення точки вздовж траєкторії ds :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}), \quad (3.198)$$

де $P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}})$ – елементарна робота сили \vec{P} , $\frac{ds}{dt} = v$.

Підставимо це у вираз (3.198):

$$mv \cdot dv = \delta A \Rightarrow d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \delta A \Rightarrow dT = \delta A. \quad (3.199)$$

Формула (3.199) є математичним виразом теореми у диференціальній формі:

Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на цю точку.

Допустимо, що в момент часу t_1 швидкість точки дорівнювала v_1 , а в момент t_2 – v_2 , і візьмемо визначений інтеграл у відповідних границях:

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} \delta A.$$

Після інтегрування:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A. \quad (3.200)$$

Формула (3.200) є математичним виразом теореми у кінцевій формі.

Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили, що прикладена до точки на цьому самому переміщенні.

Одиницею кінетичної енергії (як і роботи) у Міжнародній системі СІ є джоуль [Дж].

Розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії точки у випадку її відносного руху, для якого основний закон динаміки має вигляд (3.20):

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k .$$

Проводячи подібні перетворення як для виразу (3.200), дістанемо:

$$\frac{mv_{2r}^2}{2} - \frac{mv_{1r}^2}{2} = A(\sum \bar{F}_k) + A(\bar{\Phi}_e) + A(\bar{\Phi}_k), \quad (3.201)$$

де $A(\sum \bar{F}_k)$, $A(\bar{\Phi}_e)$, $A(\bar{\Phi}_k)$ – робота активних сил, переносної і коріолісової сил інерції відповідно;

v_{1r}^2, v_{2r}^2 – відносна швидкість точки на початку і наприкінці руху.

3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла

Тверде тіло рухається поступально

Приймаючи до уваги, що за поступальним рухом швидкості всіх точок тіла однакові і дорівнюють швидкості такої характерної точки тіла як центр мас \bar{v}_c , а відносні швидкості точок дорівнюють $\bar{v}_r = 0$, то запишемо на підставі теореми Кьоніга (3.194) формулу кінетичної енергії тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (3.202)$$

де $\sum_{k=1}^n m_k = m$ – маса тіла.

Кінетична енергія тіла за поступального руху дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

Тверде тіло обертається відносно центральної нерухомої осі

У цьому випадку швидкість центра мас $\bar{v}_c = 0$, а швидкість кожної точки тіла $v_k = \omega \cdot r_k$, де r_k – відстань точки до осі обертання. Тоді кінетична енергія тіла на підставі (3.194) дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (3.203)$$

де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції тіла як міра інертності тіла за обертальним рухом.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω , дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

Тверде тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла M можна розглядати у кожний заданий момент часу як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей – точки P (рис. 3.44).

Введемо такі позначення:

C – центр мас тіла; v_c – швидкість центра мас тіла;

I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини плоскопаралельного руху;

I_{zp} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через миттєвий центр швидкостей P .

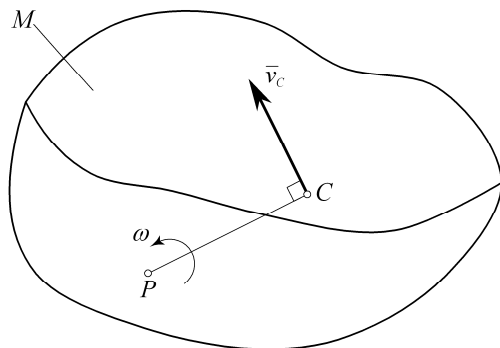


Рис. 3.44

За теоремою Гюйгенса-Штейнера (3.108) момент інерції відносно паралельної осі:

$$I_{zp} = I_{zc} + m \cdot (PC)^2.$$

Оскільки $v_c = \omega \cdot PC$, то кінетична енергія тіла дорівнює:

$$T = \frac{I_{zp} \cdot \omega^2}{2} = \frac{(I_{zc} + m \cdot (PC)^2) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc} \omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2};$$

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (3.204)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює арифметичній сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху відносно центра мас.

Аналогічно, формулу (3.204) можна отримати, сумуючи вирази (3.202) і (3.203).

3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок і має такі параметри:

m_1, m_2, \dots, m_n – маси матеріальних точок;

$v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}$ – початкові швидкості кожної точки;

v_1, v_2, \dots, v_n – кінцеві швидкості кожної точки;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – рівнодійні внутрішніх сил як сили взаємодії між точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичної енергії в кінцевій формі:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.205)$$

де A_k^e – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на k -у точку;

A_k^{in} – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на k -у точку.

Підсумуємо рівняння (3.205) за всіма точками системи:

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.206)$$

Запишемо вираз (3.206) більш компактно:

де $\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ – кінцева кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$ – початкова кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Остаточна вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.207)$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому самому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.

Особливістю цієї теореми є врахування роботи внутрішніх сил. Хоча головний вектор і головний момент цих сил дорівнюють нулю, але робота, що ними виконується, може відрізнитися від нуля.

Зрозуміло, що для незмінних матеріальних систем (деформації тіл яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю $\sum A_k^{in} = 0$.

Тоді вираз (3.207) спрощується:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.208)$$

Приклад 3.15. Задача №38.24

(І.В. Мещерський. «Збірник задач з теоретичної механіки»).

На рис. 3.45 зображений підймальний механізм лебідки.

Вантаж А вагою \bar{P}_1 піднімається за допомогою троса, що перекинутий через блок С і навитий на барабан В радіусом r_2 і вагою \bar{P}_2 .

До барабана прикладений обертальний момент, який з часу включення пропорційний квадрату кута повороту φ барабана $M_{об} = k\varphi^2$, де k – сталий коефіцієнт.

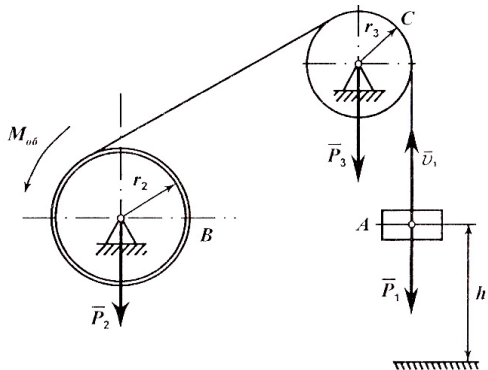


Рис. 3.45

Визначити швидкість вантажу А в момент, коли він підніметься на висоту h_1 .

Масу барабана В вважати рівномірно розподіленою на його ободі. Блок С є суцільним диском вагою \bar{P}_3 .

Масою і деформацією троса знехтувати. У початковий момент система перебувала у стані спокою.

Розв'язання

Задана задача розв'язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи, яка вважається незмінною (3.208)

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

На початку руху система перебувала у стані спокою, тому $T_0 = 0$

$$T = \sum A_k^e. \quad (a)$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що становлять систему:

$$T = T_A + T_B + T_C. \quad (б)$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$$T_A = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g} \text{ – тіло рухається поступально;}$$

$$T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \text{ – тіло обертається навколо нерухомої осі;}$$

$$I_2 = m_2 r_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{g} \text{ – осьовий момент інерції тіла;}$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \text{ – кутова швидкість, виражена через шукану швидкість}$$

$$v_1.$$

$$T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}. \text{ Аналогічно і для обертового тіла С:}$$

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3}; \quad T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичних енергій у вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$

Далі визначаємо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів:

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{oo}), \quad (c)$$

де $A(P_1) = -P_1 h_1$ (знак «мінус» свідчить, що це робота сили опору).

$$A(M_{oo}) = \int_0^{\varphi} M_{oo} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3}; \quad \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо значення визначених робіт у вираз (с):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{kh_1^3}{3r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Звідки шукана швидкість:

$$v_1 = \frac{2}{r_2} \sqrt{\frac{gh_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
2. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються

- поступально, плоскопаралельно і обертаються?
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
 4. Яка розмірність кінетичної енергії?
 5. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи.
 6. Сформулюйте теорему Кьоніга і запишіть її математичний вираз.
 7. Означте кінетичну енергію як другу найважливішу міру руху.
 8. Чи дорівнює нулю робота внутрішніх сил?
 9. Як виражається кінетична енергія точки за натуральним способом задання руху?

3.9. Теорія потенціального силового поля

3.9.1. Силове поле. Потенціальне силове поле і силова функція

Існуючі в природі сили, що діють на матеріальні точки системи, можуть бути у загальному випадку функцією таких кінематичних параметрів руху точки: координат, швидкості і часу.

Значно поширеними є сили, які залежать лише від координат матеріальних точок, що рухаються. До таких сил належать сили гравітації, сили пружності, сили електромагнітних полів тощо.

Силowym полем називається частина фізичного простору, в якому на матеріальні точки системи, що рухаються в ньому, діють сили, які функціонально залежать від координат і часу.

Таке поле є *нестационарним* силowym полем:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n). \quad (3.209)$$

Силowe поле, в якому сила не залежить від часу, називають *стационарним*:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n). \quad (3.210)$$

Стаціонарне силове поле називається потенціальним, якщо робота сил поля, які діють на матеріальну точку, що рухається, не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і кінцевого положень точки.

У цьому силовому полі кожній точці відповідає деяка величина роботи, яку здійснюють сили поля під час переходу матеріальної точки із одного положення в інше.

Робота на переміщенні $M_1 M_2$ сили \bar{P} , прикладеної до тіла в точці M , визначається згідно з виразом (рис. 3.46):

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} (P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz). \quad (3.211)$$

Цю роботу можна обчислити безпосередньо, якщо сила залежить від координат точки:

$$P_x = f_1(x; y; z); \quad P_y = f_2(x; y; z); \quad P_z = f_3(x; y; z). \quad (3.212)$$

Крім цього, потрібно знати рівняння траєкторії руху точки:

$$y = f_4(x), \quad z = f_5(x). \quad (3.213)$$

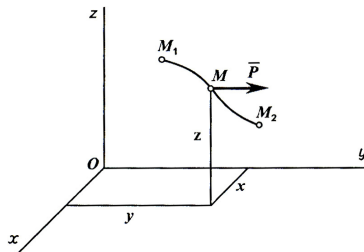


Рис. 3.46

У загальному випадку робота (3.211) залежить від виду траєкторії, вздовж якої переміщується точка прикладання сили. Проте, якщо вираз у дужках рівняння (3.211) є повним диференціалом деякої функції $U(x; y; z)$:

$$dA = dU(x; y; z),$$

або

$$P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz = dU(x; y; z),$$

то робота може бути обчислена без урахування траєкторії:

$$A_{(M_1, M_2)} = \int_{M_1}^M dU(x; y; z) = U_2(x; y; z) - U_1(x; y; z). \quad (3.214)$$

Функцію U від координат x, y, z , диференціал якої дорівнює елементарній роботі, називають силовою функцією.

Силоне поле, для якого існує силова функція, називають потенціальним силовим полем, а сили, які діють в цьому полі, називають потенціальними силами.

Тоді, згідно з виразом (3.214), маємо основну властивість потенціального силового поля: **робота потенціальної сили дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому і початковому положеннях** точки її переміщення і не залежить від виду траєкторії руху точки.

За переміщенням точки вздовж замкнутої траєкторії $U_2 = U_1$, тобто, робота потенціальної сили дорівнює нулю.

Сили, робота яких залежить від виду траєкторії або від закону руху точки прикладання сили, називають не потенціальними (сили тертя, опір середовища).

Якщо відомо, що $dA = dU(x; y; z)$, то силова функція визначається з рівності:

$$U = \int dA + C,$$

або

$$U = \int (P_x dx + P_y dy + P_z dz) + C, \quad (3.215)$$

де C – довільна стала інтегрування для «нульової точки», в якій $U = 0$.

3.9.2. Вираз проекцій сили через силову функцію

Знаючи силову функцію $U(x; y; z)$, можна визначати силу у будь-якій точці поля. Відомо, що:

$$dU(x; y; z) = P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz.$$

Але з іншого боку:

$$dU(x; y; z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Порівняємо два останні вирази:

$$P_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad P_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad P_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.216)$$

У потенціальному силовому полі проекції сили на координатні осі дорівнюють частинним похідним від силової функції за відповідними координатами.

Вектор \vec{P} є градієнтом силової функції:

$$\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} = \overline{\text{grad}} U. \quad (3.217)$$

З рівняння (3.216) випливає:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_z}{\partial x} = \frac{\partial P_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y}. \quad (3.218)$$

За допомогою співвідношень (3.218) встановлюють, чи є поле потенціальним, якщо сили задані в функції координат:

$$P_x = f_1(x; y; z), \quad P_y = f_2(x; y; z), \quad P_z = f_3(x; y; z).$$

3.9.3. Потенціальна енергія

Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять поняття потенціальної енергії, яка оцінює «запас роботи», що має матеріальна точка у

заданому пункті силового поля.

Потенціальною енергією матеріальної точки у деякому положенні M називають *скалярну величину* Π , яка дорівнює тій *роботі*, яку виконують сили поля під час *переміщення* точки із положення M у нульове положення.

З цього випливає, що:

$$\Pi = \Pi(x, y, z).$$

Але у нульовому положенні U і Π збігаються:

$$\Pi(x, y, z) = A_{MM_0} = U_0 - U = -U.$$

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z). \quad (3.219)$$

Отже, потенціальна енергія в довільній точці силового поля дорівнює значенню силової функції в цій точці, але з протилежним знаком:

$$P_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad P_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad P_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (3.220)$$

3.9.4. Поверхні рівного потенціалу

За заданою силовою функцією $U(x, y, z)$ легко дати геометричну характеристику залежності потенціальної енергії точки від її положення у просторі.

Геометричне місце точок простору, у якій потенціальна енергія матеріальної точки має одне і те саме значення, визначається з рівняння:

$$U(x, y, z) = C. \quad (3.221)$$

Рівняння (3.221) визначає деяку поверхню у просторі, яка називається поверхнею рівного потенціалу або екіпотенціальною поверхнею.

Надаючи параметру C досить близьких значень, можна отримати скільки завгодно екіпотенціальних поверхонь, поділених тонкими шарами.

Через кожну точку простору проходить тільки одна еквіпотенціальна поверхня. Вектор сили \vec{F} напрямлений завжди за нормаллю до еквіпотенціальної поверхні у бік зменшення значень потенціальної енергії.

3.9.5. Робота сили у потенціальному силовому полі

Фізичний зміст силової функції полягає в тому, що вона є роботою сили поля під час переходу точки із початкового положення в задане:

$$A = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2,$$

де U_2, U_1 і Π_2, Π_1 – значення силової функції і потенціальної енергії у кінцевому і початковому положеннях точки, відповідно.

Робота потенціальної сили дорівнює різниці значень потенціальної енергії рухомої точки у початковому і кінцевому положеннях.

3.9.6. Закон збереження механічної енергії

Допустимо, що на кожну точку матеріальної системи діють потенціальні зовнішні і внутрішні сили. Для k -ї точки можна записати:

$$A_k = \Pi_{k0} - \Pi_{k1}.$$

Підсумуємо останній вираз за всіма точками системи:

$$A = \sum \Pi_{k0} - \sum \Pi_{k1} = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Але робота дорівнює різниці кінетичних енергій $A = T_1 - T_0$.

Тоді:

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1 \Rightarrow T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const.} \quad (3.222)$$

Під час руху механічної системи під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи у кожному її положенні залишається величиною незмінною.

У реальних умовах неізолюваних систем повна механічна енергія, яка дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій, може змінюватися за рахунок дії не потенціальних сил. Тоді частина енергії матеріальної системи витрачається на переборення різного виду опорів або на відтікання енергії до інших систем. Збільшення механічної енергії можливо в процесі перетворення різних видів енергії в механічну енергію, наприклад, у привідних двигунах.

3.9.7. Приклади потенціальних силових полів

1. Однорідне поле сили ваги

Сила ваги, робота якої не залежить від форми траєкторії точки її прикладання, є прикладом сили, яка має потенціал.

Розглянемо в цьому потенціальному полі рух однієї матеріальної точки вагою G (рис. 3.47) і визначимо потенціальну енергію точки M , яка залежить тільки від координати.

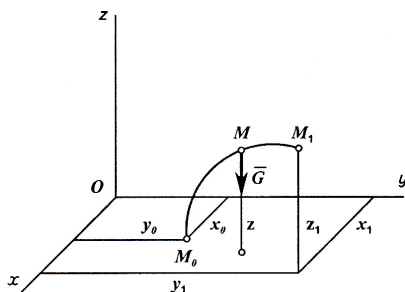


Рис. 3.47

Проекції сили ваги на координатні осі дорівнюють:

$$G_x = 0; \quad G_y = 0; \quad G_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G = -mg.$$

Визначимо елементарну роботу сили ваги (3.171):

$$dA = G_x \cdot dx + G_y \cdot dy + G_z \cdot dz = -mg \cdot dz;$$

$$dA = dU = -d\Pi; \quad d\Pi = mg \cdot dz.$$

Інтегруємо останній вираз:

$$\Pi = \int_0^z d\Pi = \int_0^z mgdz = mgz + C.$$

Допустимо, що потенціальна енергія точки дорівнює нулю, якщо $z = 0$, тобто, за нульову екіпотенціальну поверхню беремо координатну площину Oxy .

Тоді $C = 0$ і потенціальна енергія точки:

$$\Pi = Gz = mgz.$$

Рівняння екіпотенціальних поверхонь:

$$mgz = \text{const} \Rightarrow z = \text{const}.$$

Отже, екіпотенціальні поверхні поля сили ваги є горизонтальними площинами.

Звичайно, екіпотенціальними поверхнями поля можна вважати площини лише на порівняно невеликій відстані, де можна нехувати кривиною поверхні Землі.

Сила ваги спрямована за перпендикуляром до цих екіпотенціальних поверхонь у бік зменшення значень потенціальної енергії.

Робота на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2 , якщо $z_1 - z_2 = h$:

$$A = mgh.$$

Розглянемо матеріальну систему з масами окремих точок m_1, m_2, \dots, m_n . Потенціальна енергія системи:

$$\Pi = m_1gz_1 + m_2gz_2 + \dots + m_ngz_n = \sum m_Kgz_K,$$

Вертикальна координата центра ваги:

$$z_c = \frac{\sum m_Kgz_K}{G}; \Rightarrow \sum m_Kgz_K = G \cdot z_c.$$

Порівнюючи вирази, дістанемо остаточно:

$$\Pi = G \cdot z_c.$$

Потенціальна енергія матеріальної системи, яка перебуває під дією сили ваги, дорівнює добутку ваги системи на висоту її центра ваги над нульовою еквіпотенціальною поверхнею.

2. Поле центральної сили притягання

Допустимо, що на матеріальну точку M масою m (рис. 3.48) діє центральна притягальна сила \vec{P} , напрямлена до центра O , яка дорівнює

$$P = k \frac{m}{r^2}.$$

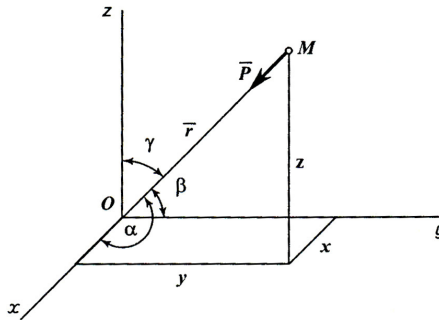


Рис. 3.48

Зв'яжемо з точкою O прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, позначивши кути, які утворює радіус-вектор \vec{r} з осями координат, літерами α, β, γ .

Визначимо проекції сили \vec{P} на осі координат

$$P_x = -P \cos \alpha = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{km}{r^3} \cdot x;$$

$$P_y = -P \cdot \cos \beta = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{km}{r^3} \cdot y;$$

$$P_z = -P \cdot \cos \gamma = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = -\frac{km}{r^3} \cdot z;$$

$$dA = dU = -d\Pi.$$

Елементарна робота центральної сили за виразом (3.171) дорівнює:

$$\begin{aligned}dA &= P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz = -\frac{km}{r^3} \cdot x \cdot dx - \frac{km}{r^3} \cdot y \cdot dy - \frac{km}{r^3} \cdot z \cdot dz = \\&= -\frac{km}{r^3} (x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz). \\x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz = r \cdot dr. \text{ Тоді}\end{aligned}$$

$$d\Pi = -dA = \frac{km}{r^3} \cdot r \cdot dr = \frac{km}{r^2} dr \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int \frac{km}{r^2} \cdot dr = -\frac{km}{r} + C.$$

Потенціальна енергія залежить від відстані r . Допустимо, що $\Pi=0$, коли $r = \infty$, тоді $C=0$. І остаточно потенціальна енергія:

$$\Pi = -\frac{km}{r}; \quad \Pi = \text{const}, \text{ якщо } r = \text{const}.$$

Еквіпотенціальні поверхні поля центральної притягальної сили є **сферичними поверхнями** з центром у точці O .

Притягальна сила \vec{P} спрямована за нормаллю до еквіпотенціальної поверхні, яка перетинає точку O .



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які сили називають потенціальними?
2. Що таке силова функція?
3. Як визначається потенціальна енергія, як вона пов'язана з силовою функцією?
4. Як обчислити роботу сили в потенціальному полі?
5. Що таке еквіпотенціальні поверхні, які їх властивості?
6. Як виражається вектор сили і проєкція сили через потенціальну енергію?
7. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
8. Як спрямована центральна притягальна сила?
9. Як обчислити потенціальну енергію тіла, що перебуває на певній висоті?
10. Наведіть приклади потенціальних силових полів.

3.10. Кінетостатика невідільної матеріальної системи

Принцип д'Аламбера надає можливість складати рівняння руху для невідільної матеріальної системи, використовуючи умови геометричної статyki. Такий метод складання рівнянь руху називається методом кінетостатyki. Цей принцип для невідільної системи, наприклад, механізму, можна сформулювати так.

Для невідільної матеріальної системи або механізму в будь-який момент руху векторна сума головних векторів активних сил, сил реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, а також векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, обчислених відносно довільного центра, дорівнюють нулю.

Метод кінетостатyki особливо успішно застосовується для силового або кінетостатичного розрахунку багатоланкових плоских механізмів, де розв'язується перша задача динаміки, коли за заданим законом руху ведучої ланки необхідно визначити сили і моменти сил на інших ланках і реакції у шарнірах або, більш точно, у кінематичних парах.

3.10.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи

Допустимо, що матеріальна система складається з n матеріальних точок з масами m_1, m_2, \dots, m_n . На кожну точку системи діють активні сили, рівнодійні яких $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ і рівнодійні реакцій в'язей $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$.

Під дією прикладених сил система рухається прискорено. Умовно прикладемо до кожної точки *силу інерції* :

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \bar{\Phi}_2 = -m_2\bar{a}_2, \dots, \bar{\Phi}_n = -m_n\bar{a}_n.$$

Застосуємо для k -ї матеріальної точки принцип д'Аламбера (3.15):

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.223)$$

Підсумуємо почленно рівняння (3.223) за всіма точками k

системи:

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{F}_k = \bar{F}^A$ – головний вектор активних сил матеріальної системи,

$\sum \bar{N}_k = \bar{N}^R$ – головний вектор реакцій в'язей матеріальної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$ – головний вектор сил інерції матеріальної системи.

$$\text{Тоді} \quad \bar{F}^A + \bar{N}^R + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.224)$$

У будь-який момент руху матеріальної системи головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції умовно складають зрівноважену систему сил.

Обираємо у просторі довільний полюс O за центр зведення сил, які діють на матеріальну систему.

Кожна точка системи відносно полюса O матиме свій радіус-вектор $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$.

Кожний доданок рівняння (3.223) помножимо векторно на радіус-вектор \bar{r}_k , а потім підсумуємо за всіма точками системи:

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{M}_0^F$ – головний момент активних сил системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k = \bar{M}_0^R$ – головний момент реакцій в'язей системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = \bar{M}_0^\phi$ – головний момент сил інерції матеріальної системи,

$$\text{тоді} \quad \bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\phi = 0 \quad (3.225)$$

У будь-який момент руху матеріальної системи сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції, умовно прикладеного до тіл матеріальної системи, дорівнює нулю.

Рівнянням (3.224) і (3.225), які математично відображають принцип д'Аламбера для матеріальної системи, відповідають три рівняння в проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат і три рівняння моментів відносно цих самих осей:

$$\begin{aligned}
 F_x^A + N_x^R + \Phi_x &= 0, \\
 F_y^A + N_y^R + \Phi_y &= 0, \\
 F_z^A + N_z^R + \Phi_z &= 0, \\
 M_x^F + M_x^R + M_x^\phi &= 0, \\
 M_y^F + M_y^R + M_y^\phi &= 0, \\
 M_z^F + M_z^R + M_z^\phi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.226}$$

Розглянутий метод внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв'язування задач динаміки.

Особливо цей метод зручний для визначенні реакцій в'язей матеріальної системи.

Цей метод, звичайно, можна використовувати і для визначення прискорень тіл матеріальної системи.

3.10.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції

Головний вектор сил інерції окремих точок системи не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений задалегідь:

$$\bar{\Phi}_x = -m_k \bar{a}_k; \Rightarrow \bar{\Phi} = -\sum m_k \bar{a}_k = m \cdot \bar{a}_c;
 \tag{3.227}$$

Головний вектор сил інерції матеріальної системи, що рухається довільно, дорівнює добутку маси системи на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.

де m – маса системи (тіла); \bar{a}_c – прискорення центра мас системи, яке можна розкласти на тангенціальну і нормальну складові:

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^{\tau} + \bar{a}_c^n; \Rightarrow \bar{\Phi} = -m(\bar{a}_c^{\tau} + \bar{a}_c^n) = -m \cdot \bar{a}_c^{\tau} - m \cdot \bar{a}_c^n = \bar{\Phi}^{\tau} + \bar{\Phi}^n.$$

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

Поступальний рух системи (тіла)

За поступального руху системи (тіла) відсутнє обертання навколо центра мас, тобто, сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра мас системи дорівнює нулю:

$$M_c^F + M_c^R = 0.$$

Згідно з принципом д'Аламбера і з урахуванням останнього виразу:

$$M_c^P + M_c^R + M_c^{\phi} = 0; \Rightarrow M_c^{\phi} = 0.$$

Оскільки головний момент сил інерції за поступального руху системи відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодійною сил інерції, тобто, одиничним силовим фактором інерційних сил.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Нехай тіло обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 3.49). Довільна точка масою m_k описує коло радіуса r_k і має тангенціальне прискорення \bar{a}_k^{τ} .

Кожна точка матиме тангенціальну складову сили інерції $\bar{\Phi}_k^{\tau} = -m_k \bar{a}_k^{\tau} = -m_k \varepsilon \cdot r_k$ і нормальну або відцентрову силу інерції $\bar{\Phi}_k^n = -m_k \bar{a}_k^n = -m_k \omega^2 r_k$.

Остання складова не створює моменту відносно осі обертання,

тому що вона перетинає цю вісь.

Тангенціальні складові сил інерції створюють моменти відносно осі обертання z . Плечі цих моментів є відстанями до осі обертання r_k

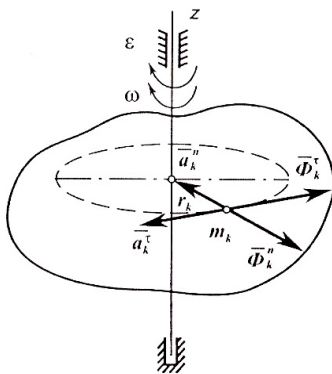


Рис. 3.49

$$M_z^\phi = \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon,$$

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon. \quad (3.228)$$

Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, **дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований протилежно кутовому прискоренню.**

Зазначимо, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період розгону або гальмування (перехідні режими). У період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Нагадаємо, що кожна матеріальна точка m_k обертового тіла, розміщена на деякій відстані r_k , створює елементарну тангенціальну складову сили інерції $\vec{\Phi}_k = -m_k \varepsilon \vec{r}_k$ як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Підсумуємо елементарні сили за всіма точками тіла і отримаємо зведену тангенціальну силу інерції:

$$\bar{\Phi}^{\tau} = \sum \bar{\Phi}_k^{\tau} = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot m \cdot \bar{r}_c = -m \bar{a}_c^{\tau}, \quad (3.229)$$

де $\sum m_k \bar{r}_k = m \cdot \bar{r}_c$ на підставі виразу для положення центра мас (3.102).

Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (3.229).

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок тіла (рис. 3.50). Згадаємо, що саме для кожної точки m_k маємо силу інерції $\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k$.

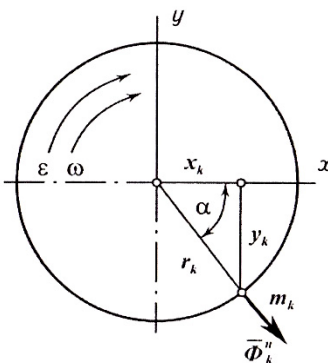


Рис. 3.50

Зведену або підсумкову силу інерції для всього тіла визначимо через проєкції на осі координат, прийняті на рис. 3.50:

$$\Phi^n = \sqrt{(\Phi_x^n)^2 + (\Phi_y^n)^2}. \quad (3.230)$$

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{kx}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha = \omega^2 \sum m_k x_k.$$

Значення із формули для координати x_c центра мас (3.103) $\sum m_k x_k = m x_c$ підставимо в останнє рівняння:

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot mx_c. \quad (3.231)$$

Аналогічно визначимо і проекцію на вісь y :

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot my_c. \quad (3.232)$$

Підставляємо вирази (3.231) і (3.232) у вираз (3.230):

$$\Phi^n = m\omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = m\omega^2 r_c = m \cdot a_c^n, \quad (3.233)$$

де r_c – радіус-вектор центра мас тіла; $a_c^n = \omega^2 r_c$ – нормальне або доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу (3.233) відцентрової сили інерції свідчить, що ця сила має місце за всіх режимів обертання (розгін, усталений рух, гальмування) і є досить небезпечною, бо вона пропорційна квадрату кутової швидкості. Відцентрова сила дорівнює нулю, якщо $r_c = 0$, тобто, коли центр мас розміщений на осі обертання. Це досягається методом балансування.

$$r_c = 0; \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0; \Rightarrow \Phi^n = m\omega^2 r_c = 0.$$

У деяких випадках головний вектор тангенціальних сил інерції і головний момент сил інерції можна замінити однією силою – рівнодійною. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 3.16

Стрижень масою m і довжиною l обертається з кутовим прискоренням ε навколо осі Oz , яка перпендикулярна до площини рисунка (рис. 3.51).

Знайти положення точки прикладання рівнодійної сил інерції стрижня.

Розв'язання

Тангенціальна сила інерції стрижня:

$$|\overline{\Phi}_\tau| = ma_c^\tau = m \cdot \varepsilon \cdot r_c = m\varepsilon \frac{l}{2}.$$

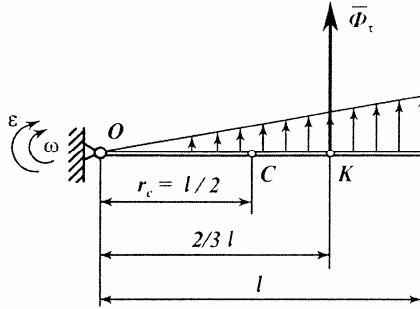


Рис. 3.51

Момент сил інерції стрижня відносно осі Oz :

$$|M_{0z}^{\phi}| = I_{0z} \cdot \varepsilon = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Тоді відстань від точки O до точки K , де прикладається рівнодійна сила, виражається величиною:

$$b = \frac{|M_{0z}^{\phi}|}{|\Phi_{\tau}|} = \frac{ml^2 \cdot \varepsilon \cdot 2}{3 \cdot m \cdot \varepsilon \cdot l} = \frac{2}{3}l.$$

Таким чином, точка K перетинає центр ваги трикутника, утвореного елементарними тангенціальними силами інерції мас, її можна розглядати як центр коливань фізичного маятника, до якого прикладається рівнодійна тангенціальних сил інерції стрижня.

Плоскопаралельний рух тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку C (рис. 3.52).

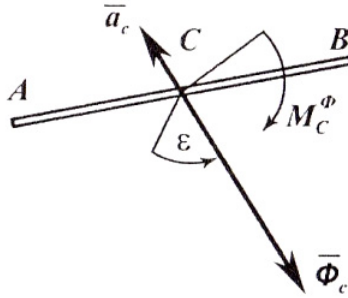


Рис. 3.52

Тіло (стрижень AB) масою m рухається у площині рисунка, бо рух плоскопаралельний. Центр мас C має лінійне прискорення \bar{a}_c , кутове прискорення тіла – ε .

Головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції дорівнюють, відповідно:

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c, M_c^\phi = -I_{zc} \cdot \varepsilon, \quad (3.234)$$

де I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка перпендикулярна до площини руху і перетинає центр мас.

Напрямок головного вектора сил інерції протилежний вектору прискорення центра мас, де він прикладений. Напрямок головного моменту протилежний напрямку кутового прискорення тіла.

Далі надамо методику застосування принципу д'Аламбера і приклад для матеріальної системи.

Приклад 3.17

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції під час руху матеріальної системи (рис. 3.53).

Задані маси тіл A, B, C : m_1, m_2, m_3 . Шків однорідний і суцільний, трос нерозтяжний.

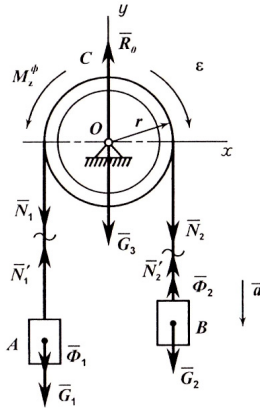


Рис. 3.53

Визначити прискорення вантажів \bar{a} ; натяг тросу ліворуч N_1 ; натяг троса праворуч N_2 ; реакцію опори шківів R_0 .

Допустимо, що маса вантажу B більше $m_2 > m_1$, тоді блок обертатиметься за ходом годинникової стрілки, саме туди напрямлене і кутове прискорення ε .

Розв'язання

Визначимо і прикладемо до відповідних тіл силу ваги, силу інерції і момент сил інерції.

Визначимо вагу тіл $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, $G_3 = m_3 g$. Визначимо сили інерції тіл і прикладемо протилежно напрямом їх прискорень $|\bar{\Phi}_1| = m_1 a$, $|\bar{\Phi}_2| = m_2 a$ (рис. 3.53). Визначимо через шукане прискорення момент сил інерції шківів і покажемо його напрям на схемі дуговою стрілкою, яка спрямована проти напрямку кутового прискорення ε :

$$|M_z^\phi| = I_z \varepsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 r a,$$

де $I_z = m_3 r^2$ – осьовий момент інерції шківів відносно центральної осі Oz (на схемі вісь не показано).

Якщо умовно прикласти до вантажів вектори сил інерції $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$, а до шківів – момент сил інерції M_z^ϕ , то система буде в рівновазі і на підставі принципу д'Аламбера можна скласти

рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки O , виключивши сили натягу тросів \bar{N}_1 і \bar{N}_2 як внутрішні:

$$\begin{aligned} \Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^\phi = 0; \quad m_1 a r + m_1 g r + m_2 a r - m_2 g r + m_3 r a = 0, \\ \Rightarrow m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g. \end{aligned}$$

Звідси шукане прискорення вантажів:

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Визначимо натяги тросів, зробивши переріз, і реакцію опори шків. Натяг троса ліворуч визначається із суми проекцій:

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a).$$

Натяг троса праворуч для тіла 2 аналогічно:

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шків визначається із суми проекцій сил на вісь y :

$$\begin{aligned} R_0 = N_1 + N_2 + G_3 = m_1 (g + a) + m_2 (g - a) + m_3 g = \\ = G_1 + G_2 + G_3 - a(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

3.10.3. Кінетостатичне дослідження плоского механізму

Попереду кінетостатичного дослідження механізму (рис. 3.54) проводять його кінематичний аналіз аналітичним або графічним методом.

За графічного методу будують план швидкостей (рис. 3.54а) і план прискорень (рис. 3.54б), із якого знаходять швидкості і прискорення всіх необхідних точок механізму, в тому числі і центрів мас ланок, а також кутові швидкості і прискорення його ланок на підставі відомої теореми для визначення швидкостей і прискорень точок тіла, що рухається плоскопаралельно (див. розділ «Кінематика»).

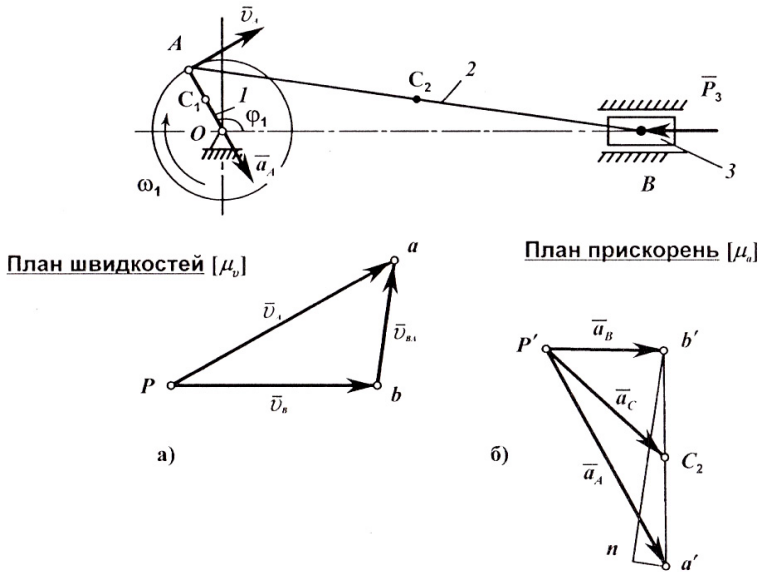


Рис. 3.54

Нехай кривошипно-повзунний механізм заданий у певному положенні, що визначається кутом φ_1 повороту кривошипа OA як ведучої ланки механізму (рис. 3.54),

де m_1 – маса кривошипа OA ;

m_2 – маса шатуна AB ;

m_3 – маса повзуна B .

Кривошип обертається за ходом годинникової стрілки зі сталою кутовою швидкістю ω_1 , на повзун B діє сила технологічного опору \bar{P}_3 . Вага кривошипа OA $G_1 = m_1 g$; вага шатуна AB $G_2 = m_2 g$; вага повзуна B $G_3 = m_3 g$.

Побудуємо план швидкостей (детально методику побудови дивиться в розділі «Кінематика»). Швидкість точки A дорівнює $v_A = \omega_1 \cdot OA$, у певному масштабі μ_v її вектор відкладається від полюса P і далі послідовно будується план швидкостей механізму (рис. 3.54а).

Потім будують **план прискорень** у певному масштабі μ_a . (рис. 3.54б). Прискорення точки A дорівнює $a_A = \omega_1^2 \cdot OA$, точка A має тільки нормальне прискорення. Запишемо **векторні рівняння** і визначимо необхідні кінематичні параметри за скороченою процедурою:

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; & \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n; & a_B &= P'b' \cdot \mu_a; \\ a'n &= \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}; & \bar{v}_B &= Pb \cdot \mu_v; & a_{BA}^n &= \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}}; \\ \varepsilon_{BA} &= \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}} = \varepsilon_2; & \frac{bc'_2}{c_2a'} &= \frac{BC_2}{AC_2}; & \bar{v}_{BA} &= ab \cdot \mu_v; & a_{BA}^{\tau} &= nb' \cdot \mu_a; \\ a_{c_2} &= P'c_2 \cdot \mu_a \end{aligned}$$

Кінестатичне дослідження починають з найбільш віддаленої від ведучої ланки, так званої, **групи Ассура**, яка в цьому випадку є найпростішою в плоских механізмах, **діадою**, що складається із **шатуна AB** (ланка 2) і **повзуна B** (ланка 3) (рис. 3.55).

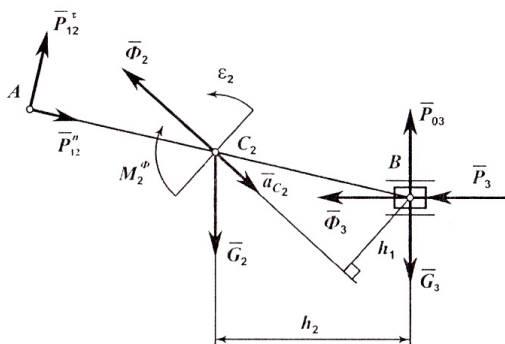


Рис. 3.55

Покажемо **реакції в'язей**: у точці A діє реакція \bar{R}_{12} , яка розкладена на дві складові вздовж осі шатуна \bar{R}_{12}^n і перпендикулярно шатуна \bar{R}_{12}^{τ} ; в точці B діє нормальна реакція напрямної \bar{R}_{03} (тертя ковзання не враховано). Усі **реакції в'язей**

невідомі і *потребують визначення*, що і є однією із основних задач кінетостатичного або *силового аналізу*.

Визначимо і умовно прикладемо фіктивні *вектори сил інерції і моменти сил інерції*: вектор сили інерції шатуна $\bar{\Phi}_2 = -m_2 \bar{a}_{c_2}$, прикладений в центрі мас шатуна C_2 і напрямлений протилежно вектору прискорення; момент сил інерції шатуна $M_2^\phi = -I_{c_2} \cdot \varepsilon_2$, спрямований протилежно напрямку кутового прискорення ε_2 ; вектор сили інерції повзуна $\bar{\Phi}_3 = -m_3 \bar{a}_B$, напрямлений протилежно вектору прискорення повзуна (точка B).

Таким чином, ця група Ассура (шатун і повзун) перебувають умовно в рівновазі під дією плоскої системи довільних сил: $\bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{12}^r, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3, \bar{P}_3, \bar{R}_{03}$ і моменту сил інерції шатуна M_2^ϕ .

Невідомі реакції $\bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{12}^r$ і \bar{R}_{03} знаходяться таким чином. Складають рівняння рівноваги групи як суму моментів сил відносно точки B (рис. 3.55):

$$G_2 \cdot h_2 - \Phi_2 \cdot h_1 - M_2^\phi - R_{12}^r \cdot AB = 0.$$

З цього рівняння знаходять одне невідоме – дотичну складову реакції R_{12}^r .

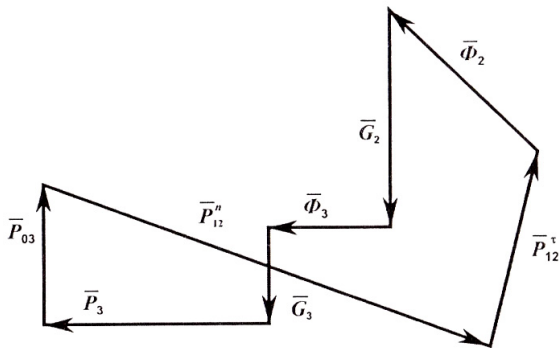


Рис. 3.56

Потім будують силовий багатокутник усіх сил (рис. 3.56), який за умовами рівноваги повинен бути замкненим, звідки і знаходять невідомі реакції \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{03} .

Для цього відкладають послідовно у певному масштабі відомі сили: \bar{R}_{12}^r , \bar{G}_2 , \bar{G}_3 , $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$, \bar{P}_3 .

Через початок сили \bar{R}_{12}^r проводять пряму, паралельну напрямку вектора шуканої сили \bar{R}_{12}^n , а через кінець вектора сили \bar{P}_3 проводять пряму, яка паралельна напрямку вектора невідомої реакції \bar{R}_{03} до перетину в точці напрямів цих векторів.

Отримують замкнений багатокутник, з якого обчислюють величини реакцій \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{03} , помноживши заміряну довжину відрізка зі схеми на відповідний масштабний коефіцієнт сили.

Після цього розглядають *динаміку ведучої ланки* – кривошипа 1 під дією прикладених сил і фіктивних сил інерції (рис. 3.57).

Серед сил, прикладених до ведучою ланки, є такі: вага $G_1 = m_1 g$; зрівноважувальний момент M_{3p} ; реакції в'язі в точці A: $\bar{R}_{21}^n = -\bar{R}_{12}^n$, $\bar{R}_{21}^r = -\bar{R}_{12}^r$; реакції підшипника в точці O: \bar{X}_0 та \bar{Y}_0 ; сила інерції кривошипа $\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_{c1}$.

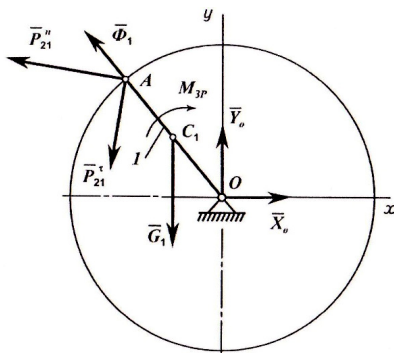


Рис. 3.57

Невідомими є зрівноважувальний момент M_{3p} і реакції опори \bar{X}_0 , \bar{Y}_0 .

Для цієї плоскої системи довільних сил складають три рівняння рівноваги на підставі відомих умов рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0.$$

Можна застосувати й інший, більш простий метод. Спочатку необхідно скласти суму моментів усіх сил відносно центра O : $\sum m_0(\bar{F}_k) = 0$. У це рівняння не потрапляють дві інші невідомі \bar{X}_0 і \bar{Y}_0 , тому маємо рівняння з одним невідомим і із нього знаходимо зрівноважувальний момент M_{zp} . Потім складаємо векторне рівняння рівноваги сил ведучої ланки 1:

$$\bar{P}_{21}^n + \bar{P}_{21}^r + \bar{\Phi}_1 + \bar{G}_1 + \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 = 0.$$

Будуємо на підставі цього векторного рівняння багатокутник сил в масштабі, що діють на ведучу ланку 1 (аналогічно багатокутнику на рис. 3.56), з якого знаходимо величини і напрями реакцій \bar{X}_0 і \bar{Y}_0 . Задача кінетостатичного аналізу механізму вирішена.

3.10.4. Визначення динамічних реакцій підшипників

Допустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі z зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 3.58). Визначимо динамічні реакції від сил інерції тіла. Якщо до кожної точки тіла прикласти відповідну силу інерції $\bar{\Phi}_k$, то тіло умовно перебуватиме у стані рівноваги під дією просторової системи довільних сил.

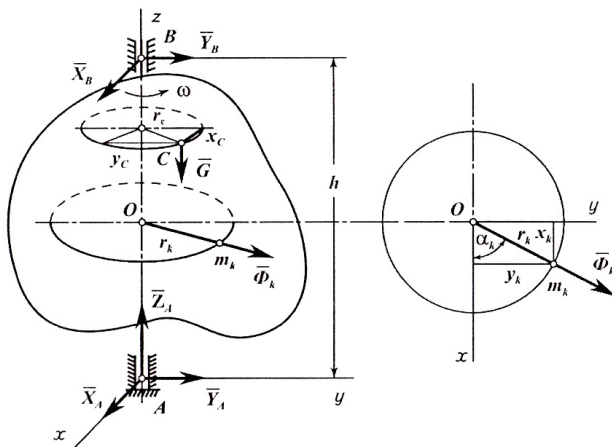


Рис. 3.58

На рисунку показано: $G = mg$ – сила ваги тіла; m – маса тіла; h – вертикальна відстань між опорами A і B ; $\bar{\Phi}_k$ – сила інерції k -ї точки; x_c, y_c – координати центра мас C , де прикладена сила ваги.

Оскільки кутова швидкість є сталою величиною, то тангенціальна складова сил інерції дорівнює нулю. Динамічні доданки створює відцентрова сила, яка в кожній точці дорівнює $|\bar{\Phi}_k| = m_k \omega^2 r_k$.

$$\cos \alpha_k = \frac{x_k}{r_k}, \quad \sin \alpha_k = \frac{y_k}{r_k}.$$

Складемо шість рівнянь рівноваги на підставі принципу д'Аламбера:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= 0 & x_A + x_B + \sum \Phi_{kx} &= 0, \\ 2. \sum F_{ky} &= 0 & y_A + y_B + \sum \Phi_{ky} &= 0, \\ 3. \sum F_{kz} &= 0 & z_A - G &= 0, \\ 4. \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0 & -G \cdot y_c - y_B \cdot h - \sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) &= 0, \\ 5. \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0 & G \cdot x_c + x_B \cdot h + \sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) &= 0. \\ 6. \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.235)$$

У шостому рівнянні сума моментів відносно осі тотожно дорівнює нулю, тому що всі сили паралельні або перетинають вісь обертання.

Визначимо проекцію головного вектора сил інерції на вісь x :

$$\sum \Phi_{kx} = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha_k = \sum m_k \omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum m_k \omega^2 x_k = \omega^2 \sum m_k x_k = \omega^2 m \cdot x_c.$$

Аналогічно і на вісь y $\sum \Phi_{ky} = \omega^2 m \cdot y_c$.

Визначимо моменти від сил інерції відносно осей x і y :

$$\begin{aligned} \sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) &= -\sum m_k \omega^2 y_k z_k = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k = -\omega^2 \cdot I_{yz}, \\ \sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) &= \sum \Phi_{kx} \cdot z_k = \sum m_k \omega^2 x_k z_k = \omega^2 \sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz}, \end{aligned}$$

де I_{xz}, I_{yz} – відцентрові моменти інерції тіла.

Остаточно, після підстановки визначених сил інерції і моментів інерційних сил рівняння для динамічних реакцій набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x_A + x_B + \omega^2 m x_c = 0, \\
 2. \quad & y_A + y_B + \omega^2 m y_c = 0, \\
 3. \quad & z_A - G = 0, \\
 4. \quad & -G \cdot y_C - y_B \cdot h - \omega^2 I_{yz} = 0, \\
 5. \quad & G \cdot x_C + x_B \cdot h + \omega^2 I_{xz} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.236}$$

З рівнянь (3.236) можна визначити динамічні реакції, якщо відомі координати центра мас x_C, y_C і відцентрові моменти інерції тіла I_{xz}, I_{yz} .

А шукані реакції, як можна побачити з системи рівнянь, залежать від квадрата кутової швидкості тіла ω^2 .

Статичними реакціями є ті, що залишаються, якщо $\omega = 0$ (спокій).

Динамічні ж реакції можуть бути значно більші, ніж статичні, і це залежить не тільки від величини кутової швидкості ω , але і від геометричних і масових характеристик тіла x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} , які визначають розподіл маси тіла відносно осі обертання z і асиметрію мас відносно двох осей.

З аналізу рівнянь (3.236) випливає, що динамічні реакції опор, які виражаються останніми доданками в рівняннях 1, 2, 4, 5, будуть відсутні, якщо виконуються умови:

$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0. \tag{3.237}$$

Перші дві умови (3.237) означають, що центр ваги або центр мас розміщений на осі обертання, а останні дві умови свідчать про те, що вісь z є головною віссю інерції.

Таким чином, для знешкодження динамічних реакцій на опорах (підшипниках) необхідно, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції тіла для початку координат.

Сили інерції усіх точок при цьому врівноважуються, а вісь обертання буде вільною віссю обертання.

Тіла, які обертаються навколо осі і у яких реакції опор не залежать від величини кутової швидкості і кутового прискорення, називаються динамічно зрівноваженими.

3.10.5. Поняття про статичне і динамічне балансування

Тіло, що має вісь обертання, вважається статично збалансованим, якщо головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а це є наслідком того, що координати центра ваги дорівнюють нулю ($x_C = 0$ і $y_C = 0$), а вісь обертання перетинає центр ваги (центр мас) тіла. Під час обертання таке тіло (ротор, барабан) зупиняється кожен раз у байдужому положенні. Це можливо при статично збалансованому тілі.

Для досягнення статичного зрівноважування (збалансування), якщо центральна вісь паралельна осі обертання, досить до тіла додати деяку масу на певному радіусі або висвердлити таку саму масу і вісь обертання буде центральною віссю.

Але для повного збалансування необхідно виконати і другу пару умов (3.237). Відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz} , якщо тіло обертається відносно осі z , характеризують асиметрію тіла навколо осі обертання.

Якщо тіло статично збалансоване ($x_C = 0$; $y_C = 0$), але насаджене на вал з перекосом, тобто, площина його симетрії не перпендикулярна осі обертання, то тіло не буде динамічно збалансованим.

Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноваженим. І тільки тоді, коли тіло зрівноважене динамічно ($I_{xz} = 0$; $I_{yz} = 0$), воно збалансоване і статично (повне зрівноважування). Останнє означає, що динамічні додатки реакцій опор дорівнюють нулю.

Якщо тіло динамічно або моментно не збалансоване, то осі A_x , A_y і A_z (рис. 3.58) не будуть головними осями інерції. Як наслідок цього, в опорах створюється пара сил реакцій, реактивний момент якої необхідно зрівноважувати. А пару сил можна зрівноважити тільки парою. Тому в двох спеціально підібраних площинах

корекції приєднують дві маси. Але все це виконується на спеціальних балансувальних верстатах, про що детально розповідається в курсах теорії механізмів і машин.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
2. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип Д'Аламбера – формальним?
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.
4. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
5. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?
6. На підставі якого принципу відбувається кінетостатичне дослідження механізму?
7. Який порядок приймається під час дослідження механізму?
8. Як визначаються динамічні реакції підшипників?
9. Назвіть умови динамічної зрівноваженості обертового тіла.
10. Що таке статичне балансування? Чому саме динамічне балансування є достатнім для повної зрівноваженості обертового тіла?

3.11. Елементарна теорія удару

3.11.1. Явище удару, ударний імпульс

Рух твердого тіла у звичайних обставинах під дією прикладених сил характеризується безперервною повільною зміною модулів і напрямів швидкостей точок.

Проте, зустрічаються випадки, коли швидкості, а, внаслідок цього, і кількість руху твердого тіла за дуже малий проміжок часу одержують значні прирости.

Явище, за яким за дуже малий проміжок часу τ (частка секунди) швидкості точок тіла змінюються на кінцеві величини, називається ударом.

Приклади: удар молота об ковадлу, удар рухомої маси копра об торець палі під час будівництва, удар м'яча об штангу воріт у футболі, удар більярдних куль тощо.

Оскільки модулі сил взаємодії під час удару досить великі і швидкозмінні, то в теорії удару за міру взаємодії приймають ударний імпульс. Імпульс сил під час удару є кінцевою величиною:

$$\bar{S}_{y\delta} = \int_0^{\tau} \bar{P}_{y\delta} dt = \bar{P}_{y\delta}^{cp} \cdot \tau, \quad (3.238)$$

де $\bar{S}_{y\delta}$ – ударний імпульс; $\bar{P}_{y\delta}^{cp}$ – середнє значення сили за час удару; τ – час удару.

3.11.2. Дія ударної сили на матеріальну точку.

Основна теорема теорії удару

Розглянемо матеріальну точку M , яка рухається за траєкторією AB під дією звичайної сили \bar{F} (рис. 3.59). Далі, в положенні M_1 і момент t_1 на точку почала діяти ударна сила $\bar{P}_{y\delta}$ протягом часу τ .

Траєкторія руху точки різко змінюється, замість подальшого руху за кривою M_1B , точка рухатиметься за кривою M_1B_1 .

Позначимо імпульс сили \bar{F} літерою \bar{S} , а ударної сили $\bar{P}_{y\delta}$ – $\bar{S}_{y\delta}$. Тоді за теоремою про зміну кількості руху точки запишемо:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{S}_{y\delta} + \bar{S},$$

де \bar{F} – рівнодійна активних сил, прикладених до рухомої точки;

t_1 – час, коли точка прийшла у положення M_1 , де була прикладена ударна сила $\bar{P}_{y\delta}$;

$\bar{P}_{y\delta}$ – ударна сила; τ – час удару;

$\bar{S}_{y\delta}$ – ударний імпульс;

\bar{S} – імпульс звичайної сили \bar{F} за час удару;

\bar{u} – швидкість точки після удару $v_2 = u$.

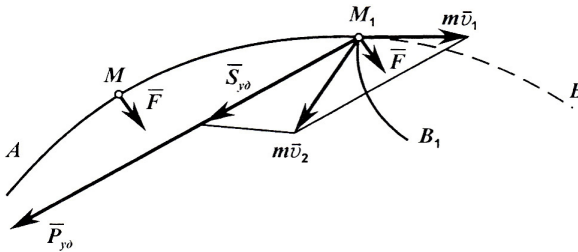


Рис. 3.59

Імпульс \bar{S} звичайної сили \bar{F} за дуже малий час τ (0,1 ... 0,001с) є величиною другого порядку мализни, тому ним можна знехтувати.

Основне рівняння теорії удару матиме вигляд:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}_{y\delta}, \quad (3.239)$$

де \bar{v} – швидкість точки до удару.

Відмітимо, що переміщення точки під час удару є досить малою величиною, $S = v_{cp}\tau$, тому ним теж можна знехтувати.

У точці M_1 відбувається миттєва зміна траєкторії. Після припинення дії ударної сили точка рухатиметься як і раніше під дією звичайної сили \bar{F} вздовж нової траєкторії.

Висновки:

- дією не ударних сил під час удару можна нехтувати;
- переміщення точки під час удару дуже мале, його можна не враховувати;
- результат дії ударної сили на матеріальну точку виражається зміною вектора швидкості за основним рівнянням теорії удару (3.239):

$$\bar{u} - \bar{v} = \frac{S_{y0}}{m}. \tag{3.240}$$

3.11.3. Загальні теореми теорії удару

Матеріальна система складається з n матеріальних точок. Обираємо точку M_k з масою m_k , на яку діють ударні імпульси, котрі поділяємо на зовнішні з рівнодійною \bar{S}_k^e і внутрішні з рівнодійною \bar{S}_k^{in} .

Позначимо:

\bar{u}_k – швидкість точки після дії ударних імпульсів;

\bar{v}_k – швидкість точки M_k до дії ударних імпульсів.

1. Згідно з виразом (3.239) основна теорема теорії удару для k -ї точки системи може бути записана так:

$$m_k(\bar{u}_k - \bar{v}_k) = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^{in}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.241}$$

Просумуємо вираз (3.241) за всіма точками:

$$\sum m_k \bar{u}_k - \sum m_k \bar{v}_k = \sum \bar{S}_k^e + \sum \bar{S}_k^{in}, \tag{3.242}$$

де $\sum m_k \bar{u}_k = \bar{K}$ – кількість руху матеріальної системи після удару;

$\sum m_k \bar{v}_k = \bar{K}_0$ – кількість руху матеріальної системи до удару;

$\sum \bar{S}_k^e$ – геометрична сума зовнішніх ударних імпульсів;

$\sum \bar{S}_k^{in} = 0$ – геометрична сума внутрішніх ударних імпульсів (вони входять до системи попарно, як дія і протидія, тому ця сума дорівнює нулю).

Враховуючи останні позначення, можна рівняння (3.242) записати у такому вигляді:

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}_k^e. \quad (3.243)$$

Рівняння (3.243) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної системи під час удару:

Зміна кількості руху матеріальної системи під час удару дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.

Рівняння (3.243) в проекціях на координатні осі має вигляд:

$$\begin{cases} K_x - K_{ox} = \sum S_{kx}^e; \\ K_y - K_{oy} = \sum S_{ky}^e; \\ K_z - K_{oz} = \sum S_{kz}^e. \end{cases} \quad (3.244)$$

Зміна проекції кількості руху системи на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту саму вісь усіх зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до системи.

Врахуємо, що кількість руху матеріальної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= M \cdot \bar{u}_c, \\ \bar{K}_0 &= M \cdot \bar{v}_c, \end{aligned} \quad (3.245)$$

де M – маса системи; \bar{u}_c – вектор швидкості центра мас системи після удару; \bar{v}_c – вектор швидкості центра мас системи до удару.

Враховуючи вирази (3.245), рівняння (3.243) і (3.244) набувають вигляду:

$$M \cdot \bar{u}_c - M \cdot \bar{v}_c = \sum \bar{S}_k^e, \quad (3.246)$$

$$\begin{cases} M \cdot u_{cx} - M \cdot v_{cx} = \sum S_{kx}^e; \\ M \cdot u_{cy} - M \cdot v_{cy} = \sum S_{ky}^e; \\ M \cdot u_{cz} - M \cdot v_{cz} = \sum S_{kz}^e. \end{cases} \quad (3.247)$$

За відсутності зовнішніх ударних імпульсів ($\sum \bar{S}_k^e = 0$) кількість руху і швидкість центра мас зберігають свої значення:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \bar{K}_0; \\ \bar{u}_c &= \bar{v}_c. \end{aligned} \quad (3.248)$$

Під час дії на матеріальну систему лише внутрішніх ударних імпульсів кількість руху системи зберігається, внаслідок чого швидкість центра мас системи буде величиною сталою.

2. Як можна побачити, в лівій частині виразу (3.242) – вектори кількості руху довільної точки після удару і на початку удару. Справа – імпульси сил. Візьмемо момент цих векторів відносно будь-якого центра O за теоремою Варіньона. Додамо ці вирази за всіма точками системи:

$$\sum \bar{m}_0(m_k \bar{u}_k) - \sum \bar{m}_0(m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{m}_0(S_k^e) + \sum m_0(S_k^{in}).$$

Суми, що ліворуч, є головними моментами кількості руху системи відносно точки O в кінці і на початку удару, які позначимо \bar{L}_1 і \bar{L}_0 . Суми, що праворуч, – моменти зовнішніх і внутрішніх ударних імпульсів, остання сума дорівнює нулю згідно з властивостями внутрішніх сил і ударних імпульсів. Остаточна теорема про зміну моменту кількості руху системи під час удару має вигляд:

$$\bar{L}_1 - \bar{L}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{S}_k^e). \quad (3.249)$$

У проекціях на осі прямокутної системи декартових координат:

$$\begin{aligned} L_{1x} - L_{0x} &= \sum m_x(S_k^e), \\ L_{1y} - L_{0y} &= \sum m_y(S_k^e), \end{aligned}$$

$$L_{1z} - L_{0z} = \sum m_z (S_k^e).$$

Зміна під час удару головного моменту кількості руху системи відносно довільного центра або осі дорівнює сумі моментів діючих на систему зовнішніх ударних імпульсів відносно того самого центра або осі.

З рівняння (3.249) випливає: якщо $\sum \bar{m}_0 (S_k^e) = 0$, то головний момент кількості руху або його проекція на вісь зберігають свої значення:

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_0; \quad L_{1x} = L_{0x}.$$

3.11.4. Коефіцієнт відновлювання під час удару

Величина ударного імпульсу в момент удару двох тіл залежить не тільки від мас і швидкостей, але і від пружних властивостей матеріалів, з яких виготовлені ці тіла, що враховується, так званим, коефіцієнтом відновлювання під час удару.

Позначимо: \bar{v} – швидкість тіла до удару; \bar{u} – швидкість тіла після удару.

Розрізняють дві фази удару (рис. 3.60):

I фаза тривалістю τ_1 , коли швидкість тіла змінюється від початкової швидкості \bar{v} до нуля (кінетична енергія перетворюється у потенціальну, тіло отримує пружні деформації);

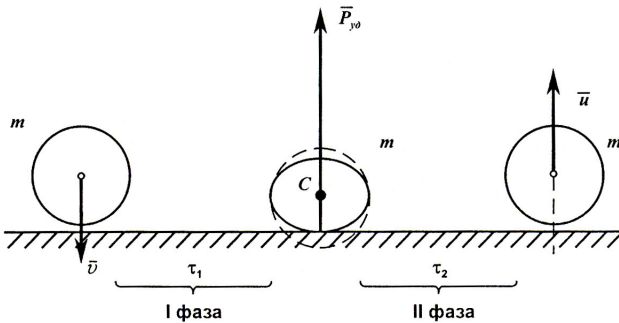


Рис. 3.60

II фаза тривалістю τ_2 , коли швидкість тіла відновлюється від нуля до \bar{u} (потенціальна енергія знову перетворюється у кінетичну, тіло під дією сил пружності (сил міжмолекулярної взаємодії) майже цілком відновлює свою форму).

Значимо, що повна механічна енергія тіла $T + \Pi$ цілком не відновлюється, оскільки частково втрачається на залишкові деформації і розсіювання тепла у зовнішній простір ($\bar{u} < \bar{v}$).

Відношення модуля швидкості тіла після удару до модуля швидкості тіла до удару називається коефіцієнтом відновлення під час удару:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (3.250)$$

Наведемо значення коефіцієнта відновлення для деяких матеріалів:

деревина –	$k = \frac{1}{2};$	слонова кістка –	$k = \frac{8}{9};$
сталь –	$k = \frac{5}{9};$	скло –	$k = \frac{15}{16}.$

Зміна кількості руху за кожен фазу удару характеризується відповідним імпульсом ударної сили:

$$mv = S_I, \quad mu = S_{II}.$$

Тоді
$$k = \frac{u}{v} = \frac{mu}{mv} = \frac{S_I}{S_{II}}. \quad (3.251)$$

Коли $k \approx 1$; $S_{II} \approx S_I$ і $u \approx v$, тобто, під час гіпотетичного абсолютно пружного удару кінетична енергія зберігається, а коефіцієнт відновлення дорівнює відношенню ударних імпульсів за I і II фази.

Коефіцієнт відновлення характеризує пружні властивості тіл, що взаємно вдаряються. Коефіцієнт відновлення визначається за допомогою експерименту (рис. 3.61): виготовляють кульку і плиту з одного матеріалу, потім кулька вільно падає на плиту з певної висоти H , яку попередньо вимірюють за допомогою

вертикальної рейки зі шкалою, і визначають висоту h , на яку кулька піднялась після удару.

За формулою Галілея виражають швидкості кульки до і після удару через висоти H і h :

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2gH} \\ u &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \right\}, \quad (3.252)$$

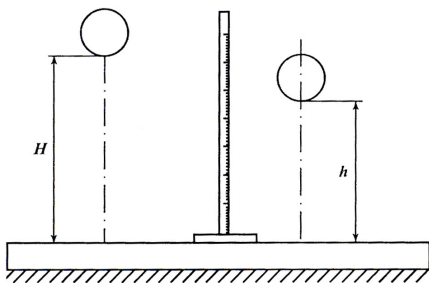


Рис. 3.61

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (3.253)$$

Теоретично можна виділити *два граничних випадки*: якщо k дорівнює одиниці, то удар вважається абсолютно пружним, якщо $k = 0$, то удар називається абсолютно непружним.

У реальних умовах $0 < k < 1$. У розрахунках, як правило, вважають, що k залежить тільки від матеріалу тіл. У дійсності k , коефіцієнт відновлювання, незначно залежить і від форми тіл, і від співвідношення мас тіл, що взаємно вдаряються.

3.11.5. Удар тіла об нерухому плитку

Розглянемо тіло (кулю) масою M , яке падає на нерухому плитку (рис. 3.62). Ударною силою, що діє на тіло, буде реакція плити, імпульс якої позначимо через \bar{S} . Нехай *нормаль* до поверхні тіла в точці його дотику з плитою *перетинає центр мас* тіла – такий *удар називається центральним*. Якщо *вектор*

швидкості \bar{v} центра мас тіла на початку удару спрямований за нормаллю до плити, то такий удар називається *прямим* ($\alpha = 0^\circ$), в іншому випадку – *косий*.

Розглянемо прямий центральний удар. Запишемо основне рівняння теорії удару:

$$M(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{S}.$$

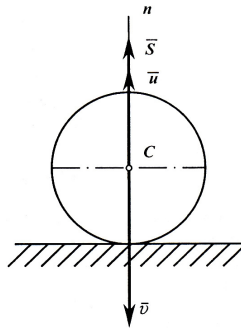


Рис. 3.62

Спроектуємо вектори цього рівняння на нормаль:

$M(u_n - v_n) = S_n$, але $u_n = u$; $v_n = -v$; $S_n = S \Rightarrow M(u + v) = S$;
 $u = kv$ і остаточно маємо:

$$Mv(k + 1) = S. \quad (3.254)$$

Знаючи M , v , k , можна із виразу (3.254) визначити ударний імпульс:

$$S = M(k + 1)v.$$

Як можна побачити, ударний імпульс буде тим більший, чим більший коефіцієнт відновлювання.

Приклад 3.18

Під час падіння сталеві кульки вагою $10H$ з висоти $H = 3\text{ м}$ на сталеву плиту (коефіцієнт відновлювання $k = 5/9$) виникає ударний імпульс.

Визначити величину ударного імпульсу і середню ударну реакцію, якщо час удару $\tau = 0,0005$ с.

Розв'язання

Запишемо вираз (3.254):

$$S = Mv(k + 1).$$

Визначимо швидкість до удару:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot g \cdot 3} = 7,7 \text{ м/с}.$$

Визначимо ударний імпульс:

$$S = Mv(k + 1) = \frac{10}{g}(5/9 + 1) = 12 \text{ Нс}.$$

Середня сила реакції під час удару:

$$N_{cp} = \frac{S}{\tau} = \frac{12}{0,0005} = 24000 \text{ Н} = 24 \text{ кН}.$$

3.11.6. Прямий центральний удар двох тіл

Якщо два тіла взаємно вдаряються, то *удар називається прямим*, якщо *загальна нормаль* до поверхонь тіл у точці дотику *проходить через їх центри мас*.

Удар називається центральним, якщо *швидкості центрів мас тіл* на початку удару *спрямовані за цією загальною нормаллю* (рис. 3.63).

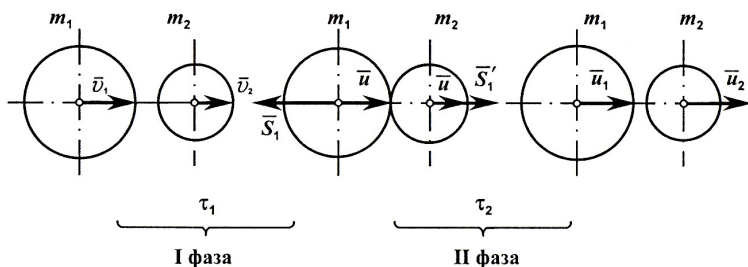


Рис. 3.63

Нехай маси тіл дорівнюють m_1 і m_2 . Швидкості тіл на початку удару дорівнюють, відповідно, v_1 і v_2 . Удар відбудеться, якщо $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$. Перша фаза удару – від моменту дотику доти, доки швидкості тіл не зрівняються. Друга фаза удару – від моменту, коли швидкості обох тіл зрівнялись, до моменту, коли тіла роз'єднуються або рухаються разом $\bar{u}_1 \leq \bar{u}_2$.

Задача полягає в тому, щоб за відомим коефіцієнтом відновлювання k обчислити швидкості тіл після удару u_1 і u_2 . У такому випадку на систему діють лише внутрішні ударні імпульси, причому вони дорівнюють за модулем $|\bar{S}_1| = |\bar{S}'_1|$, як дія і протидія.

На підставі закону про збереження, кількість руху системи за I фазу удару залишається сталою (зовнішні сили відсутні):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

звідки:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.255)$$

де u – швидкість обох тіл наприкінці I фази удару.

Визначимо ударні імпульси, які діють на маси m_1 і m_2 за I фазу удару:

$$m_1 u - m_1 v_1 = -S_I, \quad m_2 u - m_2 v_2 = S_I \left. \vphantom{m_1 u - m_1 v_1} \right\}. \quad (3.256)$$

У друге рівняння (3.256) підставимо значення швидкості u згідно з виразом (3.255):

$$S_I = m_2 u - m_2 v_2 = m_2 \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \right) = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3.257)$$

Враховуючи, що $S_{II} = k \cdot S_I$ (3.251), визначимо повний ударний імпульс S :

$$S = S_I + S_{II} = (1 + k) \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3.258)$$

Для другої фази удару, коли швидкості опинилися, відповідно, u_1 і u_2 , можна записати:

$$\left. \begin{aligned} m_1 u_1 - m_1 u &= -S_{II} \\ m_2 u_2 - m_2 u &= S'_{II} \end{aligned} \right\},$$

або

$$\left. \begin{aligned} m_1 u_1 - m_1 u &= -kS \\ m_2 u_2 - m_2 u &= kS' \end{aligned} \right\}. \quad (3.259)$$

Поділимо рівняння (3.258) на рівняння (3.255):

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k; \quad \frac{u_2 - u}{u - v_2} = k.$$

З першого рівняння: $u_1 = u + ku - kv_1 = u(I + k) - kv_1$,

З другого рівняння: $u_2 = u + ku - kv_2 = u(I + k) - kv_2$.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + ku - kv_1 = u(I + k) - kv_1, \\ u_2 &= u + ku - kv_2 = u(I + k) - kv_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.260)$$

Якщо рівняння (3.260) почленно відняти, то отримаємо:

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2), \quad \text{звідки} \quad k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \quad (3.261)$$

Отже, коефіцієнт відновлювання під час удару двох тіл дорівнює відношенню відносних швидкостей тіл після удару і до удару.

Для визначення швидкості u_1 і u_2 розглянемо систему двох рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} &= k, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{aligned} \right. \quad (3.262)$$

Останнє рівняння системи (3.262) вказує на те, що зберігається кількість руху системи під час удару, оскільки відсутні зовнішні ударні імпульси.

Систему (3.262) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 = kv_1 - kv_2, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{cases} \quad (3.263)$$

Перше рівняння системи (3.263) помножимо на m_1 , а до другого додамо і віднімемо добуток $m_1 v_2$:

$$\begin{cases} m_1 u_2 - m_1 u_1 = m_1 k v_1 - m_1 k v_2, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 v_2 - m_1 v_2. \end{cases} \quad (3.264)$$

Якщо рівняння (3.264) почленно додати, то отримаємо:

$$u_2(m_1 + m_2) = m_1 v_1(1 + k) - m_1 v_2(1 + k) + v_2(m_1 + m_2), \text{ або}$$

$$u_2(m_1 + m_2) = (1 + k)m_1(v_1 - v_2) + v_2(m_1 + m_2), \text{ звідки}$$

$$u_2 = v_2 + \frac{(1 + k)m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \quad (3.265)$$

Якщо в системі (3.262) перше рівняння помножити на $(-m_2)$, а до другого додати і відняти $(m_2 v_1)$, то аналогічно отримаємо:

$$u_1 = v_1 - \frac{(1 + k)m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2). \quad (3.266)$$

Таким чином, швидкість другого тіла після удару збільшилась, а першого тіла – зменшилась.

Якщо удар двох тіл абсолютно непружний, $k = 0$, то швидкості тіл після удару дорівнюють:

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

і ударний імпульс:

$$S = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}.$$

Якщо удар двох тіл абсолютно пружний, $k = 1$, то швидкості тіл після удару дорівнюють, відповідно:

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad u_2 = v_2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

і ударний імпульс:

$$S = \frac{2m_1 \cdot m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

3.11.7. Втрата кінетичної енергії під час удару двох тіл. Теорема Карно

Розглянемо *абсолютно непружний* (пластичний) *удар* двох тіл, маси яких m_1 і m_2 , коли швидкості тіл після удару залишаються рівними u , а коефіцієнт відновлювання $k = 0$ (рис. 3.64).

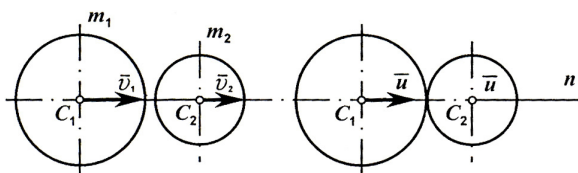


Рис. 3.64

Швидкості тіл до удару v_1 і v_2 ($v_1 > v_2$). Вісь \vec{n} – спільна нормаль до поверхні тіл у точці стикання.

Кінетична енергія тіл до удару:

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (3.267)$$

Кінетична енергія тіл після удару:

$$T_1 = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}. \quad (3.268)$$

Втрата кінетичної енергії під час удару:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \quad (3.269)$$

Під час удару двох тіл відсутні зовнішні ударні імпульси, тому кількість руху зберігається:

$$(m_1 + m_2) \cdot u = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (3.270)$$

Помножимо рівняння (3.270) на спільну швидкість тіла після удару u . З урахуванням рівняння (3.268) отримаємо:

$$(m_1 + m_2) \cdot u^2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cdot u = 2T_1. \quad (3.271)$$

Враховуючи рівняння (3.271), втрата кінетичної енергії згідно з виразом (3.269) дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_0 - T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - u(m_1 v_1 + m_2 v_2) + \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [(v_1^2 - 2v_1 u + u^2) m_1 + (v_2^2 - 2v_2 u + u^2) m_2] = \\ &= \frac{1}{2} [m_1 (v_1 - u)^2 + m_2 (v_2 - u)^2], \end{aligned} \quad (3.272)$$

де $\left. \begin{matrix} v_1 - u \\ v_2 - u \end{matrix} \right\}$ – втрачені швидкості тіла під час удару;

$\frac{m_1 (v_1 - u)^2}{2}$ – кінетична енергія першого тіла, яка відповідає

його втраченій швидкості;

$\frac{m_2 (v_2 - u)^2}{2}$ – кінетична енергія другого тіла, яка відповідає

його втраченій швидкості.

Втрата кінетичної енергії системи тіл під час абсолютно не пружного удару дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що відповідають втраченим швидкостям цих тіл.

Розглянемо окремий випадок не пружного удару, якщо друге тіло до удару перебувало у стані спокою ($v_2 = 0$), тоді із рівняння

$$(3.255) \text{ швидкість тіла після удару дорівнює } u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Кінетична енергія системи тіл після удару:

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot T_0, \quad (3.273)$$

де $T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ – кінетична енергія до удару.

Втрата енергії:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = T_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0. \quad (3.274)$$

Під час кування, коли втрачена енергія – це корисна енергія процесу кування, коефіцієнт корисної дії згідно з рівнянням (3.274) дорівнюватиме:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.275)$$

К.к.д. наближається до 1, якщо масою m_1 можна знехтувати, тобто, $m_2 \gg m_1$ (у 50 – 60 разів). Щоб вся енергія під час кування втрачалась на деформацію матеріалу, необхідно, щоб маса ковадла значно перевищувала масу штовхача (молота).

Під час забивання палі або цвяха необхідно, щоб їхня швидкість після удару була максимальною, тоді втрата кінетичної енергії під час удару зведеться до мінімуму. Коефіцієнт корисної дії при забиванні палі (цвяха) згідно з рівнянням (3.273) дорівнюватиме:

$$\eta = \frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.276)$$

К.к.д. наблизатиметься до одиниці, якщо $m_1 \gg m_2$, тобто, маса штовхача (молота) повинна значно (у 30–40 разів) перевищувати масу палі (цвяха), тоді паля (цвях) під час забивання не буде деформуватися.

Якщо удар не є абсолютно непружним (реальні тіла) і коефіцієнт відновлювання $k \neq 0$, то втрачена під час удару кінетична енергія дорівнює:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{m_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - u_2)^2}{2} \right]. \quad (3.277)$$

Під час абсолютно пружного удару ($k=1$) із виразу (31.40) видно, що $\Delta T=0$ – тобто, кінетична енергія під час абсолютно пружного удару зберігається.

Приклад 3.19

Визначити коефіцієнт корисної дії молота масою $m_1 = 4t$, який падає з висоти $2m$ на ковадло масою $m_2 = 36t$. Удар вважати абсолютно непружним, це процес кування, коефіцієнт відновлювання при цьому $k = 0$.

$$m_1 = 4t ; m_2 = 36t .$$

Запишемо вираз к.к.д. (3.275) для випадку кування:

$$\eta = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{36}{4 + 36} = 0,9 .$$

У такому випадку маса ковадла перевищувала масу молота у 9 разів, а якщо б – у 50 разів, то коефіцієнт корисної дії процесу кування дорівнював за цими параметрами цифрі 0,98, яка здається неймовірною.

3.11.8. Удар об обертове тіло

Розглянемо тіло, яке обертається навколо осі z (рис. 3.65). Нехай в деякий момент часу на тіло, закріплене у точці B за допомогою циліндричного шарніра, а в точці A – за допомогою підп'ятника, діє ударний імпульс \vec{S} . Під час удару в опорах A і B виникають реакції, які також мають характер ударних сил. За значного ударного імпульсу \vec{S} імпульсні реакції опор можуть досягати небезпечних значень з точки зору міцності підшипникових вузлів.

Виникає задача визначення ударних імпульсних реакцій, якщо задані динамічні характеристики тіла (маса, моменти інерції) і якщо відомий ударний імпульс.

Позначимо:

\bar{S} – ударний імпульс; ω_1 – кутова швидкість тіла до удару;
 ω_2 – кутова швидкість тіла після удару;

I_z – осьовий момент інерції маси тіла; v_{c_1} – швидкість центра мас (центра ваги) до удару; v_{c_2} – швидкість центра мас після удару;

G – вага тіла; m – маса тіла.

Якщо $\bar{K}_1 = m\bar{v}_{c_1}$ – кількість руху тіла до удару; $\bar{K}_2 = m\bar{v}_{c_2}$ – кількість руху тіла після удару, то, згідно з теоремою про зміну кількості руху тіла, можна записати:

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \bar{S}_{y\partial},$$

або

$$m\bar{v}_{c_2} - m\bar{v}_{c_1} = \bar{S}_{y\partial}. \quad (3.278)$$

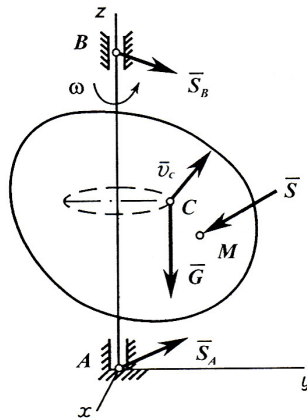


Рис. 3.65

Диференціальне рівняння обертального руху тіла у цьому випадку має вигляд:

$$I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = m_z(\bar{F}_{y\partial}), \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z d\omega = \int_0^{\tau} m_z(\bar{F}_{y\partial}) dt,$$

де τ – час удару. Після інтегрування останнього виразу маємо:

$$I_z(\omega_2 - \omega_1) = m_z(\bar{S}), \quad (3.279)$$

або
$$L_2 - L_1 = m_z(\bar{S}). \quad (3.280)$$

З рівняння (3.279) випливає:

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{m_z(\bar{S})}{I_z}. \quad (3.281)$$

Зміна кутової швидкості тіла під час удару дорівнює відношенню моменту від ударного імпульсу відносно осі до моменту інерції тіла відносно осі обертання.

Тоді кінцева кутова швидкість тіла після удару:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{m_z(\bar{S})}{I_z}. \quad (3.283)$$

3.11.9. Дія удару на вісь обертання тіла. Центр удару. Визначення імпульсних реакцій

Розглянемо тіло масою m , яке може обертатися навколо горизонтальної осі в точці O і на яке діє ударний імпульс \bar{S}_{y0} на відстані l від осі обертання. Ударний імпульс \bar{S}_{y0} спрямований перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання z і центр ваги тіла C . (рис. 3.66).

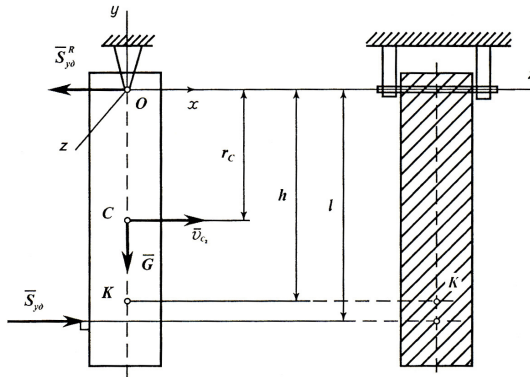


Рис. 3.66

ω_2 – кутова швидкість тіла після удару.

Зміна кількості руху системи дорівнює сумі імпульсів (теорема імпульсів):

$$m\bar{v}_{c_2} - m\bar{v}_{c_1} = \bar{S}_{y\partial} - \bar{S}_{y\partial}^R. \quad (3.284)$$

Враховуючи, що $\bar{v}_{c_2} = \omega_2 r_c$, $\bar{v}_{c_1} = 0$, рівність (3.283) набуває вигляду:

$$m\omega_2 r_c = S_{y\partial} - S_{y\partial}^R, \quad (3.285)$$

де r_c – відстань центра мас тіла від осі обертання.

Враховуючи вираз (3.279) і те, що $\omega_1 = 0$, $M_z(\bar{S}_{y\partial}^R) = 0$, рівність набуває вигляду:

$$I_z \omega_2 = S_{y\partial} l,$$

звідки:

$$S_{y\partial} = \frac{I_z \omega_2}{l}. \quad (3.286)$$

Підставимо вираз (3.286) у рівняння (3.285):

$$S_{y\partial}^R = S_{y\partial} - m\omega_2 r_c = \frac{I_z \omega_2}{l} - m\omega_2 r_c = \omega_2 \left(\frac{I_z}{l} - mr_c \right). \quad (3.287)$$

Вираз (3.287) використовується для визначення імпульсної (ударної) реакції опори в точці O .

Виникає питання: чи можна нанести удар на обертове тіло так, щоб імпульсна реакція $\bar{S}_{y\partial}^R$ дорівнювала нулю, тобто, щоб не виникали імпульсні реакції в опорах (підшипниках)?

Якщо $\bar{S}_{y\partial}^R = 0$, то вираз у дужках рівняння (3.287) повинен дорівнювати нулю:

$$\frac{I_z}{l} - mr_c = 0,$$

звідки:

$$l = \frac{I_z}{mr_c} = h. \quad (3.288)$$

Точка К, до якої прикладений ударний імпульс, який не викликає ударних реакцій в опорах, називається центром удару.

Відстань h від центра удару до осі обертання визначається за формулою (3.288).

Аналогічно визначається і зведена довжина фізичного маятника. Таким чином, для того, щоб під час удару об обертове тіло не виникали імпульсні реакції в опорах, необхідно виконувати наступні умови:

– удар має бути спрямований за перпендикуляром до площини, яка проходить через вісь обертання і центр ваги тіла;

– лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на відстань $h = \frac{I_z}{Mr_c}$ згідно з умовою (3.287), рис. 3.67.

– площина xOy (рис. 3.67), що містить ударний імпульс і яка перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з віссю z у точці O , для якої вісь обертання є головною віссю інерції.

Якщо вісь обертання перетинає центр мас, то $r_c = 0$ і $h = \infty$, тобто. будь-який удар буде передаватись на вісь обертання.

Приклад 3.20

Під час роботи необхідно тримати ручний молот за держак у тому місці, в якому точка, де відбувається удар, була б відносно руки центром удару, інакше держак буде «обпалювати» руку.

Приклад 3.21

Прямокутна пластина (двері) шириною b , закріплена в точці A за допомогою підп'ятника, а в точці B – за допомогою підшипника (рис. 3.67).

Визначити положення центра удару на пластині, якщо вона відкривається під дією ударного імпульсу.

Розглянемо умови, за якими ударний імпульс не передається на опори.

1. Ударний імпульс \bar{S} повинен бути перпендикулярний до площини пластини, що проходить через вісь обертання z і центр мас C .

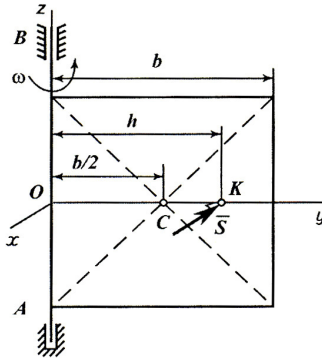


Рис. 3.67

2. Відстань $OK = h$ до центра удару визначається за формулою (3.287):

$$h = \frac{I_z}{m y_c},$$

де $I_z = \frac{mb^2}{3}$ – осьовий момент інерції маси дверей; m – маса дверей; $y_c = OC = \frac{b}{2} = r_c$ – координата центра мас.

Тоді:

$$h = \frac{mb^2 \cdot 2}{m3b} = \frac{2}{3}b.$$

Будь-який за величиною **ударний імпульс**, лінія дії якого перпендикулярна до площини пластини і яка **проходить через центр удару** в точці K на відстані від осі $h = \frac{2}{3}b$, **не передається на опори**: підп'ятник A і підшипник B захищені від ударних навантажень.

Приклад 3.22

Щоб руку не «обпалити» під час удару стрижня по нерухомій опорі (рис. 3.68), необхідно, щоб місце удару точка k відносно руки було центром удару (рука прикладається в точці A).

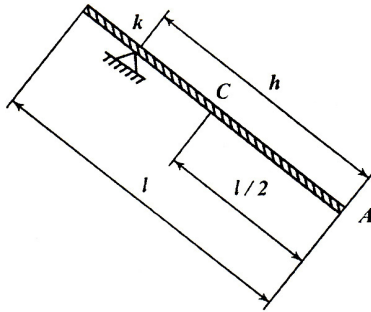


Рис. 3.68

Визначимо положення центра удару точки k на стрижні. Центр мас стрижня $r_c = \frac{l}{2}$. Момент інерції маси стрижня відносно осі, що проходить через точку A , дорівнює: $I_z = \frac{ml^2}{3}$.

Тоді на підставі формули (3.287) положення центра удару:

$$AK = h = \frac{I_z}{mr_c} = \frac{ml^2/3}{3ml} = \frac{2}{3}l.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему Карно про втрату кінетичної енергії для абсолютно непружних тіл.
2. Що таке втрачені швидкості і відповідна їм кінетична енергія?
3. Проведіть порівняльний аналіз втрат кінетичної енергії для абсолютно непружних і реальних тіл.
4. Чим суттєво відрізняється ситуація з точки зору к.к.д. під час забивання палі або цвяха і кування металу? Як тут збільшити к.к.д.?
5. Як змінюється кутова швидкість під час удару на обертовому тілі?
6. Що таке центр удару на обертовому тілі і як визначити його положення? Які умови відсутності ударного імпульсу на опорі?

РОЗДІЛ IV

ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Основи аналітичної механіки як науки були створені видатним французьким ученим Ж. Лагранжем, який опублікував у 1788 р. двотомний твір «Аналітична механіка». Він спирався на дослідження динаміки невідільної матеріальної системи і загальних принципів механіки Д. Бернуллі, Л. Ейлера, Ж. д'Аламбера. Подальший розвиток аналітичних методів теоретичної механіки в ХІХ ст. пов'язаний з працями М. Остроградського, К. Якобі, С. Пуассона, У. Гамільтона.

На думку Ж. Лагранжа, аналітичний розділ механіки є сукупністю загальних аналітичних методів розв'язування задач механіки вільних і невідільних матеріальних систем, що не ґрунтуються на геометричних, векторних уявленнях Ньютона. У сучасних умовах таке протиставлення позбавлене змісту, тому що зараз аналітичні методи і геометричні образи настільки взаємопов'язані, що їх важко відокремити.

Численні застосування в техніці мають теорія стійкості руху і теорія малих коливань механічних систем. Їхній розвиток – у працях П. Діріхле, Е. Рауса, М.Є. Жуковського, А. Пуанкаре. Визначальний внесок у розвиток теорії стійкості належить видатному російському механіку О.М. Ляпунову (кінець ХІХ ст.).

Основоположними поняттями цього розділу є уявлення про в'язі та їх класифікацію, про ідеальні в'язі, поняття про дійсні і можливі переміщення системи.

4.1. Аналітичні принципи Лагранжа

4.1.1. Механічні в'язі та їх рівняння. Класифікація в'язей

Матеріальна система, як відомо, є сукупністю матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємозумовлені. Класичним прикладом матеріальної системи є сонячна система.

Матеріальною системою є будь-який механізм, машина.

Якщо кожна точка матеріальної системи може займати у просторі довільне положення і мати будь-яку швидкість, то така система називається вільною.

Якщо положення і рух окремих точок системи обмежені, тобто, точки системи не можуть займати довільні положення і мати довільні швидкості, то таку систему називають *невільною*. Обмеження або умови, які накладені на систему, називаються *в'язями*. В'язі накладають обмеження на змінення швидкостей точок та їх координат.

Нехай система складається з n матеріальних точок. Декартові координати k -ї точки – x_k, y_k, z_k , проекції швидкості k -ї точки на осі координат – $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$. Якщо на систему накладені в'язі, то аналітично їх можна записати у вигляді рівняння, в яке можуть явно входити координати, проекції швидкостей і час:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) &\leq 0, \\ f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) &\geq 0. \end{aligned} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (4.1)$$

Аналізуючи рівняння (4.1), проведемо класифікацію в'язей.

1. Якщо функція, що математично описує в'язь, дорівнює нулю $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$, то таку в'язь називають утримувальною, двобічною. Якщо функція в'язі $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) < 0$ менша за нуль або більша за нуль $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) > 0$, то в'язь є неутримувальною, односторонньою.

2. Якщо в рівняння або нерівність в'язі (4.1) явно не входить час t , тобто, в'язь не залежить від часу $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) \leq 0$, то така в'язь називається стаціонарною, і, навпаки, – нестаціонарною, якщо функція в'язі залежить від часу.

3. Якщо в рівняння або нерівність в'язі (4.1) не входять проекції швидкостей точок $(\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)$, тобто, в'язь не залежить від швидкостей точок, то така в'язь називається геометричною (голономною) в'яззю $f(x_k, y_k, z_k, t) \leq 0$, а якщо залежить від швидкостей точок, то – кінематичною $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$

(диференціальною або неголономною). Якщо рівняння кінематичної в'язі інтегрується, то таке первісне рівняння називають рівнянням голономної в'язі.

Таким чином, якщо матеріальна система має геометричні, стаціонарні і утримувальні в'язі, то їх рівняння мають такий вигляд:

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Приклади в'язей

1. Дві точки з координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ з'єднані жорстким стрижнем довжиною l . Написати рівняння в'язі (рис. 4.1).

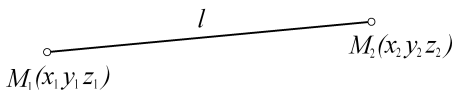


Рис. 4.1

Умова збереження відстані між двома точками (абсолютно тверде тіло) може бути записана так:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0. \quad (4.2)$$

Подібна в'язь згідно з рівнянням (4.2) є утримувальною, стаціонарною, геометричною.

2. Дві точки з координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ з'єднані гнучкою ниткою довжиною l (рис. 4.2).

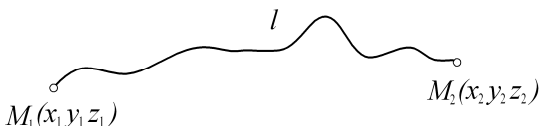


Рис. 4.2

Відстань між точками не може бути більшою, ніж довжина нитки. Така умова виражається нерівністю:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0. \quad (4.3)$$

Ця в'язь є неутримувальною, стаціонарною, геометричною.

3. Дві точки з'єднані пружиною, надітою на стрижень, довжина пружини змінюється за законом $l = l_1 + l_0 \sin kt$ (рис. 4.3).

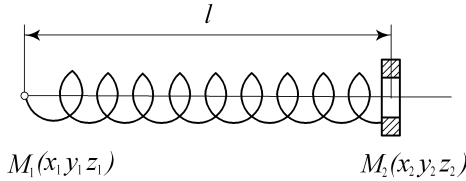


Рис. 4.3

Запишемо рівняння в'язі

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin kt)^2 = 0. \quad (4.4)$$

Подібна в'язь є утримувальною, нестаціонарною, геометричною.

4. Задана схема кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.4).

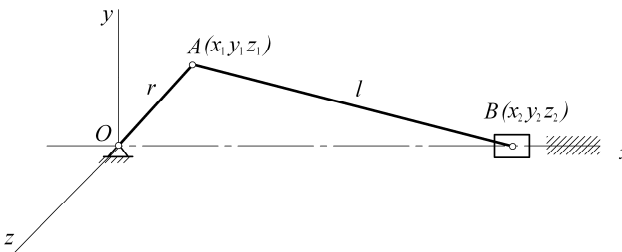


Рис. 4.4

Запишемо рівняння в'язей, накладених на механізм:

$z_1 = 0$; $z_2 = 0$ – в'язі означають, що механізм є плоским, бо всі його точки рухаються в площині xOy ;

$y_2 = 0$ – в'язь означає, що повзун B рухається вздовж осі x ;

$x_1^2 + y_1^2 + r^2 = 0$ – в'язь свідчить, що відстань $OA = l$ зберігається і точка рухається за колом радіуса r ;

$(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 - l^2 = 0$ – в'язь характеризує незмінність відстані шатуна $AB = l$ як твердого тіла.

Накладені на механізм в'язі є утримувальними, стаціонарними, геометричними.

4.1.2. Можливі переміщення системи. Ступінь вільності матеріальної системи

Однією із важливих категорій аналітичної механіки є поняття про можливі переміщення матеріальної системи.

Можливими переміщеннями системи називають таку сукупність уявних нескінченно малих переміщень точок системи, які не суперечать в'язям, накладеним на систему, і відбуваються миттєво, у деякий фіксований момент часу.

Позначаються можливі переміщення $\delta \vec{r}_k$, вони спрямовані у бік можливих переміщень точок прикладання сил уздовж векторів можливих швидкостей точок.

Можливі переміщення мають задовольняти двом основним умовам:

1) можливі переміщення мають бути нескінченно малими, щоб не порушувались умови рівноваги і характер руху;

2) можливі переміщення не мають руйнувати в'язі, накладені на систему.

Дійсні переміщення відповідають реальному закону руху системи під дією прикладених сил. Дійсні переміщення, які відбуваються під дією прикладених сил за деякий елементарний проміжок часу dt , можуть збігатися з можливими. Таке відбувається у випадку стаціонарних в'язей, у такому випадку дійсне переміщення збігається з одним із можливих переміщень.

На відміну від дійсних, можливі переміщення розглядаються незалежно від діючих сил, закону руху системи і є сукупністю

ув'язних, миттєвих, одночасних переміщень точок системи, сумісних із в'язями.

Можливе переміщення – це деякий геометричний образ, не пов'язаний ні з рухом, ні зі зміненням в'язі, серед яких навіть нестационарні в'язі вважаються «зупиненими».

Дійсні переміщення $d\bar{r}$ характеризуються елементарними приростами радіусів-векторів $\bar{r}_k = \bar{r}_k(x_k, y_k, z_k, t)$ точок системи протягом часу із точністю до малих другого порядку мализни і визначаються диференціалами:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt.$$

Можливі переміщення – це елементарні прирости радіусів-векторів точок, спричинені зміною координат x_k, y_k, z_k незалежно від часу t , тобто, у фіксований момент часу. Вони називаються *ізохронними варіаціями координат* $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} \delta z_k.$$

На відміну від дійсних переміщень, у випадку можливих переміщень варіація часу дорівнює нулю ($\delta t = 0$).

У випадку нестационарних в'язей дійсні переміщення системи не належать до числа її можливих переміщень.

У загальному випадку для точок і тіл матеріальної системи може існувати безліч різних можливих переміщень. Проте, для кожної системи, залежно від характеру накладених в'язей, можна вказати певну кількість таких незалежних між собою можливих переміщень, що всяке інше можливе переміщення можна однозначно виразити через ці незалежні.

Кількість незалежних між собою можливих переміщень системи, які можна надати її точкам у фіксований момент часу, називається числом ступенів вільності цієї системи.

Іншими словами, *числом ступенів вільності системи називають*

кількість незалежних параметрів (координат), які однозначно визначають положення точок системи.

Для систем із геометричними в'язями можна навести такі приклади.

Одна вільна матеріальна точка у просторі має три ступеня вільності: три незалежних можливих переміщення вздовж трьох взаємно перпендикулярних осей ($S = 3$).

Тоді для вільної системи n матеріальних точок **число ступенів вільності** як незалежних координат визначається так:

$$S = 3n - f,$$

де f – кількість умов в'язей або координат, зв'язаних між собою рівняннями в'язей.

Якщо точка рухається за просторовою кривою, то вона має один ступінь вільності, оскільки три координати точки зв'язані між собою двома рівняннями в'язі – рівняннями цієї кривої.

Три точки (рис. 4.5), зв'язані трьома відрізками (жорстка система або тверде тіло), мають шість ступенів вільності:

$$S = 3 \cdot 3 - 3 = 6.$$

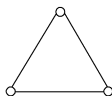


Рис. 4.5

Отже, вільне тверде тіло, як сукупність матеріальних точок, взаємне розташування яких не змінюється, має шість ступенів вільності: три незалежних лінійних переміщення вздовж трьох координатних осей і три незалежних кутових переміщення (елементарні повороти) відносно цих самих осей.

Водночас на тіло, що обертається відносно нерухомої осі, накладено п'ять в'язей і воно має, відповідно, один ступінь вільності: досить задати лише один параметр, кут повороту, щоб однозначно визначити положення цього тіла.

4.1.3. Ідеальні в'язі

Усі сили, які діють на невільну матеріальну точку або невільну матеріальну систему, поділяються на активні сили і сили реакції в'язей. Активні сили намагаються викликати певний рух точки або системи.

Реакції в'язей виникають у відповідь на дію активних сил і обумовлені механічною дією з боку в'язей, які обмежують рух матеріальної системи або чинять опір цьому рухові.

В'язі вважаються ідеальними, якщо алгебраїчна сума елементарних робіт сил реакцій в'язей на будь-яких можливих переміщеннях точок прикладання векторів реакції дорівнює нулю.

Математично критерії ідеальних в'язей системи можуть бути записані виразом, який є умовою визначення ідеальної в'язі:

$$\sum \delta A(N_k) = \sum \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (4.5)$$

де \bar{N}_k – реакція k -ї ідеальної в'язі без урахування тертя ($\bar{N}_k \perp \delta \bar{r}_k$).

Наприклад, для гладенької поверхні (рис. 4.6) реакція її завжди спрямована за нормаллю до неї, а можливе переміщення – за дотичною до поверхні.

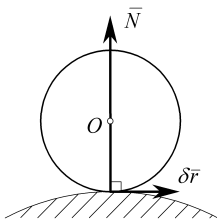


Рис. 4.6

У цьому разі кут між вектором реакції \bar{N}_k і напрямком можливого переміщення $\delta \bar{r}_k$ дорівнює 90° , тому скалярний

добуток, який виражає елементарну роботу (4.5), дорівнює нулю. А як бути у випадку реальних в'язей, у більшості з яких має місце тертя ковзання або тертя кочення?

Для цього існує простий метод перетворення реальної в'язі в ідеальну: повну реакцію реальної в'язі \bar{R} , яка відхилена від вертикалі на кут тертя φ , розкладають на дві складові (рис. 4.7): нормальну \bar{N} і тангенціальну \bar{F}_{mp} (сила тертя) вздовж нормалі n і дотичної τ . Тоді елементарна робота нормальної реакції ($\bar{N} \perp \delta\vec{r}$) дорівнює нулю, а силу тертя \bar{F}_{mp} включають в систему активних сил і оперують з нею як зі звичайною активною силою. Аналогічно поведуться і з моментом тертя кочення. Саме таким чином можна будь-яку реальну в'язь звести до ідеальної.

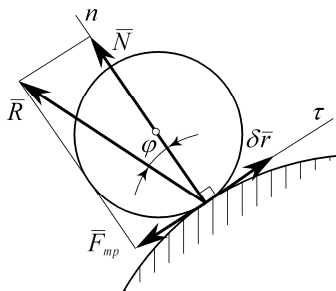


Рис. 4.7

4.1.4. Принцип можливих переміщень

Розглянемо систему n матеріальних точок з ідеальними стаціонарними утримувальними в'язями, яка під дією активних сил і сил реакцій в'язей \bar{R}_k перебуває у стані спокою і рівноваги. На кожну точку діють рівнодійні сили \bar{F}_k і \bar{R}_k , векторна сума яких дорівнює нулю.

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0, \quad (k=1,2,\dots,n), \quad (4.6)$$

де \bar{F}_k – рівнодійна активних сил, прикладених до k -ї точки.

\bar{R}_k – рівнодійна реакції ідеальних в'язей, прикладених до k -ї точки.

Надамо точкам матеріальної системи можливих переміщень $\delta \bar{r}_k$

$$\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (4.7)$$

Обчислимо роботу, яку виконують активні сили і сили реакції ідеальних в'язей на цих переміщеннях:

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (4.8)$$

$$\sum \delta A(\bar{F}_k) + \sum \delta A(\bar{R}_k) = 0, \quad (4.9)$$

де $\sum \delta A(\bar{F}_k)$ – сума елементарних робіт активних сил;

$\sum \delta A(\bar{R}_k)$ – сума елементарних робіт реакцій ідеальних в'язей.

За попередньою умовою в'язі, накладені на точки системи є ідеальними, тоді робота сил реакцій ідеальних в'язей $\sum \delta A(\bar{R}_k) = 0$ і рівність (4.9) набуває вигляду скалярного добутку векторів:

$$\sum \delta A(\bar{F}_k) = \sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (4.10)$$

В натуральній системі координат вираз (4.10) має вигляд:

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos(\bar{F}_k, \bar{\tau}) = 0. \quad (4.11)$$

Для рівноваги матеріальної системи з ідеальними стаціонарними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх діючих активних сил на можливих переміщеннях системи дорівнювала нулю.

Рівняння (4.10) в координатній формі має вигляд:

$$\sum F_{kx} \cdot \delta x_k + \sum F_{ky} \cdot \delta y_k + \sum F_{kz} \cdot \delta z_k = 0. \quad (4.12)$$

У випадку, коли елементи матеріальної системи виконують

обертальні рухи під дією сил або пар сил, що стосується різноманітних передавальних механізмів у машинах, то вираз принципу можливих переміщень має вигляд:

$$\sum M_k \cdot \delta\varphi_k = 0,$$

де M_k – момент сил або пар сил, що прикладений до k -го елемента системи; $\delta\varphi_k$ – можливий кут повороту k -го елемента системи.

Принцип можливих переміщень дає умову рівноваги системи, виключивши реакції ідеальних в'язей. Якщо в системі є реальні в'язі і необхідно враховувати тертя, то реакцію реальної в'язі (рис. 4.7) розкладають на нормальну складову і силу тертя, а останню включають до суми елементарних робіт.

Математичний вираз принципу можливих переміщень (4.10) називають загальним рівнянням статички. Це пояснюється тим, що з нього легко дістати умови рівноваги вільного твердого тіла або системи тіл.

Наприклад, надамо можливого лінійного переміщення як полюсу $\delta\vec{r}_o$ центру мас твердого тіла і кутового переміщення $\delta\vec{\varphi}$ відносно полюса. Тоді сума елементарних робіт головного вектора системи сил \vec{R} і головного моменту \vec{M}_o може згідно виразу (4.10) дорівнювати нулю:

$$\vec{R} \cdot \delta\vec{r}_o + \vec{M}_o \cdot \delta\vec{\varphi} = 0.$$

Оскільки лінійне і кутове можливі переміщенні є незалежними, то рівність в останньому виразі буде здійснюватись, якщо головний вектор системи сил і головний момент дорівнюють нулю. Саме це і є умовою рівноваги тіла у просторі:

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{M}_o = 0.$$

4.1.5. Застосування принципу можливих переміщень

Принцип можливих переміщень широко застосовується у різних технічних розрахунках. Розглянемо деякі приклади.

1. Визначення реакцій в'язей

Якщо, наприклад, треба визначити реакцію тільки в опорі B балки ABD , яка складається з двох частин, з'єднаних шарніром у точці C (рис. 4.8), то можна використати принцип можливих переміщень. Традиційними методами статyki зробити це важко.

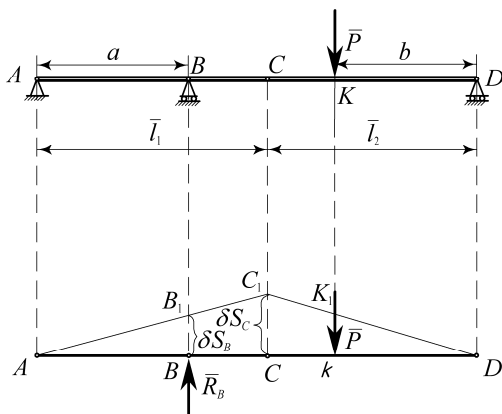


Рис. 4.8

Звільнимо балку в точці B від в'язі, замінивши її реакцією \bar{R}_B і надамо балці можливе переміщення. Тоді точки B , C і K змістяться відповідно на δS_B , δS_C і δS_K .

Складемо суму елементарних робіт сил на можливих переміщеннях точок їхнього прикладання (4.11):

$$R_B \cdot \delta S_B - P \cdot \delta S_K = 0,$$

звідки
$$R_B = P \frac{\delta S_K}{\delta S_B}. \quad (4.13)$$

Розглянемо подібні трикутники:

$$\triangle ABB_1 \sim \triangle ACC_1; \triangle DKK_1 \sim \triangle DCC_1;$$

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\delta S_B}{\delta S_C} = \frac{a}{l_1}; \quad (4.14)$$

$$\frac{KK_1}{CC_1} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow \frac{\delta S_K}{\delta S_C} = \frac{b}{l_2}. \quad (4.15)$$

Рівність (4.15) можна почленно поділити на рівність (4.14):

$$\frac{\delta S_K}{\delta S_B} = \frac{bl_1}{al_2}. \quad (4.16)$$

Підставимо значення δS_B і δS_K із виразу (4.16) у вираз (27.13). Це і буде відповідь

$$R_B = P \frac{\delta S_K}{\delta S_B} = P \frac{bl_1}{al_2}.$$

4.1.6. Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень Лагранжа можна використовувати не тільки в умовах рівноваги для розв'язування задач статки.

Цим принципом можна користуватися і під час розв'язання задач динаміки, якщо поєднати його з принципом д'Аламбера і поширити принцип можливих переміщень на випадок руху системи.

На основі принципу д'Аламбера активні сили, реакції в'язей і сили інерції точок системи становлять умовно зрівноважену систему сил.

Згідно з принципом можливих переміщень, якщо матеріальна система перебуває у рівновазі, то сума елементарних робіт сил, які діють на систему, на можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:

$$\sum (\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k) = 0. \quad (4.17)$$

Будемо вважати в'язі, накладені на систему, ідеальними, тоді сума робіт сил реакцій в'язей дорівнює нулю $\sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ і, остаточно, отримаємо:

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (4.18)$$

Загальне рівняння динаміки виражає принцип д'Аламбера-Лагранжа.

Під час руху матеріальної системи з ідеальними утримувальними в'язями сума елементарних робіт активних сил і сил інерції, умовно прикладених до самих точок, на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

Загальне рівняння динаміки у натуральній формі:

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos(\hat{F}_k; \bar{\tau}) + \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos(\hat{\Phi}_k; \bar{\tau}) = 0, \quad (4.19)$$

де δs_k – можливе переміщення вздовж траєкторії; $\bar{\tau}$ – орт дотичної.

Під час складання загальних рівнянь динаміки слід пам'ятати, що робота сил опору і сил інерції є від'ємними величинами.

Запишемо координатну форму загального рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^n ((F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k) = 0, \quad (4.20)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції активних сил на осі декартових координат;

$\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k$ – проекції прискорення k -ї точки системи;

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – проекції можливих переміщень або варіацій координат.

Із загального рівняння динаміки випливають як наслідок основні теореми динаміки і основні рівняння руху системи.

4.1.7. Методика застосування загального рівняння динаміки

Загальне рівняння динаміки зручно використовувати для розв'язування багатьох задач динаміки. Наведемо деякі приклади.

Приклад 4.1

Два вантажі масою m_1 і m_2 розміщені на трикутній призмі, бокові грані якої утворюють з горизонтом кути α і β . Вантажі з'єднані невагомою і нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок С. Коефіцієнт тертя ковзання вантажів на призмі f .

Визначити прискорення вантажів, нехтуючи вагою блока С (рис 4.9).

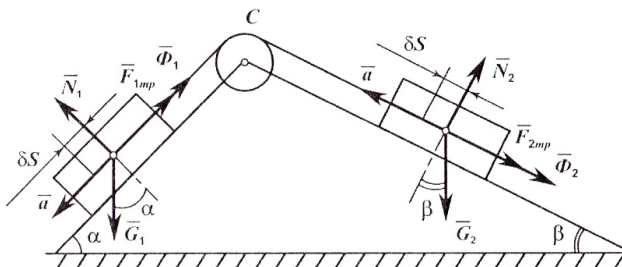


Рис. 4.9

Розв'язання

Шукане прискорення вантажів a . Вага вантажів $G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$. Сили тертя:

$$F_{1mp} = f \cdot N_1 = f G_1 \cos \alpha = f m_1 g \cos \alpha,$$

$$F_{2mp} = f \cdot N_2 = f G_2 \cos \beta = f m_2 g \cos \beta.$$

Сили інерції вантажів: $|\Phi_1| = m_1 a$; $|\Phi_2| = m_2 a$.

Прикладемо до тіл вектори активних сил \vec{G}_1, \vec{G}_2 , сил нормального тиску \vec{N}_1, \vec{N}_2 . Виберемо напрям руху і прискорення тіл. Протилежно напрямку вектора прискорення покажемо на схемі вектори сил інерції $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$. Сили тертя спрямуємо проти напрямку відносного руху тіл.

Надамо системі можливе переміщення δS і запишемо загальне рівняння динаміки у формі (4.19):

$$G_1 \sin \alpha \cdot \delta S - F_{1mp} \cdot \delta S - \Phi_1 \cdot \delta S - G_2 \sin \beta \cdot \delta S - F_{2mp} \cdot \delta S - \Phi_2 \cdot \delta S = 0. \quad (a)$$

У виразі (а) винесемо δS за дужки. Оскільки $\delta S \neq 0$, то вираз у дужках дорівнює нулю. Підставимо значення сил:

$$m_1 g \sin \alpha - f m_1 g \cos \alpha - m_1 a - m_2 g \sin \beta - f m_2 g \cos \beta - m_2 a = 0,$$

звідки:
$$a = g \cdot \frac{m_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_2(\sin \beta + f \cos \beta)}{m_1 + m_2}.$$

Приклад 4.2

Вантажі масою m_1 і m_2 підвішені на тросах, які намотані на шківів з радіусами r_3 , r_4 і масами m_3 , m_4 , рівномірно розподіленими за перерізом шківів. Шківів з'єднані жорстко. Троси невагомі і нерозтяжні. *Визначити* кутове прискорення шківів ε (рис. 4.10).

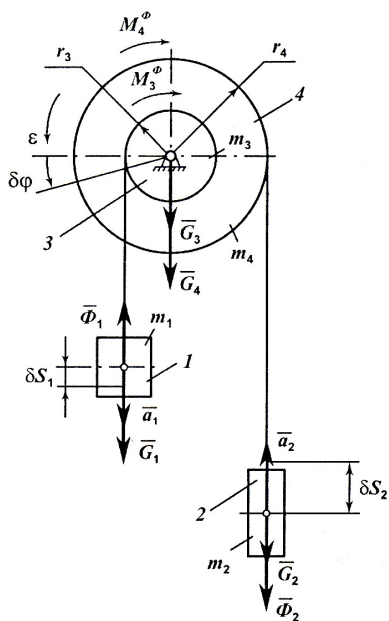


Рис. 4.10

Осьові моменти інерції мас шківів: $I_{z3} = m_3 r_3^2$; $I_{z4} = m_4 r_4^2$.

Сили інерції вантажів: $|\Phi_1| = m_1 a_1 = m_1 \varepsilon \cdot r_3$; $|\Phi_2| = m_2 a_2 = m_2 \varepsilon \cdot r_4$.

Моменти інерційних сил шківів:

$$|M_3^\Phi| = I_{z3} \varepsilon = m_3 r_3^2 \varepsilon; \quad |M_4^\Phi| = I_{z4} \varepsilon = m_4 r_4^2 \varepsilon.$$

Надамо системі можливого кутового переміщення $\delta\varphi$, тоді визначимо лінійні можливі переміщення точок прикладання сил:

$$\delta S_1 = r_3 \cdot \delta\varphi; \quad \delta S_2 = r_4 \cdot \delta\varphi;$$

Запишемо загальне рівняння динаміки у формі (4.19):

$$G_1 \cdot \delta S_1 - \Phi_1 \cdot \delta S_1 - M_3^\Phi \cdot \delta\varphi - M_4^\Phi \cdot \delta\varphi - G_2 \cdot \delta S_2 - \Phi_2 \cdot \delta S_2 = 0. \quad (\text{а})$$

Підставимо можливі переміщення δS_1 і δS_2 , виражені через $\delta\varphi$:

$$G_1 r_3 \delta\varphi - \Phi_1 r_3 \delta\varphi - M_3^\Phi \delta\varphi - M_4^\Phi \delta\varphi - G_2 r_4 \delta\varphi - \Phi_2 r_4 \delta\varphi = 0. \quad (\text{б})$$

У виразі (б) елементарний кут повороту $\delta\varphi$ можна винести за дужки. Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то вираз у дужках дорівнюватиме нулю:

$$G_1 r_3 - \Phi_1 r_3 - M_3^\Phi - M_4^\Phi - G_2 r_4 - \Phi_2 r_4 = 0. \quad (\text{в})$$

Підставимо в рівняння (в) значення сил:

$$G_1; \Phi_1; M_3^\Phi; M_4^\Phi; G_2; \Phi_2 :$$

$$m_1 g r_3 - m_1 \varepsilon r_3^2 - m_3 \varepsilon r_3^2 - m_4 \varepsilon r_4^2 - m_2 g r_4 - m_2 \varepsilon r_4^2 = 0,$$

$$m_1 g r_3 - m_2 g r_4 = \varepsilon [r_3^2 (m_1 + m_3) + r_4^2 (m_2 + m_4)];$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{g(m_1 r_3 - m_2 r_4)}{r_3^2 (m_1 + m_3) + r_4^2 (m_2 + m_4)}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як класифікуються механічні в'язі?
2. Що таке можливі переміщення?
3. Як розуміють ступінь вільності системи?
4. Які в'язі є ідеальними?
5. Сформулюйте і запишіть принцип можливих переміщень?
6. Запишіть загальне рівняння динаміки.
7. Скільки ступенів вільності має вільне тіло і тіло, що обертається навколо нерухомої осі?
8. Чому дорівнює елементарна робота сили реакції ідеальної в'язі?
9. Чому математичний вираз принципу можливих переміщень називається загальним рівнянням статичності?
10. Чому принцип д'Аламбера-Лагранжа називається загальним рівнянням динаміки?

4.2. Диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах

4.2.1. Узагальнені координати системи. Узагальнені швидкості

Будемо розглядати матеріальні системи з геометричними і голономними в'язями, які накладають обмеження лише на положення (координати) точок системи у просторі, а рівняння в'язей можуть бути проінтегровані.

Геометричні в'язі зменшують на одну і ту саму кількість одиниць і число незалежних можливих переміщень системи і кількість незалежних між собою координат, які визначають положення цієї системи.

Якщо дві вільні точки з'єднати стрижнем довжиною l , то кількість незалежних координат зменшиться на одиницю, стане рівним п'яти, зменшиться на одиницю і кількість незалежних

можливих переміщень.

Виявляється, що кількість незалежних координат, які визначають положення матеріальної системи з геометричними в'язями, дорівнює числу ступенів вільності цієї системи.

За незалежні координати, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності системи, можна обирати параметри, які мають будь-яку розмірність і будь-який фізичний зміст (прямі, дуги, кути, площі, об'єми).

Незалежні між собою параметри будь-якої розмірності, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності системи і які однозначно визначають положення цієї системи, називаються узагальненими координатами.

Позначаються узагальнені координати літерою q і якщо число ступенів вільності системи дорівнює S , то q_1, q_2, \dots, q_S – узагальнені координати системи.

Оскільки узагальнені координати між собою незалежні, то елементарні зміни цих координат: $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$ теж будуть незалежними, при цьому кожна зміна цих координат визначає відповідне незалежне від інших можливе переміщення системи.

Координати будь-якої точки $M(x_k, y_k, z_k)$ можна виразити через узагальнені координати:

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_S) \\y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_S), \\z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_S).\end{aligned}\tag{4.21}$$

Радіус-вектор \bar{r}_k теж виражається через узагальнені координати:

$$\begin{aligned}\bar{r}_k &= x_k \cdot \bar{i} + y_k \cdot \bar{j} + z_k \cdot \bar{k}, \\ \bar{r}_k &= \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_S).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Приклад 4.3

На схемі заданий кривошипно-повзунний механізм (рис. 4.11), виразимо координати точок через узагальнену координату механізму, яка в такому випадку одна, тому що механізм має один ступінь вільності ($S=1$).

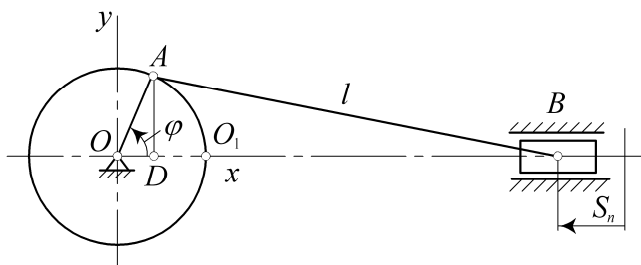


Рис. 4.11

За узагальнену координату можна обрати кут повороту φ , дугу, яку описує точка A , площу сектора OO_1A , але не можна обирати відстань S_n , тому що вона неоднозначно визначає положення механізму.

Якщо обрати за узагальнену координату кут повороту φ , тобто, $q = \varphi$, $OA = r$, $AB = l$, то координати точок механізму дорівнюють:

$$x_A = r \cdot \cos \varphi; x_B = OD + DB = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}; y_A = r \cdot \sin \varphi; y_B = 0.$$

Приклад 4.4

Подвійний плоский маятник (рис. 4.12) має два ступені вільності, за узагальнені координати оберемо кути φ і ψ : $q_1 = \varphi$; $q_2 = \psi$.

Зазначені кути незалежні між собою, тобто, можна змінювати кут φ , залишаючи незмінним кут ψ . Декартові координати точок A і B можна виразити через узагальнені координати φ і ψ :

$$\begin{cases} x_A = l_1 \sin \varphi, & \begin{cases} x_B = l_1 \sin \varphi + l_2 \sin(\varphi + \psi), \\ y_B = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos(\varphi + \psi). \end{cases} \\ y_A = l_1 \cos \varphi, \end{cases}$$

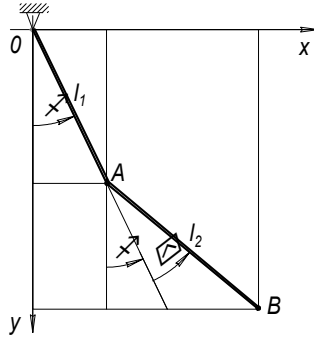


Рис. 4.12

Для просторово-часової характеристики узагальненої координати вводиться поняття *узагальненої швидкості*. Якщо механічна система рухається, то будуть змінюватись протягом часу і узагальнені координати.

Якщо узагальнені координати задати як функції часу:

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad q_s = f_s(t), \quad (4.23)$$

то це означає, що закон руху заданий в узагальнених координатах.

Похідні за часом від узагальнених координат є узагальненими швидкостями системи: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$,

$$\text{де} \quad \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \dots, \quad \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}. \quad (4.24)$$

Узагальнена швидкість охоплює усі уявлення про швидкість, вона є просторово-часовою характеристикою системи.

Розмірність узагальненої швидкості залежить від розмірності відповідної узагальненої координати.

Якщо q – лінійна величина (м), то \dot{q} – лінійна швидкість (м/с);

Якщо q – кут повороту (рад), то \dot{q} – кутова швидкість (рад/с);

Якщо q – площа (м²), то \dot{q} – секторна швидкість (м²/с).

4.2.2. Узагальнені сили та їх обчислення

Нехай механічна система складається з n матеріальних точок з масами m_1, m_2, \dots, m_n , на кожну точку якої діють сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$.

Допустимо, що система має S ступенів вільності, тоді кількість узагальнених координат дорівнює q_1, q_2, \dots, q_S . Після обрання узагальнених координат радіус-вектори точок можна виразити через ці узагальнені координати:

$$\vec{r}_1(q_1, \dots, q_S), \vec{r}_2(q_1, \dots, q_S), \dots, \vec{r}_n(q_1, \dots, q_S).$$

Надамо системі можливого переміщення, за якого координата q_1 отримує приріст δq_1 , а всі інші узагальнені координати не зміняться. Тоді кожен з радіусів-векторів \vec{r}_k одержить елементарний приріст $(\delta \vec{r}_k)_1$. Індекс «одиниця» означає, що зміняться всі радіуси-вектори точок на зміні тільки першої координати.

Радіус-вектор \vec{r}_k є функцією узагальнених координат, тому елементарний приріст його обчислюватиметься як частинний диференціал, тобто:

$$(\delta \vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1.$$

$$(\delta \vec{r}_1)_1 = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \cdot \delta q_1; (\delta \vec{r}_2)_1 = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \cdot \delta q_1; (\delta \vec{r}_n)_1 = \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1} \cdot \delta q_1. \quad (4.25)$$

Обчислимо суму елементарних робіт усіх сил на цьому можливому переміщенні, якщо надається приріст лише першій узагальненій координаті:

$$\delta A_1 = P_1(\delta \vec{r}_1)_1 + P_2(\delta \vec{r}_2)_1 + \dots + P_n(\delta \vec{r}_n)_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{P}_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \bar{P}_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \bar{P}_n \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1 = \\
&= \delta q_1 \left(\bar{P}_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} + \bar{P}_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} + \dots + \bar{P}_n \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1} \right) = \delta q_1 \sum \bar{P}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \delta q_1 Q_1,
\end{aligned}$$

де $Q_1 = \sum \bar{P}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}$ і $Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}$ – узагальнена сила, яка відповідає

узагальненій координаті q_1 .

Якщо системі надати друге незалежне можливе переміщення, коли змінюється тільки координата q_2 , отримаємо другий вираз елементарної роботи:

$$\delta A_2 = Q_2 \cdot \delta q_2, \quad (4.26)$$

де $Q_2 = \sum \bar{P}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}$ – узагальнена сила, яка відповідає узагальненій

координаті q_2 .

Зрозуміло, якщо системі надати такого можливого переміщення, за якого одночасно змінюються усі узагальнені координати, то сума елементарних робіт прикладених сил на цьому переміщенні визначається рівністю:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (4.27)$$

З цього виразу випливає:

узагальнені сили – це величини, які дорівнюють коефіцієнтам на приростах узагальнених координат у виразах повної елементарної роботи сил, які діють на систему.

Можна навести ще одне, як кажуть, технічне визначення узагальненої сили.

Узагальнена сила системи – це така умовна еквівалентна сила, елементарна робота якої дорівнює сумі елементарних робіт всіх діючих сил на відповідних можливих переміщеннях.

Розмірність узагальненої сили залежить від розмірності відповідної узагальненої координати: $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$ – розмірність узагальненої сили дорівнює відношенню розмірності роботи до розмірності узагальненої координати.

У системі СІ робота вимірюється у джоулях. Розмірність самої узагальненої координати може бути різною: якщо узагальнена координата є кутом повороту (рад), то узагальнена сила буде моментом і вимірюється у ньютонах на метр (Нм), а якщо узагальнена координата q є лінійною величиною (м), то узагальнена сила буде вимірюватись у ньютонах (Н).

4.2.3. Методика обчислення узагальнених сил

Обчислення узагальнених сил зводиться до обчислення елементарної роботи прикладених сил на можливих переміщеннях точок системи.

Спочатку визначають кількість S ступенів вільності системи, обирають відповідні узагальнені координати q_k і зображують на рисунку активні сили і сили тертя (які відносять до активних сил, якщо в'язі не є ідеальними).

Потім для визначення сили Q_1 надають системі можливого переміщення, яке відповідає зміні тільки однієї узагальненої координати q_1 , обчислюють суму елементарних робіт усіх сил і цю суму робіт ділять на приріст узагальненої координати.

Аналогічно обчислюють Q_2, Q_3, \dots, Q_s .

Приклад 4.5

Важіль AB обертається навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка (рис. 4.13). До кінців важеля прикладені вертикальні сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , $OA = a$, $OB = b$.

За узагальнену координату беремо кут повороту φ , який однозначно визначає положення важеля.

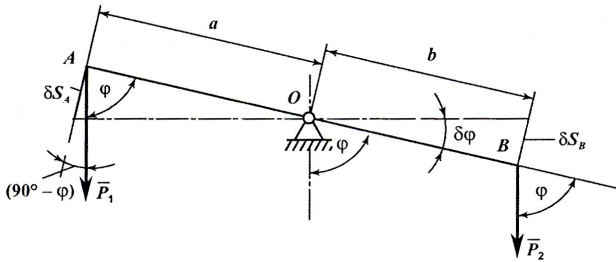


Рис. 4.13

Визначити узагальнену силу, яка відповідає обраній узагальненій координаті $q = \varphi$.

Розв'язання

Для визначення узагальноної сили Q_φ , яка відповідає обраній узагальненій координаті, надамо координаті φ приріст $\delta\varphi$, що і є лише одним можливим переміщенням важеля AB . Елементарні переміщення точок A і B , точок прикладання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , спрямовані за перпендикуляром до відрізків OA і OB , дорівнюватимуть:

$$\delta S_A = a \cdot \delta \varphi,$$

$$\delta S_B = b \cdot \delta \varphi.$$

Складемо суму елементарних робіт сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 на переміщеннях δS_A і δS_B :

$$\begin{aligned} \delta A_\varphi &= (P_1 \sin \varphi) \cdot \delta S_A - (P_2 \sin \varphi) \delta S_B = \\ &= (P_1 \sin \varphi) a \delta \varphi - (P_2 \sin \varphi) b \delta \varphi = \\ &= (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi \delta \varphi. \end{aligned}$$

Тоді $Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta \varphi} = (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi$ – це сума моментів сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 відносно центра O .

Відповідь:
$$Q_\varphi = \sum M_0 = (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi.$$

Приклад 4.6

Однорідний стрижень (рис. 4.14) AB має довжину l і масу m_1 . Його вага $P_1 = m_1 g$ і прикладена посередині в центрі ваги C стрижня. Стрижень може обертатись у вертикальній площині відносно осі в точці A .

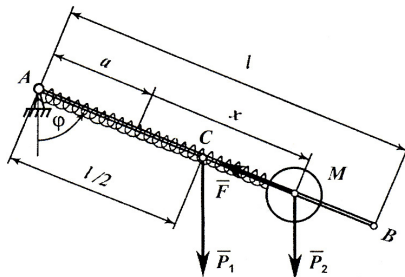


Рис. 4.14

Кулька M масою m_2 насаджена на стрижень AB і утримується на ньому за допомогою пружини, яка в ненапруженому стані має довжину a , коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює c .

Вага кульки M дорівнює: $P_2 = m_2 g$. На кульку діє сила пружності пружини, яка за модулем дорівнює $|\bar{F}| = cx$.

Визначити узагальнені сили системи.

Система має два ступеня вільності: $S = 2$ (незалежними параметрами є переміщення кульки відносно стрижня AB і поворот стрижня відносно осі в точці A).

Розв'язання

Оберемо узагальнені координати системи:

$q_1 = \varphi$ – кут повороту стрижня AB (рад);

$q_2 = x$ – переміщення кульки вздовж осі від кінця ненапруженої пружини (м).

Напрямок узагальнених координат зображений на рис. 4.14.

Надамо системі можливого переміщення, яке відповідає приросту узагальненої координати φ , тобто, $\delta \varphi > 0$, а лінійне

переміщення не змінюється $x = const$.

Підрахуємо суму елементарних робіт сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 на цьому можливому переміщенні:

$$\delta A_1 = \left[-P_1 \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi - P_2 \cdot (a+x) \sin \varphi \right] \delta \varphi,$$

звідки:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta \varphi} = - \left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (a+x) \right] \sin \varphi = - \left[m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (a+x) \right] \sin \varphi.$$

Узагальнена сила Q_1 має розмірність моменту (Нм).

Після цього надамо системі можливого переміщення, яке відповідає приросту узагальненої координати x , тобто, δx ($\delta x > 0$), а кутова координата не змінюється $\varphi = const$.

На цьому можливому переміщенні роботу виконують сила \bar{P}_2 і сила пружності \bar{F} .

Елементарна робота цих сил на можливому переміщенні δx дорівнює:

$$\delta A_2 = P_2 \cos \varphi \cdot \delta x - cx \cdot \delta x = (P_2 \cos \varphi - cx) \delta x,$$

звідки:

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta x} = P_2 \cos \varphi - cx.$$

Узагальнена сила Q_2 має розмірність сили (Н).

4.2.4. Випадок потенціальних сил

Якщо сили, які діють на матеріальну систему, є потенціальними, то для системи існує така силова функція U , яка залежить лише від координат x_k , y_k , z_k точок системи, для якої сума елементарних робіт усіх діючих сил дорівнює повному диференціалу цієї функції:

$$\sum \delta A_k = dU. \quad (4.28)$$

Переходячи до узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_s всі координати точок x_k, y_k, z_k можна виразити через узагальнені координати і тоді силова функція U буде функцією узагальнених координат:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (4.29)$$

Обчислимо dU як повний диференціал від функції $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$:

$$dU = \sum \delta A_k = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s} \cdot \delta q_s, \quad (4.30)$$

але, враховуючи, що $\Pi = -U$, знаходимо:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \dots, Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (4.31)$$

Якщо усі сили, які діють на матеріальну систему, є потенціальними, то узагальнені сили дорівнюють частинним похідним від силової функції (або взятим зі знаком мінус частинним похідним від потенціальної енергії системи) за відповідними узагальненими координатами.

4.2.5. Умови рівноваги системи в узагальнених координатах

Згідно з принципом можливих переміщень необхідною і достатньою умовою рівноваги системи є рівність нулю суми елементарних робіт усіх активних сил і сил тертя, віднесених до активних сил, на будь-якому можливому переміщенні системи.

Тобто, виконується умова $\sum \delta A_k = 0$, а це в узагальнених координатах набуває вигляду:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0. \quad (4.32)$$

Оскільки величини $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ є незалежними між

собою і не дорівнюють нулю, то ця рівність виконується, якщо всі узагальнені сили дорівнюють нулю:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0. \quad (4.33)$$

Для рівноваги матеріальної системи необхідно і достатньо, щоб усі узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам, дорівнювали нулю. Кількість умов рівноваги дорівнює кількості узагальнених координат, тобто, числу ступенів вільності системи.

У випадку, якщо на матеріальну систему діють потенціальні сили, то умови рівноваги системи набувають вигляду:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0; \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (4.35)$$

Для рівноваги матеріальної системи під дією потенціальних сил повний диференціал силової функції або потенціальної енергії системи повинний дорівнювати нулю.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які параметри називають узагальненими координатами системи?
2. Що таке узагальнені швидкості системи?
3. Що таке узагальнені сили і яким способом їх визначають?
4. Назвіть розмірності узагальнених координат, узагальнених сил.
5. Які умови рівноваги системи в узагальнених координатах?
6. Як визначають узагальнені сили в консервативних системах?

4.3. Рівняння Лагранжа другого роду

4.3.1. Виведення рівнянь Лагранжа

Допустимо, що матеріальна система є голономною з ідеальними в'язями і складається з n матеріальних точок, маси яких m_1, m_2, \dots, m_n , вона має S ступенів вільності. Обираємо узагальнені координати q_1, q_2, \dots, q_S як незалежні параметри, що визначають положення системи у просторі.

Визначимо радіус-вектор будь-якої точки системи через узагальнені координати і час:

$$\bar{r}_k = \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_S, t).$$

Як відомо, узагальнена координата є також і функцією часу t .

Тоді швидкість будь-якої точки системи визначиться:

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \dot{q}_S + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \quad (4.36)$$

Якщо в'язі, які накладені на систему, стаціонарні, то частинна похідна за часом дорівнює нулю $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = 0$.

З виразу (4.36) візьмемо частинну похідну за узагальненою швидкістю:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (4.37)$$

Кінетична енергія матеріальної системи складається із суми кінетичних енергій окремих точок:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k \bar{v}_k \bar{v}_k. \quad (4.38)$$

Кінетична енергія матеріальної системи, як і швидкість окремих точок, є функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S, t). \quad (4.39)$$

Визначимо частинну похідну від кінетичної енергії (4.38) за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i}. \quad (4.40)$$

Визначимо частинну похідну від кінетичної енергії (4.38) за узагальненою швидкістю:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.41)$$

Останній вираз (4.41) перетворимо, використавши вираз (4.37):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.42)$$

Від виразу (4.42) візьмемо похідну за часом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum m_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \sum m_k \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right). \quad (4.43)$$

Перший доданок рівняння (4.43) можна спростити:

$$\sum m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum m_k \bar{a}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum (\bar{P}_k + \bar{R}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i^T + Q_i^R, \quad (4.44)$$

де \bar{a}_k – прискорення k -ї точки, $m_k \bar{a}_k = \bar{P}_k + \bar{R}_k$.

Для стаціонарних ідеальних в'язей робота реакції $Q_i^R = 0$.

Таким чином, перший доданок виразу (4.43) набуває вигляду:

$$\sum m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.45)$$

де Q_i – узагальнена сила.

Розглянемо множник у другому доданку виразу (4.43), враховуючи вираз (4.36):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}, \quad (4.46)$$

$$i = 1, 2, \dots, S.$$

Візьмемо від виразу (4.36) частинну похідну за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.47)$$

Вирази (4.46) і (4.47) мають однакові праві частини, тому:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.48)$$

Другий доданок виразу (4.43) набуває вигляду:

$$\sum m_k \bar{v}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (4.49)$$

Враховуючи вирази (4.45) і (4.49), отримаємо рівняння (4.43) у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, S, \text{ або}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.50)$$

Вираз (4.50) є рівнянням Лагранжа другого роду.

Кількість рівнянь Лагранжа другого роду дорівнює кількості ступенів вільності матеріальної системи.

У рівняння Лагранжа другого роду не входять реакції в'язей, а невідомими є лише параметри $q_i(t)$, що визначають закон руху системи.

4.3.2. Методика і приклад розв'язування задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду

1. Для заданої матеріальної системи з голономними стаціонарними в'язями визначають кількість ступенів вільності і обирають відповідну систему узагальнених координат.

2. Визначають узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам.

3. Визначають кінетичну енергію системи як функцію узагальнених координат і узагальнених швидкостей.

4. Складають рівняння Лагранжа другого роду для кожної узагальненої координати.

5. Інтегрують диференціальні рівняння Лагранжа другого роду, отримують закон руху системи і визначають сталі інтегрування за допомогою початкових умов. Досліджують отриманий розв'язок.

Приклад 4.7

Лебідка має шестерню масою m_1 і радіусом r_1 , колесо масою m_2 і радіусом r_2 , барабан масою m_3 і радіусом r_3 (рис. 4.15).

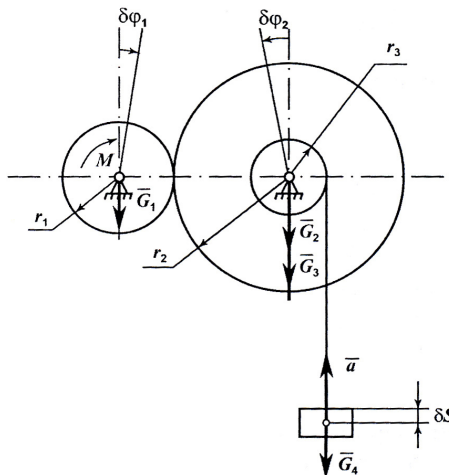


Рис. 4.15

Визначити прискорення вантажу масою m_4 , якщо до шестерні прикладений обертальний момент M . Шестерня і колесо є суцільними дисками, маса барабана розподілена по ободу.

$$G_1 = m_1 g \text{ – вага шестерні; } G_2 = m_2 g \text{ – вага колеса;}$$

$$G_3 = m_3 g \text{ – вага барабана; } G_4 = m_4 g \text{ – вага вантажу;}$$

$$u = \frac{r_2}{r_1} \text{ – передаточне відношення між шестернею і колесом;}$$

$$I_{z1} = \frac{m_1 r_1^2}{2} \text{ – осьовий момент інерції маси шестерні;}$$

$$I_{z2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \text{ – осьовий момент інерції маси колеса;}$$

$$I_{z3} = m_3 r_3^2 \text{ – осьовий момент інерції маси барабана.}$$

Розв'язання

Механічна система має один ступінь вільності, $S = 1$.

Обираємо за узагальнену координату кут повороту шестерні φ_1 , тоді:

$\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ – кутова швидкість шестерні, узагальнена швидкість системи,

$$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1 \text{ – кутове прискорення шестерні.}$$

Запишемо диференціальне рівняння Лагранжа другого роду для цієї системи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \quad (\text{a})$$

Надамо системі можливого переміщення $\delta\varphi_1$ як приріст узагальненої координати φ_1 :

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta\varphi_1}{u} = \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} \text{ – можливе переміщення колеса,}$$

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 \text{ – можливе переміщення барабана,}$$

$$\delta S = \delta\varphi_2 r_3 = \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} r_3 \text{ – можливе переміщення вантажу.}$$

На можливому переміщенні системи роботу виконують: обертальний момент M і сила ваги вантажу G_4 . Сума елементарних робіт активних сил на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - G_4\delta S = M\delta\varphi_1 - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3\delta\varphi_1 = \left(M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3\right)\delta\varphi_1.$$

Узагальнена сила:

$$Q_{\varphi_1} = M - G_4\frac{r_1}{r_2}r_3 \quad (6)$$

Кінетична енергія системи складається із суми кінетичної енергії шестерні T_1 , кінетичної енергії колеса T_2 , кінетичної енергії барабана T_3 і кінетичної енергії вантажу T_4 :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через узагальнену швидкість, враховуючи, що залежність між швидкостями саме така, що і між переміщеннями:

$$\omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2} - \text{кутова швидкість колеса;}$$

$$\omega_3 = \omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2} - \text{кутова швидкість барабана;}$$

$$v = \omega_1\frac{r_1}{r_2}r_3 - \text{швидкість вантажу,}$$

тоді:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{I_{z1}\omega_1^2}{2} = \frac{m_1r_1^2}{4}\omega_1^2, \\ T_2 &= \frac{I_{z2}\omega_2^2}{2} = \frac{m_2r_2^2}{2}\frac{\omega_1^2r_1^2}{r_2^2 \cdot 2} = \frac{m_2r_1^2}{4}\omega_1^2, \\ T_3 &= \frac{I_{z3}\omega_3^2}{2} = \frac{m_3r_3^2}{2}\omega_1^2\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{m_3r_1^2r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2, \\ T_4 &= \frac{m_4v^2}{2} = \frac{m_4r_1^2r_3^2}{2 \cdot r_2^2}\omega_1^2. \end{aligned}$$

Повна кінетична енергія системи:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1r_1^2}{4}\omega_1^2 + \frac{m_2r_1^2}{4}\omega_1^2 + \frac{m_3r_1^2r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2 + \frac{m_4r_1^2r_3^2}{2r_2^2}\omega_1^2 = \\ &= \frac{\omega_1^2r_1^2}{4}\left(m_1 + m_2 + m_3\frac{2r_3^2}{r_2^2} + m_4\frac{2r_3^2}{r_2^2}\right). \end{aligned}$$

Позначимо $\left(m_1 + m_2 + m_3 \frac{2r_3^2}{r_2^2} + m_4 \frac{2r_3^2}{r_2^2} \right) = B = const$. Величину B

можна обчислити, якщо підставити задані параметри.

Тоді $T = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4} B$. Візьмемо частинні похідні від виразу кінетичної енергії за узагальненою координатою, швидкістю і часом:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (в)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \omega_1 \frac{r_1^2 B}{2}, \quad (б)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot \frac{r_1^2 B}{2} = \varepsilon_1 \frac{r_1^2 B}{2}. \quad (г)$$

Значення (б), (в) і (г) підставимо у рівняння (а):

$$\varepsilon_1 \frac{r_1^2 B}{2} = M - G_4 \frac{r_1}{r_2} r_3,$$

звідки

$$\varepsilon_1 = \frac{2 \left(M - G_4 \frac{r_1}{r_2} r_3 \right)}{r_1^2 B}.$$

Шукане прискорення вантажу:

$$a = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} r_3 = \frac{2r_3 \left(M - G_4 \frac{r_1}{r_2} r_3 \right)}{r_1 r_2 B}.$$

4.3.3. Кінетичний потенціал. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем

Розв'язання задачі складання та інтегрування диференціальних рівнянь руху системи матеріальних точок спрощується, якщо на матеріальні точки діють лише консервативні сили, що мають потенціал.

Встановимо формулу рівняння Лагранжа другого роду для

цього випадку. Якщо всі сили, які діють на систему, потенціальні, то узагальнена сила $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, де Π – потенціальна енергія системи, яка залежить тільки від узагальнених координат. Тоді диференціальні рівняння Лагранжа можна уявити:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (4.51)$$

або, оскільки потенціальна енергія системи не залежить від узагальнених швидкостей, то:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, S.$$

Введемо функцію $L = T - \Pi$, яка дорівнює різниці між кінетичною і потенціальною енергіями системи, яку назвали функцією Лагранжа або кінетичним потенціалом. Тоді у випадку потенціальних сил (консервативні системи) рівняння Лагранжа набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (4.52)$$

Стан матеріальної системи, на яку діють потенціальні сили, визначається функцією Лагранжа L , оскільки, знаючи цю функцію, можна скласти диференціальні рівняння руху системи.

Приклад 4.8

Скласти методом Лагранжа другого роду диференціальне рівняння коливань фізичного маятника (рис. 4.16).

Розв'язання

Маятник має один ступінь вільності, $H = 1$, його положення кутом повороту φ , який приймаємо за узагальнену координату.

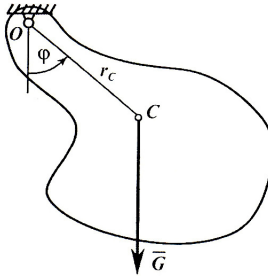


Рис. 4.16

$q = \varphi$ – узагальнена координата, кут повороту,

$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ – узагальнена швидкість (кутова швидкість тіла).

Тоді кінетична енергія:

$$T = \frac{1}{2} I_{z_0} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z_0} \dot{\varphi}^2,$$

потенціальна енергія:

$$\Pi = -Gr_c \cos \varphi,$$

звідки:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} I_{z_0} \dot{\varphi}^2 + Gr_c \cos \varphi.$$

Визначимо похідні за кутовою швидкістю і кутом повороту від функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_{z_0} \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -Gr_c \sin \varphi.$$

Запишемо рівняння Лагранжа, підставимо в нього відповідні похідні і дістанемо шукане диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \Rightarrow I_{z_0} \ddot{\varphi} - Gr_c \sin \varphi = 0.$$

Приклад 4.9

Скласти рівняння руху зерна на поверхні циліндра трієра і визначити його перший інтеграл, якщо радіус циліндра r , а коефіцієнт тертя зерна об поверхню циліндра f (рис. 4.17).

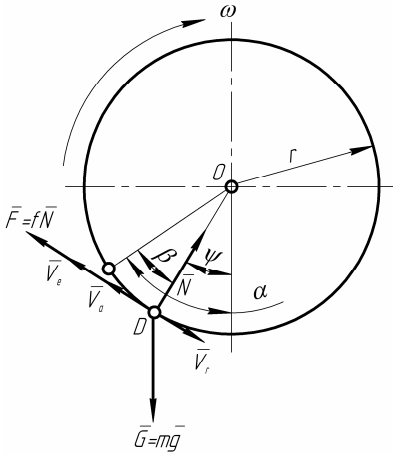


Рис. 4.17

відносному русі зерна буде $\dot{\beta} = \omega - \dot{\psi}$.

На матеріальну точку діє сила ваги $G = mg$, нормальна реакція \bar{N} циліндра і сила тертя $F = fN$. За узагальнені координати приймаємо величини r і ψ . Визначаємо узагальнені сили, що відповідають цим параметрам. Узагальнена сила Q_r , що відповідає узагальненій координаті r , визначається з виразу елементарної роботи сил, що діють на матеріальну точку:

$$\delta A = (mg \cos \psi - N) \delta r.$$

$$Q_r = mg \cos \psi - N.$$

Узагальнену силу Q_ψ , що відповідає узагальненій координаті ψ , визначимо з рівняння:

$$Q_\psi \delta \psi = (fN - mg \sin \psi) r \delta \psi.$$

Звідси:

$$Q_\psi = (fN - mg \sin \psi) r.$$

Визначаємо кінетичну енергію матеріальної точки. Для цього визначимо спочатку її абсолютну швидкість v_a .

$$v_a = v_e - v_r,$$

Кутову швидкість робочого циліндра трієра приймаємо ω . Тоді кут повороту циліндра, а також кут повороту маси зерна в переносному русі $\alpha = \omega t$, де t – час.

На рис. 4.17 показані: кут повороту радіуса точки у відносному русі дорівнює β , а кут повороту радіуса матеріальної точки в абсолютному русі – ψ . Очевидно, кут $\beta = \alpha - \psi$, а кутова швидкість у

де v_e – переносна швидкість точки, v_r – відносна швидкість.

Але переносна швидкість $v_e = r\omega$, а відносна $v_r = r\dot{\beta}$. Тоді кінетична енергія точки визначається з такого виразу:

$$T = \frac{mv_a^2}{2} = \frac{m}{2}(r\omega - r\dot{\beta})^2 = \frac{mr^2}{2}(\dot{\psi})^2.$$

Знаходимо часткові похідні від кінетичної енергії за узагальненими координатами і узагальненими швидкостями:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr(\dot{\psi})^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = mr^2\dot{\psi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Таким чином, диференціальні рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд:

$$\begin{aligned} -mr(\dot{\psi})^2 &= mg \cos \psi - N; \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\psi}) &= (fN - mg \sin \psi)r, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} mr(\dot{\psi})^2 &= N - mg \cos \psi; \\ mr(\ddot{\psi}) &= (fN - mg \sin \psi)r. \end{aligned}$$

Виключаючи з цих рівнянь величину нормальної реакції, будемо мати диференціальне рівняння руху матеріальної точки (частинок потоку зерна) на поверхні циліндра:

$$\ddot{\psi} - f(\dot{\psi})^2 = \frac{g}{r}(f \cos \psi - \sin \psi).$$

Враховуючи, що:

$$f = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

останнє рівняння можна представити ще і в такому вигляді:

$$\ddot{\psi} - (\dot{\psi})^2 \tan \varphi + \frac{g}{r} \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\cos \varphi} = 0. \quad (a)$$

Проведемо інтегрування рівняння. Для цього зробимо підстановку $Z = (\dot{\psi})^2$, тоді $\ddot{\psi} = \frac{1}{2} \frac{dZ}{d\psi}$ і рівняння (a) перетворюється в диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dZ}{d\psi} - 2Z \operatorname{tg} \varphi + \frac{2g}{r \cos \varphi} \sin(\psi - \varphi) = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо (враховуючи, що $\psi = \sqrt{Z}$):

$$\dot{\psi} = \sqrt{cI^{2+\operatorname{tg}\varphi} + \frac{2g \cos \delta \cos(\psi - \varphi - \varepsilon)}{r \cos \varphi}}.$$

Тут c – стала інтегрування, а кут ε визначається з умови:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Приклад 4.10

Скласти диференціальне рівняння руху машинного агрегату для періоду вмикання муфти зчеплення, коли вона проковзує.

Вважаємо, що всі ланки приводу агрегату абсолютно жорсткі, а зведені до вала двигуна моменти інерції обертальних мас – сталі.

Скористаємося диференціальними рівняннями Лагранжа другого роду. Для цього знайдемо вираз кінетичній енергії системи. Вона дорівнює сумі кінетичних енергій частини агрегату, розміщених попереду муфти зчеплення – T_1 , частини агрегату, розміщених після муфти зчеплення, – T_2 :

$$T = T_1 + T_2,$$

до того ж

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} (I_0 + I_2) \dot{\beta}^2,$$

де I_1 – зведений до вала двигуна момент інерції мас, розміщених попереду муфти зчеплення;

$\dot{\alpha}$ – кутова швидкість вала двигуна;

I_2 – зведений момент інерції мас, розміщених після муфти зчеплення;

I_0 – момент інерції, зведений до вала муфти зчеплення, від мас агрегату, що мають поступальний рух;

$\dot{\beta}$ – кутова швидкість вала муфти зчеплення.

Оскільки система має два ступеня вільності, складемо два рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_{\beta},$$

але

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = I_1 \dot{\alpha}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = I_1 \ddot{\alpha}; \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (I_O + I_2) \dot{\beta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) = (I_O + I_2) \ddot{\beta}; \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0.$$

Тоді, остаточно, дістанемо диференціальні рівняння руху:

$$I_1 \ddot{\alpha} = Q_{\alpha}; \quad (\text{а})$$

$$(I_O + I_2) \ddot{\beta} = Q_{\beta}; \quad (\text{б})$$

Щоб отримати значення узагальнених сил, напишемо вираз віртуальної роботи:

$$\delta A = (F_o - R_f) r \delta_{\alpha} + (R_f - R_c) r \delta_{\beta}, \quad (\text{в})$$

де $M_o = rF_o$ – крутний момент двигуна, зведений до вала двигуна;

$M_f = rR_f$ – момент сил тертя на муфті зчеплення;

$M_c = rR_c$ – момент сил опору робочої машини, зведений до вала муфти зчеплення.

Із рівняння (в) $Q_{\alpha} = M_o - M_f$;

$$Q_{\beta} = M_f - M_c.$$

Тоді рівняння (а) і (б) можна представити у вигляді:

$$I_1 \ddot{\alpha} = M_o - M_f; \quad (I_O + I_2) \ddot{\beta} = M_f - M_c.$$

Щоб розв'язати ці рівняння, треба мати задані значення M_o , M_f і M_c у функції від часу, кутових швидкостей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ і кутів повороту α , β вала двигуна та вала муфти зчеплення, які

отримують на підставі емпіричних даних.

У деякий момент часу кутова швидкість вала муфти зчеплення β стає рівною кутовій швидкості вала двигуна $\beta = \dot{\alpha}$. Тоді диференціальне рівняння руху агрегату з цього моменту набуває вигляду:

$$(I_O + I_2)\ddot{\alpha} = M_\partial - M_c. \quad (г)$$

Щоб розв'язати це рівняння, потрібно мати значення M_∂ і M_c в функції від часу t , кутової швидкості $\dot{\alpha}$ і кута повороту вала α .

Розглянемо це рівняння для того випадку, коли момент двигуна дорівнює:

$$M_\partial = M_{O\partial} - k\dot{\alpha}^2 \quad (M_{O\partial} = \text{const} \text{ і } k = \text{const.})$$

У такому випадку рівняння (г) можна записати у вигляді:

$$\ddot{\alpha} + k_O\dot{\alpha}^2 = d,$$

де

$$k_O = \frac{k}{I_O + I_2}; \quad d = \frac{M_{O\partial} - M_c}{I_O + I_2} = \text{const.}$$

Приклад 4.11

Причіпний агрегат складається з однієї причіпної машини або знаряддя (плуга, культиватора, сівалки). Сумарний опір агрегату \bar{R} і поступальна швидкість \bar{v}_o під час руху залишаються сталими. Агрегат симетричний і його центр ваги лежить на лінії симетрії, яка збігається з напрямом сили тяги P трактора (рис. 4.18).

Внаслідок того, що в деякий момент часу сумарний опір \bar{R} агрегату змістився вліво від лінії симетрії, виникає пара сил, під дією якої агрегат починає повертатися проти стрілки годинника. Частково ця пара зрівноважується реактивною парою $(\bar{F}, -\bar{F})$, яка виникає від сил опору робочих і опорних органів агрегату у разі їх бічного зсуву.

Визначити рівняння плоско-паралельного руху агрегату.

Агрегат знаходиться під дією збурювального моменту:

$$M = Rr - Fl, \quad (а)$$

де r – зміщення сумарного опору агрегату від лінії симетрії;
 l – плече реактивної пари (\bar{F} , $-\bar{F}$).

Обмежимося розглядом малого відхилу агрегату від лінії тяги (кут $\theta < 10^\circ$). Тоді:

$$F = R \operatorname{tg} \theta \approx R \theta$$

і рівняння (а) можна записати у вигляді $M = Rr - Rl\theta$.

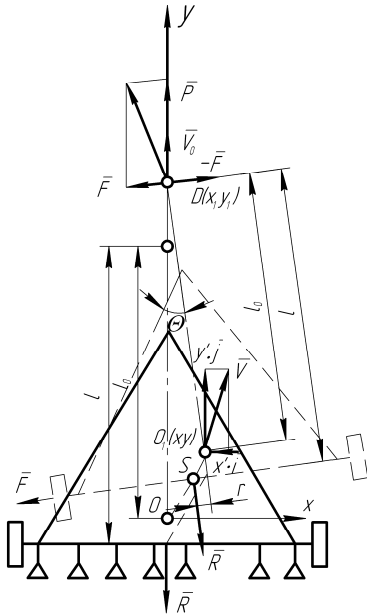


Рис. 4.18

Тоді можна мати декартові координати центра ваги агрегату:

$$\left. \begin{aligned} x &= l_0 \sin \theta \\ y &= v_0 t + l_0 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{б})$$

Похідні дають проекції швидкості руху центра ваги агрегату:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= l_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= v_0 + l_0 \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{г})$$

Складемо рівняння в'язі системи. Для такої операції позначимо координати точки причепа x_1 і y_1 , координати центра ваги агрегату x і y , а відстань між цими точками l_0 . Тоді рівняння в'язі має такий вигляд:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = l_0^2. \quad (\text{б})$$

Оскільки

$$x_1 = 0, \quad y_1 = v_0 t + l_0,$$

то рівняння (б) можна переписати так:

$$x^2 + (v_0 t + l_0 - y)^2 = l_0^2.$$

Узагальненою координатою приймемо кут відхилення θ .

Таким чином, у такому випадку маємо динамічну систему з одним ступенем вільності з голономною (геометричною) в'яззю.

Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2.$$

Враховуючи систему рівнянь (г), матимемо:

$$T = \frac{1}{2}m[l_O^2(\dot{\theta})^2 + v_O^2 + 2v_O l_O(\dot{\theta})\sin\theta] + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2,$$

де I – момент інерції агрегату відносно центра мас.

m – маса агрегату.

Складемо далі диференціальне рівняння руху у формі Лагранжа другого роду.

Оскільки ця система голономна і має один ступінь вільності, то це рівняння матиме такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_H, \quad (д)$$

де Q_H – узагальнена сила.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$ і $\frac{\partial T}{\partial \theta}$. Вони відповідно дорівнюють:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (ml_O^2 + I)\dot{\theta} + mv_O l_O \sin\theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mv_O l_O \dot{\theta} \cos\theta.$$

Щоб визначити узагальнену силу Q_H , напишемо вираз елементарної роботи прикладених сил на віртуальному переміщенні системи:

$$\delta A = M\delta\theta = (Rr - Rl\theta)\delta\theta.$$

Таким чином,

$$Q_H = Rr - Rl\theta.$$

Підставляючи частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$, $\frac{\partial T}{\partial \theta}$ і узагальнену силу Q_H в рівняння Лагранжа (д), отримаємо:

$$\frac{d}{dt} = [(ml_O^2 + I)\dot{\theta} + mv_O l_O \sin \theta] - mv_O l_O \dot{\theta} \cos \theta = Rr - Rl\dot{\theta},$$

або

$$(ml_O^2 + I)\ddot{\theta} = Rr - Rl\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \lambda^2 \theta = \lambda^2 k, \quad (e)$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{Rl}{ml_O^2 + I}}, \quad k = \frac{r}{l}.$$

Розв'язання рівняння (e) має відомий вигляд

$$\theta = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + k, \quad (ж)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі інтегрування.

Оскільки, якщо $t = 0$, кут $\theta = \dot{\theta} = 0$, то $C_1 = -k$; $C_2 = 0$.

Тому рівняння (ж) для кута повороту перетворюється:

$$\theta = k(1 - \cos \lambda t) \Rightarrow \theta = \frac{r}{l} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{Rl}{ml_O^2 + I}} t \right). \quad (з)$$

Рух агрегату є плоско-паралельним і тому визначається двома рівняннями (в) і третім рівнянням (з).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Для яких матеріальних систем коректно складати рівняння Лагранжа другого роду?
2. Чи входять до рівняння Лагранжа другого роду реакції ідеальних в'язей? Якщо ні, то чому?
3. Скільки рівнянь Лагранжа треба скласти для певної системи?
4. Що ви знаєте про методику розв'язування задач за рівнянням Лагранжа другого роду?
5. Що визначає узагальнена сила і як її знаходять?
6. Як записати рівняння Лагранжа для консервативної системи?
7. Як ви розумієте функцію Лагранжа?

4.3.4. Методика і приклади розв'язування задач із динаміки матеріальної системи

Задача 1

Вантаж 1 вагою $P_1=400$ [Н], опускаючись донизу на похилій площині, яка утворює з горизонтом кут α , приводить у дію ступінчастий коток 3 вагою $P_3=200$ Н за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинutoї через нерухомий блок 2 вагою $P_2=200$ Н. Радіуси котка 3 дорівнюють: $r_3=0,2$ м, $R_3=0,6$ м. Коток 3 котиться без ковзання на похилій площині з кутом β до горизонту. Радіус інерції котка 3 відносно осі O_1 , яка проходить через його центр, дорівнює $\rho_{O_1} = 0,4$ м. Блок 2 вважається однорідним диском. Ковзання нитки вздовж блока відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам; $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$.

1. Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до всієї системи теорему про зміну кінетичної енергії.

2. Визначити натяг нитки на ділянці KC , застосувавши теорему про зміну моменту кількості руху відносно осі O до частини системи, яка складається з вантажу 1 і блока 2.

3. Визначити реакції осі O блока 2, застосувавши теорему про зміну кількості руху у диференціальній формі до тієї самої частини системи.

4. Визначити силу тертя, яка забезпечує рух без проковзування котка 3 на площині, застосувавши до котка 3 теорему про рух центра мас.

Розв'язання

1. Визначимо прискорення a_1 вантажу 1.

Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.19). Розглянемо рух матеріальної системи, яка складається з вантажу 1, блока 2 і котка 3.

Покажемо задані сили: \bar{P}_1 – сила ваги вантажу 1, \bar{P}_2 – сила ваги блока 2, \bar{P}_3 – сила ваги котка 3; реакції в'язей: \bar{N}_1 – реакція площини, вздовж якої рухається вантаж 1, \bar{X}_O, \bar{Y}_O – реакції осі O блока 2, \bar{N}_3 – реакція площини, вздовж якої рухається коток 3; \bar{F} – сила тертя ковзання котка 3 на площині.

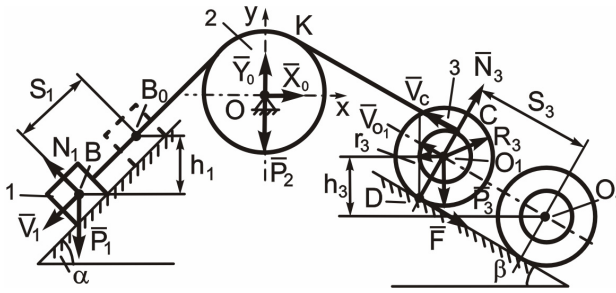


Рис. 4.19

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії для всієї матеріальної системи:

$$T_K - T_o = \sum_{i=1}^n A_i^e, \quad (1)$$

де T_o , T_K – кінетична енергія у початковому та кінцевому положенні системи, відповідно. У початковому положенні центр ваги вантажу 1 знаходився у точці B_o , кінцеве положення центра ваги вантажу 1 відповідає точці B_1 , тобто, переміщення вантажу S_1 ;

$\sum_{i=1}^n A_i^e$ – сума робіт заданих зовнішніх сил.

Вважатимемо, що у початковий момент часу система перебувала у стані спокою, тобто. $T_o=0$. Підрачуємо T_k :

$$T_k = T_1 + T_2 + T_3,$$

де T_1 , T_2 , T_3 – кінетичні енергії вантажу 1, блока 2 і котка 3.

Кінетична енергія поступального руху вантажу 1:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g}.$$

Кінетична енергія обертального руху блока 2 навколо осі O :

$$T_2 = I_o \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{P_2 R_2^2 \omega_2^2}{4g}.$$

Кінетична енергія плоского руху котка 3:

$$T_3 = \frac{m_3 v_{o_1}^2}{2} + I_{o_1} \frac{\omega_3^2}{2} = \frac{P_3 v_{o_1}^2}{2g} + \frac{P_3 \rho_{o_1}^2 \omega_3^2}{2g}.$$

Виразимо ω , v_{o_1} , ω через v_1 :

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \quad v_c = v_1.$$

Точка D – миттєвий центр швидкостей для котка 3, тоді має місце співвідношення:

$$\frac{v_c}{R_3 + r_3} = \frac{v_{o_1}}{R_3},$$

звідки отримуємо:

$$v_{o_1} = \frac{v_1 R_3}{R_3 + r_3}.$$

Оскільки:

$$\omega_3 = \frac{v_{o_1}}{R_3},$$

то, враховуючи попередній вираз, дістанемо:

$$\omega_3 = \frac{v_1}{R_3 + r_3}.$$

Підставимо отримані значення ω , v_{o_1} , ω у вирази (5), (4), (3), (2):

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{4g} + \frac{P_3 (R_3^2 + \rho_{o_1}^2) v_1^2}{2g (R_3 + r_3)^2} = v_1^2 \left[\frac{P_1}{2g} + \frac{P_2}{4g} + \frac{P_3 (R_3^2 + \rho_{o_1}^2)}{2g (R_3 + r_3)^2} \right] = \\ &= v_1^2 \left[\frac{400}{2 \cdot 10} + \frac{200}{4 \cdot 10} + \frac{200}{2 \cdot 10} \cdot \frac{(0,6^2 + 0,4^2)}{(0,6 + 0,2)^2} \right] = 33 v_1^2. \end{aligned}$$

Таким чином, кінетична енергія системи:

$$T_k = 33 \cdot v_1^2 \text{ Дж.}$$

Знайдемо суму робіт заданих сил:

$$\sum_{i=1}^n A_i^e = A_1 + A_3,$$

де A_1 – робота сили ваги вантажу 1 на переміщенні h_1 ; A_3 – робота сили ваги котка 3 на переміщенні h_3 (h_1 і h_3 – відповідно вертикальне перевищення точки B_0 над точкою B і точки O_1 над точкою O'_1).

Підрачуємо роботу кожної сили окремо:

$$A_1 = P_1 \cdot h_1 = P_1 S_1 \cdot \sin \alpha = 400 \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = 280 \cdot S_1 \text{ Нм.}$$

Перед визначенням роботи A_3 зауважимо, що між переміщеннями S_1 і S_3 існує наступне співвідношення:

$$S_3 = \frac{S_1 \cdot R_3}{(R_3 + r_3)}.$$

Дійсно, якщо точка C переміститься на лінійну величину S_1 , то кут повороту котка 3:

$$\varphi = \frac{S_1}{(R_3 + r_3)}.$$

Точка O_1 переміститься на величину:

$$\begin{aligned} S_3 &= \varphi \cdot R_3 = \frac{S_1 \cdot R_3}{(R_3 + r_3)}. \\ A_3 &= -P_3 \cdot h_3 = -P_3 S_3 \cdot \sin \beta = -P_3 \frac{R_3 S_1 \sin \beta}{R_3 + r_3} = \\ &= -\frac{200 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot S_1}{0,6 + 0,2} = -75 \cdot S_1, \quad [\text{Нм}]. \end{aligned}$$

Підставимо отримане значення робіт у праву частину (1):

$$\sum_{i=1}^n A_i^e = 280 S_1 - 75 S_1 = 205 S_1 [\text{Нм}].$$

Підставимо отримані значення кінетичної енергії і суми робіт у вираз (1):

$$33v_1^2 = 205S_1.$$

Візьмемо похідну за часом від правої та лівої частин попереднього виразу:

$$2 \cdot 33 \cdot v_1 \frac{dv_1}{dt} = 205 \cdot \frac{dS_1}{dt}.$$

Оскільки:

$$v_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1,$$

то шукане прискорення вантажу 1 після підстановки у попередній вираз дорівнює:

$$66 \frac{dS_1}{dt} a_1 = 205 \frac{dS_1}{dt},$$

звідки:

$$a_1 = \frac{205}{66} = 3,1 [м/с^2].$$

2. Знайдемо натяг нитки на ділянці КС. Складемо розрахункову схему задачі відповідно до умови (рис. 4.20). Замінімо дію нитки на блок 2 її реакцією S_{23} .

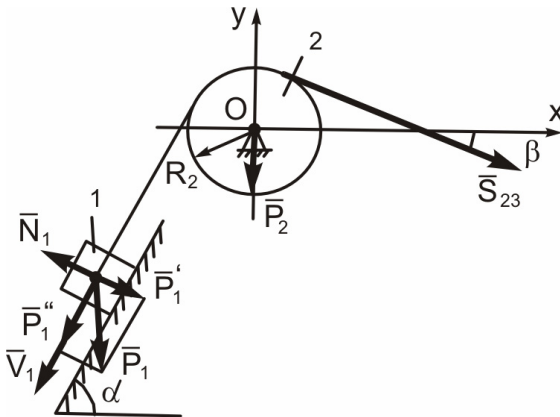


Рис. 4.20

Запишемо для частини системи, що розглядається, теорему про зміну моменту кількості руху відносно осі O :

$$\frac{dK_o}{dt} = \sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i^e).$$

Оскільки система складається з двох тіл – вантажу 1 і блока 2, то:

$$K_o = K_{o1} + K_{o2},$$

де K_{o1} – момент кількості руху вантажу 1 відносно осі O блока 2; K_{o2} – момент кількості руху самого блоку 2 відносно осі O .

Знайдемо величини моментів кількості руху:

$$K_{o1} = m_1 v_1 \cdot R_2 = \frac{P_1}{g} v_1 \cdot R_2,$$

$$K_{o2} = I_o \omega_2 = \frac{P_2 R_2^2 v_1}{2g \cdot R_2} = \frac{P_2 R_2 v_1}{2g},$$

де $I_o = \frac{P_2 \cdot R_2^2}{2g}$.

Підставимо отримані величини у шуканий вираз:

$$K_o = \frac{P_1 R_2 v_1}{g} + \frac{P_2 R_2 v_1}{2g} = \frac{R_2}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) \cdot v_1.$$

Тоді:

$$\frac{dK_o}{dt} = \frac{R_2}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) \cdot \frac{dv_1}{dt} = \frac{R_2}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) \cdot a_1.$$

Підрахуємо суму моментів заданих сил відносно точки O :

$$\sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i^e) = P_1 R_2 \cdot \sin \alpha - S_{23} R_2.$$

Підставимо знайдені величини у вихідне рівняння:

$$\frac{R_2}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) \cdot a_1 = R_2 (P_1 \sin \alpha - S_{23}),$$

звідки знаходимо натяг S_{23} нитки на ділянці KC :

$$S_{23} = P_1 \sin \alpha - \frac{a_1}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) = 400 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3,1}{10} \cdot \left(400 + \frac{200}{2} \right) = 127,8 [H].$$

3. Знайдемо реакції осі O блока 2, використовуючи теорему про зміну кількості руху у диференціальній формі. Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.21), де покажемо реакції осі O блока 2 – \bar{X}_o і \bar{Y}_o .

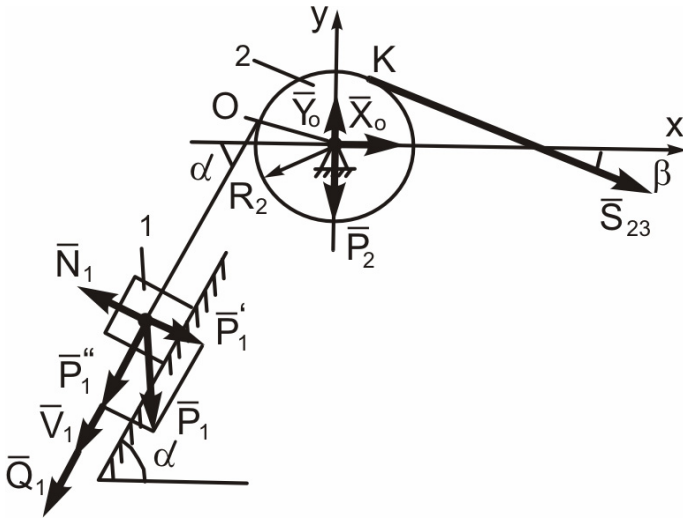


Рис. 4.21

На основі теореми про зміну кількості руху матеріальної системи у проекціях на осі Ox і Oy запишемо:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e,$$

де Q_x, Q_y – проекції головного вектора кількості руху на осі x і y ;

$\sum_{i=1}^n F_{ix}^e, \sum_{i=1}^n F_{iy}^e$ – суми проекцій всіх зовнішніх сил на вказані осі.

Реакції осі блока 2 \bar{X}_o, \bar{Y}_o умовно приймаємо за зовнішні сили. Ця система складається із двох тіл: вантажу 1 і блока 2. Тому головний вектор кількості руху:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2,$$

де \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 – вектори кількості рухів вантажу 1 і блока 2.

Знайдемо вказані величини:

$$\bar{Q}_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \bar{v}_1,$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{P_2}{g} \cdot \bar{v}_o.$$

Оскільки вісь O блока 2 є нерухомою, то $\bar{Q}_2 = 0$:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \bar{v}_1.$$

Проектуємо вектор \bar{Q} на осі координат:

$$Q_x = -\frac{P_1}{g} \cdot v_1 \cos \alpha,$$

$$Q_y = -\frac{P_1}{g} \cdot v_1 \sin \alpha.$$

Візьмемо похідну за часом від двох останніх виразів:

$$\frac{dQ_x}{dt} = -\frac{P_1}{g} \cdot a_1 \cos \alpha,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = -\frac{P_1}{g} \cdot a_1 \sin \alpha.$$

Проектуємо всі зовнішні сили на осі координат:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix}^e = X_o + S_{23} \cdot \cos \beta - P_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy}^e = Y_o - P_2 - S_{23} \cdot \sin \beta - P_1 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Підставляємо знайдені величини у вираз теореми:

$$\begin{aligned}
 -\frac{P_1}{g} a_1 \cos \alpha &= X_o + S_{23} \cdot \cos \beta - P_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\
 -\frac{P_1}{g} \cdot a_1 \sin \alpha &= Y_o - P_2 - S_{23} \cdot \sin \beta - P_1 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Отримані рівняння дозволяють визначити невідомі реакції осі O блока 2:

$$\begin{aligned}
 X_o &= \frac{P_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - S_{23} \cos \beta - \frac{P_1}{g} a_1 \cos \alpha = \\
 &= \frac{400}{2} \cdot 1 - 127,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{400}{10} \cdot 3,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,6 \quad [H],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_o &= P_2 + S_{23} \sin \beta + P_1 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{P_1}{g} a_1 \sin \alpha = \\
 &= 200 + 127,8 \cdot \frac{1}{2} + 400 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{400}{10} \cdot 3,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 377,1 \quad [H].
 \end{aligned}$$

4. Визначимо силу тертя, яка виключає проковзування котка 3 вздовж похилої площини. З цією метою застосуємо до котка 3 теорему про рух центра мас. Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.22), замінивши дію нитки на коток 3 її реакцією \bar{S}_{32} . Очевидно, що $\bar{S}_{32} = -\bar{S}_{23}$.

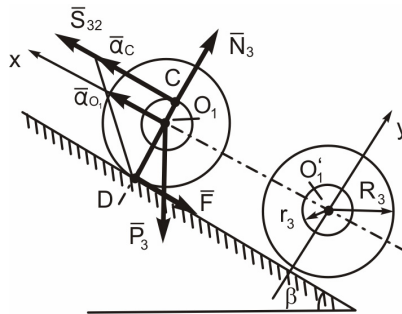


Рис. 4.22

Покажемо інші зовнішні сили, що діють на коток 3: \bar{P}_3 – сила ваги, складові реакції похилої площини: \bar{N}_3 – нормальна реакція і \bar{F} – сила тертя, яка утримує коток від ковзання. Помістимо початок координат у точку O_1 . Осі координат направимо, як показано на рис. 4.20.

Складемо диференціальне рівняння руху центра котка в проекції на вісь x , підставивши в праву частину суму проекцій прикладених сил

$$m_3 a_{o_1} = S_{32} - P_3 \sin \beta - F.$$

З останньої рівності визначаємо силу тертя F :

$$F = S_{32} - P_3 \sin \beta - m_3 a_{o_1}.$$

Виразимо прискорення a_{o_1} точки O_1 через прискорення a_1 вантажу 1. Точка D є миттєвим центром прискорень, отже, можемо записати співвідношення для прискорень a_c точки C і a_{o_1} точки O_1 :

$$\frac{a_c}{R_3 + r_3} = \frac{a_{o_1}}{R_3}, \Rightarrow a_{o_1} = \frac{a_c R_3}{R_3 + r_3}.$$

Оскільки $a_c = a_1$, то

$$a_{o_1} = \frac{a_1 R_3}{R_3 + r_3}.$$

З урахуванням останнього визначимо силу тертя F , яка утримує коток 3 від проковзування вздовж похилої площини:

$$F = S_{32} - P_3 \sin \beta - \frac{P_3}{g} \cdot \frac{a_1 R_3}{R_3 + r_3} = 127,8 - 200 \cdot \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{200}{10} \cdot \frac{3,1 \cdot 0,6}{0,8} = -18,7 \quad [H].$$

Знак «мінус» вказує на те, що напрям вектора сили тертя не збігається з додатним напрямом осі O_1x .

Задача 2

Для розв'язання задачі на застосування диференціальних рівнянь плоского руху твердого тіла до визначення закону його руху необхідно використати умову і розв'язок задачі 1, а саме, окремо розглянути рух котка за умови, що натяг нитки на ділянці KC або AB визначено.

Ступінчастий коток котиться вгору без ковзання на похилій площині під дією невагомої нерозтяжної нитки, намотаної на менший діаметр котка, з силою $\bar{S}=130\text{ Н}$ (рис. 4.23).

Площина нахилена під кутом β до горизонту. Вага котка $P=200\text{ Н}$.

Радіуси котка дорівнюють: $r=0,2\text{ м}$, $R=0,6\text{ м}$.

Радіус інерції котка відносно осі O , яка проходить через його центр, дорівнює: $\rho_{O_1}=0,4\text{ м}$.

Кути дорівнюють: $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$.

Визначити закон руху осі котка (дані взяти із задачі 1).

Розв'язання

Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.23). Коток розглядаємо у положенні, яке відповідає моменту часу t .

Покажемо на зазначеній схемі задані активні сили \bar{P} , \bar{S} . Внаслідок дії активних сил виникають реакції поверхні – \bar{N} і \bar{F} . Осі координат показані на рис. 4.23.

Запишемо диференціальні рівняння плоско-паралельного руху котка у такому вигляді:

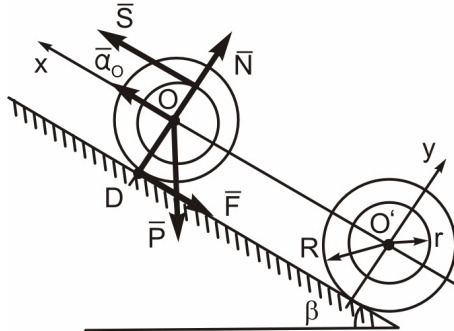


Рис. 4.23

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_o &= S - F - P \sin \beta, \\ M\ddot{y}_o &= N - P \cos \beta, \\ I_o\ddot{\phi} &= S \cdot r + F \cdot R, \end{aligned} \right\}$$

де M – маса котка; $\ddot{x}_o = a_o$ – прискорення осі O котка;

I_o – момент інерції маси котка відносно осі, що проходить через точку O .

Оскільки:

$$y_o = R = const,$$

то рух котка у напрямі осі Oy не відбувається і:

$$\ddot{y}_o = 0.$$

Помноживши перше рівняння системи на R , отримаємо:

$$M\ddot{x}_o \cdot R = S \cdot R - F \cdot R - P \cdot R \sin \beta.$$

Додавши отримане рівняння до останнього рівняння системи, матимемо:

$$M\ddot{x}_o R + I_o\ddot{\phi} = S(R + r) - P \cdot R \sin \beta.$$

Точка D є миттєвим центром швидкостей, тому прискорення \ddot{x}_o осі O котка виражатиметься через кутове прискорення $\ddot{\phi}$ котка наступним чином:

$$\ddot{x}_o = \ddot{\phi} \cdot R,$$

звідки:

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}_o}{R}.$$

Підставляючи значення $\ddot{\phi}$ в останнє рівняння, отримаємо:

$$\ddot{x}_o \left(M \cdot R + I_o \frac{1}{R} \right) = S(R + r) - P \cdot R \sin \beta.$$

Із цього виразу визначимо прискорення осі O котка:

$$\ddot{x}_o = \frac{S(R+r) - P \cdot R \sin \beta}{M \cdot R + I_o \cdot \frac{1}{R}},$$

або

$$\ddot{x}_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)}.$$

Оскільки прискорення точки O є першою похідною від її швидкості за часом t :

$$\ddot{x}_o = \frac{dv_o}{dt},$$

то, підставляючи зазначене співвідношення в останній вираз, отримаємо:

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)}.$$

Помноживши праву і ліву частину отриманої рівності на dt , матимемо:

$$\int dv_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)} \int dt.$$

У підсумку інтегрування визначимо швидкість осі O котка (закон зміни швидкості у функції параметра часу t):

$$v_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)} \cdot t + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, яка визначається за початковими умовами.

Оскільки система у початковий момент часу (якщо $t=0$) знаходилась у стані спокою, то $v_o = 0$, а тому і $C_1=0$.

Таким чином, швидкість осі O котка у будь-який момент часу

t дорівнюватиме:

$$v_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)} \cdot t.$$

Оскільки швидкість точки є перша похідна від закону руху точки за часом t , тобто

$$v_o = \frac{dx_o}{dt},$$

то, підставляючи це співвідношення у вираз для швидкості осі O котка, отримаємо:

$$\frac{dx_o}{dt} = \frac{gR \left[S(R+r) - PR \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)} t.$$

Помножимо ліву і праву частини останнього виразу на dt та інтегруємо отримане рівняння:

$$\int dx_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right]}{P(R^2 + \rho_o^2)} \int t dt,$$

У підсумку інтегрування знайдемо закон руху осі котка:

$$x_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right] t^2}{2P(R^2 + \rho_o^2)} + C_2,$$

де C_2 – довільна стала, яка визначається за наступними початковими умовами:

$$\text{коли } t = 0, \text{ то } x_o = 0.$$

Враховуючи зазначені початкові умови, знаходимо, що $C_2 = 0$.

Таким чином, вісь O котка переміщується за законом:

$$x_o = \frac{gR \left[S(R+r) - P \cdot R \sin \beta \right] t^2}{2P(R^2 + \rho_o^2)}.$$

Підставляючи в останній вираз числові дані з умови задачі, отримуємо:

$$x_o = \frac{10 \cdot 0,6 \left[130(0,6 + 0,2) - 200 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \right] t^2}{2 \cdot 200 (0,6^2 + 0,4^2)} = 1,27 t^2 \text{ м.}$$

Отже, шуканий закон руху осі O котка остаточно має такий вигляд:

$$x_o = 1,27 t^2, \text{ м.}$$

Задача 3

Вантаж 1 опускається на похилій площині, нахиленої під кутом α до горизонту. Вага вантажу $P_1 = 400 \text{ Н}$. За допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинutoї через нерухомий блок 2, вантаж приводить у рух ступінчастий коток 3, який котиться без ковзання на похилій площині, нахилений під кутом β до горизонту. Вага блока 2 дорівнює: $P_2 = 200 \text{ Н}$, вага котка 3 – $P_3 = 200 \text{ Н}$. Радіуси котка дорівнюють: $r_3 = 0,2 \text{ м}$, $R_3 = 0,6 \text{ м}$, а радіус інерції відносно осі O_1 , що проходить через його центр, дорівнює $\rho_{O_1} = 0,4 \text{ м}$.

Блок 2 є суцільним однорідним диском. Під час розрахунків взяти $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Визначити прискорення вантажу 1 і реакцію осі блока 2, застосувавши до розв'язання задачі принцип д'Аламбера для матеріальної системи.

Розв'язання

Складемо розрахункову схему задачі із вказівкою кінематичних характеристик матеріальної системи, що розглядається (рис. 4.24).

Розглянемо рух кожного тіла системи окремо, враховуючи їх взаємний зв'язок.

1. Розглянемо рух вантажу 1. Вантаж здійснює поступальний рух у напрямі осі x . На вантаж, що рухається, діють наступні зовнішні сили (рис. 4.25): \bar{P}_1 – сила ваги вантажу 1; \bar{N}_1 – нормальна реакція площини; \bar{S}_{12} – реакція нитки. Згідно з принципом д'Аламбера, додамо до цих сил силу інерції \bar{F}_1^{in} .

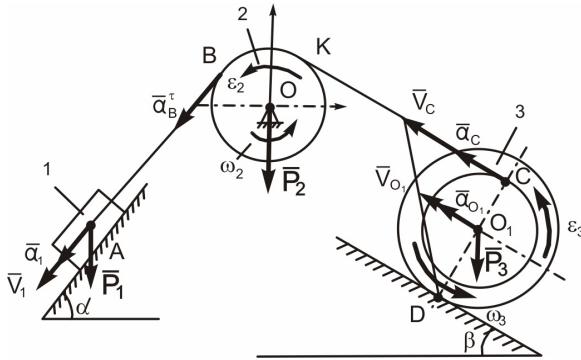


Рис. 4.24

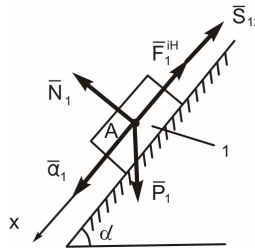


Рис. 4.25

Ця сила є рівнодійною множини сил інерції точок вантажу, прикладена у точці A і напрямлена протилежно вектору прискорення \bar{a}_1 .

На основі принципу д'Аламбера геометрична сума всіх сил, враховуючи силу інерції \bar{F}_1^{in} , дорівнює нулю, тобто, система сил є формально зрівноваженою:

$$\bar{P}_1 + \bar{N}_1 + \bar{F}_1^{in} + \bar{S}_{12} = 0. \quad (1)$$

Проектуючи рівняння (1) на вісь x , отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = P_1 \sin \alpha - S_{12} - F_1^{in} = 0. \quad (2)$$

Складові рівняння (2) дорівнюють:

$$F_1^{in} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1,$$

де m_1 – маса вантажу 1, a_1 – прискорення вантажу 1
З виразу (2) знаходимо реакцію нитки:

$$S_{12} = P_1 \sin \alpha - \frac{P_1}{g} a_1. \quad (3)$$

2. Розглянемо плоско-паралельний рух котка 3 (рис. 4.26).

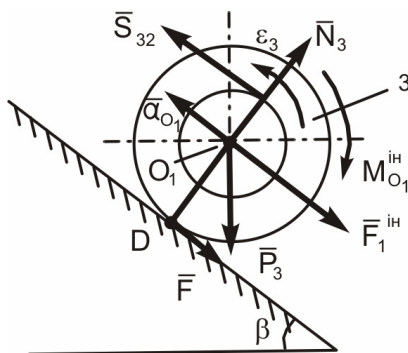


Рис. 4.26

На коток 3 діє сила ваги \bar{P}_3 , складові реакції похилої площини \bar{N}_3 і \bar{F} , реакція нитки \bar{S}_{32} .

Приєднаємо до цих сил сили інерції всіх точок котка, що зводяться до головного вектора \bar{F}_3^{in} , прикладеного до точки O_1 з напрямом, протилежним вектору прискорення \bar{a}_{o_1} , і пари сил інерції з моментом $M_{o_1}^{in}$, спрямованим протилежно кутовому прискоренню котка ϵ_3 .

На основі принципу д'Аламбера отримана система сил є формально зрівноваженою:

$$\sum_{i=1}^n m_D(\bar{F}_i) = S_{32}(R_3 + r_3) - P_3 \cdot R_3 \sin \beta - F_3^{in} \cdot R_3 - M_{o_1}^{in} = 0. \quad (4)$$

Сила інерції \bar{F}_3^{iu} та момент сил інерції $M_{o_1}^{iu}$, що входять до виразу (4), відповідно дорівнюють:

$$F_3^{iu} = m_3 a_{o_1} = \frac{P_3}{g} a_{o_1},$$

$$M_{o_1}^{iu} = I_{o_1} \varepsilon_3,$$

де m_3 – маса котка; a_{o_1} – прискорення осі котка; I_{o_1} – момент інерції котка відносно осі O_1 ; ε_3 – кутове прискорення котка.

Момент інерції котка:

$$I_{o_1} = \frac{P_3}{g} \rho_{o_1}^2.$$

З рівняння (4) знаходимо реакцію нитки S_{32} :

$$S_{32} = \frac{P_3}{g} \frac{R_3}{R_3 + r_3} a_{o_1} + \frac{P_3}{g} \frac{\rho_{o_1}^2}{R_3 + r_3} \varepsilon_3 + P_3 \frac{R_3}{R_3 + r_3} \sin \beta.$$

(5)

3. Розглянемо рух блока 2 (рис. 4.27). Блок здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі O . Покажемо осі координат xOy і позначимо всі зовнішні сили: \bar{P}_2 – сила ваги блока, $\bar{S}_{21} = -\bar{S}_{12}$, $\bar{S}_{23} = -\bar{S}_{32}$ – реакції нитки; \bar{X}_o і \bar{Y}_o – складові реакції осі блока O .

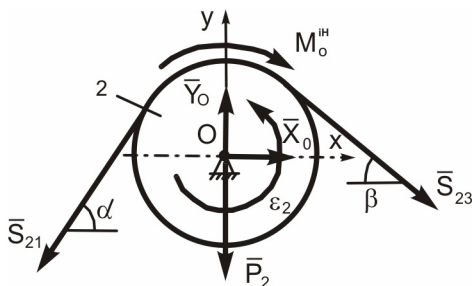


Рис. 4.27

Оскільки центр мас блока 2 (точка O) залишається нерухомим, то множина сил інерції точок блока за прискореного

(сповільненого) обертального руху зводиться до пари сил з моментом M_o^{in} .

Згідно з принципом д'Аламбера, можна скласти таку систему рівнянь формальної рівноваги:

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & X_o - S_{21} \cos \alpha + S_{23} \cos \beta &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & Y_o - P_2 - S_{21} \sin \alpha - S_{23} \sin \beta &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_o (\bar{F}_i) &= 0, & S_{21} R_2 - S_{23} R_2 - M_o^{in} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В останньому рівнянні системи (6) момент сил інерції:

$$M_o^{in} = I_o \cdot \varepsilon_2,$$

де ε_2 – кутове прискорення блока 2; I_o – момент інерції блока 2 відносно центральної осі O .

Оскільки блок 2 є однорідним диском, то момент інерції:

$$I_o = \frac{P_2}{2g} \cdot R_2^2.$$

Виразимо ε_2 , a_{o_1} і ε_3 через шукане прискорення вантажу 1 a_1 . Оскільки нитка нерозтяжна та її ковзання вздовж блока 2 відсутнє, то для точки B (рис. 4.24) маємо:

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_B^r,$$

де \bar{a}_B^r – вектор дотичного прискорення точки B .

Тому кутове прискорення ε_2 блока 2 дорівнюватиме:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_B^r}{R_2} = \frac{a_1}{R_2}. \quad (7)$$

Відповідно до умови задачі точка D – миттєвий центр швидкостей, тому швидкість осі O_1 котка 3 дорівнюватиме:

$$v_{o_1} = \frac{R_3 \cdot v_c}{R_3 + r_3}.$$

Оскільки нитка нерозтяжна, то, очевидно, що $v_c = v_1$, а тому отримаємо таке співвідношення:

$$v_{o_1} = \frac{R_3 \cdot v_1}{R_3 + r_3}.$$

Оскільки прискорення і швидкість точки O_1 зв'язані співвідношенням:

$$a_{o_1} = \frac{dv_{o_1}}{dt},$$

то, взявши похідну за часом t , отримаємо:

$$a_{o_1} = \frac{R_3 \cdot a_1}{R_3 + r_3}.$$

(8)

Кутове прискорення котка ε_3 дорівнює:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_c}{R_3 + r_3} = \frac{a_1}{R_3 + r_3}. \quad (9)$$

Підставивши знайдені значення виразів (9) і (8) у вираз (5), визначимо:

$$S_{32} = \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{o_1}^2)a_1}{g(R_3 + r_3)^2} + P_3 \frac{R_3 \sin \beta}{R_3 + r_3}. \quad (10)$$

Враховуючи, що $|S_{12}| = |S_{21}|$, $|S_{23}| = |S_{32}|$, підставимо вирази (3), (7), (10) та значення моменту інерції блока I_o в останнє рівняння системи (6), звідки отримаємо:

$$P_1 \sin \alpha - P_3 \frac{R_3}{R_3 + r_3} \sin \beta = \frac{a_1}{g} \left[P_1 + \frac{P_2}{2} + P_3 \frac{R_3^2 + \rho_{o_1}^2}{(R_3 + r_3)^2} \right].$$

З останнього рівняння визначимо шукане прискорення вантажу 1:

$$a_1 = \frac{g \left[P_1 \sin \alpha - P_3 \frac{R_3}{R_3 + r_3} \sin \beta \right]}{\left[P_1 + \frac{P_2}{2} + P_3 \frac{R_3^2 + \rho_{o_1}^2}{(R_3 + r_3)^2} \right]} =$$

$$= \frac{10 \left[400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 200 \frac{0,6}{0,6 + 0,2} \cdot \frac{1}{2} \right]}{\left[400 + \frac{200}{2} + 200 \frac{0,6^2 + 0,4^2}{(0,6 + 0,2)^2} \right]} = 3,1 \text{ м/с}^2.$$

Підставляючи a_1 у вирази (10) і (3), знаходимо:

$$S_{32} = \frac{200(0,6^2 + 0,4^2)3,1}{10(0,6 + 0,2)^2} + 200 \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,6 + 0,2} = 127,8 \text{ Н},$$

$$S_{12} = 400 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{400}{10} \cdot 3,1 = 156 \text{ Н}.$$

Оскільки $|S_{12}| = |S_{21}|$, $|S_{23}| = |S_{32}|$, то з перших двох рівнянь системи (6) визначимо невідомі реакції блока 2:

$$X_o = S_{21} \cos \alpha - S_{23} \cos \beta = 156 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 127,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,69 \text{ Н},$$

$$Y_o = P_2 + S_{21} \sin \alpha + S_{23} \sin \beta = 200 + 156 \frac{\sqrt{2}}{2} + 127,8 \cdot \frac{1}{2} = 373,9 \text{ Н}$$

Задача 4

Нехтуючи опором і вагою стрижнів, визначити силу \bar{P} , прикладену до повзуна A , щоб система за заданих кутів $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$ під дією сили $Q=600 \text{ Н}$ перебувала у стані рівноваги. Вектор сили \bar{Q} перпендикулярний напрямку AD (рис. 4.28). Використати принцип можливих переміщень.

Розв'язання

Надамо системі можливого переміщення. Можливе переміщення точки $A - \delta \bar{S}_A$ паралельне напрямній або осі x , а

можливе переміщення точки $B - \delta\bar{S}_B$ спрямоване вздовж дотичної до кола радіуса CB ($\delta\bar{S}_B \perp CB$).

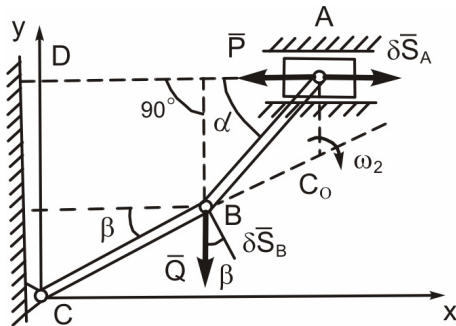


Рис. 4.28

Далі, на основі принципу можливих переміщень, прирівняємо до нуля суму елементарних робіт сил P і Q на їхніх можливих переміщеннях:

$$Q \cdot \delta S_B \cos \beta - P \cdot \delta S_A = 0,$$

звідки знаходимо:

$$P = \frac{\delta S_B}{\delta S_A} Q \cos \beta.$$

Знайдемо залежність між δS_B і δS_A . Оскільки $AB = \text{const}$, то, застосувавши теорему про проекції двох векторів на пряму, що їх з'єднує, отримаємо:

$$\delta S_B \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) = \delta S_A \cos \alpha,$$

або

$$\delta S_B \sin (\alpha - \beta) = \delta S_A \cos \alpha,$$

звідки

$$\frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Підставивши отримане співвідношення у вираз для сили P , отримаємо:

$$P = Q \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{600 \cdot 0,5 \cdot 0,85}{0,5} = 510 \text{ Н.}$$

Аналогічний результат можна отримати, якщо під час знаходження співвідношення $\frac{\delta S_B}{\delta S_A}$ використати центр обертання стрижня AB – точку C_o , який визначається так само, як і миттєвий центр швидкостей, тобто, знаходиться на перетині перпендикулярів C_oB і C_oA , проведених відповідно з точок B і A до напрямів векторів можливих переміщень δS_B і δS_A . Можливі переміщення точок A і B будуть пропорційні відстаням від цих точок до миттєвого центра обертання ланки AB :

$$\frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{C_oB}{C_oA}.$$

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{C_oB}{C_oA} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \Rightarrow \frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Це співвідношення збігається зі співвідношенням, отриманим за теоремою про проекції двох векторів швидкостей на пряму, що їх з'єднує.

Задача 5

Вантаж 1 і коток 3 з'єднані між собою невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутою через нерухомий блок 2.

Під час руху вантажу вниз на площині, нахилений під кутом α до горизонту, коток 3 котиться без ковзання вгору на площині, нахилений під кутом β до горизонту. Ковзання нитки поверхнею блока 2 відсутнє.

Вага вантажу 1, блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно: $P_1 = 400 \text{ Н}$, $P_2 = 200 \text{ Н}$, $P_3 = 200 \text{ Н}$. Коток 3 – ступінчастий. Радіус більшого колеса $R_3 = 0,6 \text{ м}$, меншого – $r_3 = 0,2 \text{ м}$, радіус інерції відносно осі обертання $C - \rho_C = 0,4 \text{ м}$.

Нерухомий блок 2 є суцільним диском. Під час розрахунків прийняти: $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1 за допомогою загального рівняння динаміки.

Розв'язання

Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.29). Покажемо всі задані сили, прикладені до тіл системи. Прикладемо до тіл системи сили інерції.

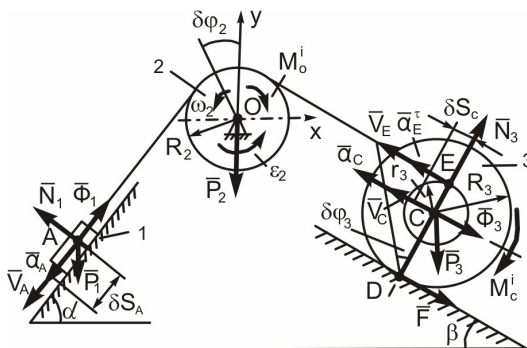


Рис. 4.29

Сила інерції вантажу 1, який здійснює поступальний рух, дорівнює:

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_A,$$

де \bar{a}_A – вектор прискорення вантажу 1.

Сили інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі O , зводяться до пари сил з моментом:

$$M_o^i = -I_o \varepsilon_2,$$

де ε_2 – кутове прискорення блока 2.

Коток 3 здійснює плоский рух, отже, сили інерції котка зводяться до вектора сили:

$$\bar{\Phi}_3 = -m_3 \cdot \bar{a}_c,$$

де \bar{a}_C – вектор прискорення центра ваги котка, і пари сил з моментом,

$$M_C^i = -I_o \cdot \varepsilon_3,$$

де ε_3 – кутове прискорення котка 3.

Надамо цій системі можливого переміщення δS , яке для вантажу 1 становитиме δS_A , для блока 2 – $\delta\varphi_2$, для котка 3 – δS_C і $\delta\varphi_3$, і складемо загальне рівняння динаміки:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot \delta S_A \cdot \sin \alpha - \Phi_1 \cdot \delta S_A - M_o^i \cdot \delta\varphi_2 - P_3 \cdot \delta S_C \sin \beta - \\ - M_C^i \cdot \delta\varphi_3 - \Phi_3 \cdot \delta S_C = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

де $\delta\varphi_2$ і $\delta\varphi_3$ – можливі переміщення, які виражені через кути поворотів блока 2 і котка 3 відповідно.

Підрахуємо моменти пари сил інерції M_o^i і M_C^i :

$$M_o^i = \frac{P_2}{2g} R_2^2 \cdot \varepsilon_2, \quad M_C^i = \frac{P_3}{g} \rho_C^2 \cdot \varepsilon_3.$$

Виразимо кутові прискорення ε_2 і ε_3 через прискорення вантажу 1 – a_A . Оскільки $a_B^r = a_E^r = a_A$ (нитка нерозтяжна), то матимемо:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_B^r}{R_2} = \frac{a_A}{R_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_E^r}{R_3 + r_3} = \frac{a_A}{R_3 + r_3}.$$

Таким чином, отримуємо:

$$M_o^i = \frac{P_2 \cdot R_2 \cdot a_A}{2g}, \quad M_C^i = \frac{P_3 \cdot \rho_C^2 \cdot a_A}{g(R_3 + r_3)}.$$

Знайдемо сили інерції $\bar{\Phi}_1$ і $\bar{\Phi}_3$. Оскільки:

$$a_C = R_3 \varepsilon_3 = \frac{R_3 \cdot a_A}{R_3 + r_3},$$

$$\text{то } \Phi_1 = \frac{P_1}{g} a_A, \quad \Phi_3 = \frac{P_3}{g} a_C = \frac{P_3 \cdot R_3 \cdot a_A}{g(R_3 + r_3)}.$$

Встановимо залежності між можливими переміщеннями точок і тіл цієї системи, до того ж виразимо всі можливі переміщення, що входять до рівняння (1), через одне δS_A :

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_A}{R_2}, \quad \delta S_E = \delta S_A, \quad \frac{\delta S_E}{R_3 + r_3} = \frac{\delta S_C}{R_3} = \delta\varphi_3, \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_A}{R_3 + r_3},$$

$$\delta S_C = \frac{R_3 \cdot \delta S_E}{R_3 + r_3} = \frac{R_3 \cdot \delta S_A}{R_3 + r_3}.$$

Підставляючи значення необхідних величин у складене загальне рівняння динаміки, отримуємо:

$$P_1 \cdot \delta S_A \sin \alpha - \frac{P_1}{g} a_A \cdot \delta S_A - \frac{P_2 \cdot R_2 \cdot a_A}{2g} \cdot \frac{\delta S_A}{R_2} - P_3 \frac{R_3 \cdot \sin \beta}{R_3 + r_3} \delta S_A -$$

$$- \frac{P_3 \cdot \rho_C^2 \cdot a_A \cdot \delta S_A}{g(R_3 + r_3)^2} - \frac{P_3 \cdot R_3 \cdot a_A}{g(R_3 + r_3)} \cdot \frac{R_3}{(R_3 + r_3)} \delta S_A = 0.$$

Винесемо спільний множник δS_A за дужки. Оскільки він не дорівнює нулю, то всі доданки, що є у дужках, дорівнюють нулю. Тоді матимемо:

$$P_1 \sin \alpha - \frac{P_1}{g} a_A - \frac{P_2}{2g} a_A - P_3 \frac{R_3 \sin \beta}{R_3 + r_3} -$$

$$- \frac{P_3 \cdot \rho_C^2}{g(R_3 + r_3)^2} a_A - \frac{P_3 \cdot R_3^2}{g(R_3 + r_3)^2} a_A = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо шукане прискорення вантажу a_A :

$$a_A = \frac{g \left(P_1 \sin \alpha - P_3 \frac{R_3 \sin \beta}{R_3 + r_3} \right)}{P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{R_3^2 + \rho_C^2}{(R_3 + r_3)^2} P_3} = \frac{10 \left(400 \cdot 0,71 - 200 \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,6 + 0,2} \right)}{400 + \frac{200}{2} + \frac{0,6^2 + 0,4^2}{(0,6 + 0,2)^2} \cdot 200} = 3,1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 6

На підставі рівняння Лагранжа II роду визначити прискорення руху тіл матеріальної системи. Нагадаємо алгоритм

складання рівнянь Лагранжа другого роду:

1. Визначити число ступенів вільності матеріальної системи, що розглядається.
2. Вибрати узагальнені координати.
3. Визначити кінетичну енергію системи, виразивши її через узагальнені швидкості.
4. Визначити узагальнені сили.
5. Вичислити частинні похідні від кінетичної енергії $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ і $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$.
6. Взяти похідну за часом $\frac{d}{dt}$.
7. Скласти рівняння руху матеріальної системи.
8. Інтегрувати отримані рівняння з урахуванням початкових умов.
9. Відповідно до конкретних умов задачі провести розв'язання і аналіз отриманого рівняння.

Вантаж 1 вагою $P_1=400\text{ Н}$, опускаючись униз на похилій площині, що утворює з горизонтом кут α , надає рух котку 3 вагою $P_3=200\text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинutoї через нерухомий блок 2 вагою $P_2=200\text{ Н}$. Радіуси котка 3 дорівнюють: $r_3=0,2\text{ м}$, $R_3=0,6\text{ м}$. Коток 3 котиться без ковзання на площині, що утворює з горизонтом кут β . Радіус інерції котка 3 відносно осі O $\rho_{O_1}=0,4\text{ м}$. Блок 2 вважається однорідним диском. Ковзання нитки вздовж блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. Під час розрахунків прийняти: $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа другого роду.

Розв'язання

Складемо розрахункову схему задачі (рис. 4.30), зобразивши задані активні сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. Надамо згаданій матеріальній системі можливого переміщення. Оскільки система має один ступінь вільності ($H=1$), то можливі переміщення різних тіл системи є взаємозв'язаними. Позначимо можливі переміщення тіл системи:

вантажу 1– δS_1 , блока 2– $\delta\varphi_2$, котка 3 – δS_3 .

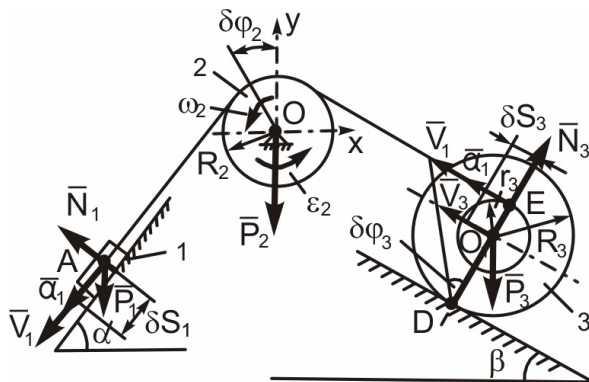


Рис. 4.30

Визначимо функціональний зв'язок між можливими переміщеннями:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2}, \delta S_3 = \frac{\delta S_1 \cdot R_3}{(R_3 + r_3)}, \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_3}{R_3} = \frac{\delta S_1}{R_3 + r_3}.$$

Узагальненою координатою є переміщення вантажу 1: $q = S_1$, узагальненою швидкістю – $\dot{q} = \dot{S}_1 = V_1$.

Запишемо диференціальне рівняння у формі Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Знайдемо складові, що входять до цього рівняння. Визначимо спочатку кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де T_1, T_2, T_3 – кінетичні енергії вантажу 1, блока 2 і котка 3, відповідно.

Знайдемо складові, що входять до виразу кінетичної енергії системи і виразимо її через задані параметри і узагальнену швидкість:

– кінетична енергія поступального руху вантажу 1:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{P_1 V_1^2}{2g},$$

– кінетична енергія обертального руху блока 2:

$$T_2 = I_o \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{P_2 R_2^2 \omega_2^2}{4g};$$

– кінетична енергія плоского руху котка 3:

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} + I_{o_1} \frac{\omega_3^2}{2} = \frac{P_3 V_3^2}{2g} + \frac{P_3 \rho_{O_1}^2 \omega_3^2}{2g}.$$

Підставивши отримані значення складових кінетичної енергії у шуканий вираз, отримаємо:

$$T = \frac{P_1 V_1^2}{2g} + \frac{P_2 R_2^2 \omega_2^2}{4g} + \frac{P_3 V_3^2}{2g} + \frac{P_3 \rho_{O_1}^2 \omega_3^2}{2g}.$$

Виразимо кінетичну енергію через узагальнену швидкість V_1 .

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{V_1}{R_2}, \quad V_3 = \frac{V_1 \cdot R_3}{R_3 + r_3}, \quad \omega_3 = \frac{V_3}{R_3 + r_3} = \frac{V_1}{R_3 + r_3}, \\ T &= \frac{P_1 V_1^2}{2g} + \frac{P_2 V_1^2}{4g} + \frac{P_3 (R_3^2 + \rho_{O_1}^2) V_1^2}{2g (R_3 + r_3)^2} = \\ &= \frac{1}{2g} V_1^2 \left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3 (R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right). \end{aligned}$$

Знайдемо узагальнену силу Q , користуючись можливими переміщеннями цієї системи (рис. 4.23). Визначимо елементарну роботу δA на цьому переміщенні:

$$\delta A = P_1 \sin \alpha \cdot \delta S_1 - P_3 \sin \beta \cdot \delta S_3.$$

Враховуючи вказані вище співвідношення між можливими переміщеннями, перепишемо елементарну роботу у такому вигляді:

$$\delta A = P_1 \sin \alpha \cdot \delta S_1 - P_3 \sin \beta \cdot \delta S_1 \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}.$$

Тоді узагальнена сила:

$$Q = P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \cdot \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}.$$

Таким чином, нами отримано вирази кінетичної енергії T і узагальної сили Q системи, причому кінетична енергія T виражена через узагальнену швидкість V_1 . Отже, можна підставити знайдені величини у рівняння Лагранжа другого роду, яке матиме у цьому випадку такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_1} - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q.$$

Знайдемо спочатку ліву частину цього рівняння. $\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0$.

Інший доданок, що входить до лівої частини цього рівняння, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial V_1} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{2g} V_1^2 \left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right) \right)}{\partial V_1} = \\ &= V_1 \frac{1}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_1} &= \frac{dV_1}{dt} \cdot \frac{1}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right). \end{aligned}$$

Оскільки має місце співвідношення $\frac{dV_1}{dt} = a_1$,

то у кінцевому результаті диференціальне рівняння руху

матеріальної системи, складене на основі вихідного рівняння Лагранжа другого роду, матиме вигляд:

$$a_1 \frac{1}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right) = P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{R_3 + r_3}.$$

З отриманого виразу є можливість визначити шукане прискорення.

$$a_1 = \frac{g \left(P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)}{\left(P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{O_1}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right)} = \frac{10 \left(400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,6}{0,6 + 0,2} \right)}{400 + \frac{200}{2} + \frac{200(0,6^2 + 0,4^2)}{(0,6 + 0,2)^2}} = 3,1 \text{ м/с}^2.$$

4.4. Канонічні рівняння динаміки

4.4.1. Рівняння Гамільтона для консервативних систем

Як відомо, функція Гамільтона має такий вигляд:

$$H = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.53)$$

де $L = T - \Pi$ – функція Лагранжа;

q_k – узагальнена координата матеріальної системи;

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ – узагальнений імпульс системи;

n – кількість ступенів вільності матеріальної системи.

Відповідно до виразу (4.53) можна записати:

$$H = H(t, q_k, \dot{q}_k, p_k).$$

Варіація функції Гамільтона:

$$\delta H = \sum_{k=1}^n (\delta p_k \dot{q}_k + p_k \delta \dot{q}_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k, \quad (4.54)$$

Тоді вираз (4.54) набуде вигляду:

$$\delta H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \delta p_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (4.55)$$

Тепер запишемо функцію H через змінні Гамільтона q_k і p_k :

$$H = H(t, q_k, p_k).$$

Варіація функції Гамільтона представляється виразом:

$$\delta H = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k. \quad (4.56)$$

У результаті порівняння виразів (4.54) і (4.56) маємо:

$$\sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta q_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (4.57)$$

У силу незалежності варіацій δq_k і δp_k отримаємо:

$$\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0; \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \quad (4.59)$$

Рівняння Лагранжа для консервативної системи має форму:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.60)$$

Беручи до уваги, що $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, знаходимо:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (4.61)$$

Звідси, маємо:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.62)$$

Рівняння (4.62) називають канонічними рівняннями Гамільтона, а сукупність узагальнених координат і узагальнених імпульсів називають гамільтоновими змінними матеріальної системи.

Рівняння Гамільтона є системою $2n$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

4.4.2. Властивості функції Гамільтона

Помноживши обидві частини першого рівняння системи (4.62) на \dot{p}_k , а обидві частини другого рівняння на \dot{q}_k , отримаємо:

$$\dot{q}_k \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k; \quad \dot{q}_k \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k. \quad (4.63)$$

Тепер віднімемо від першого рівняння друге:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k = 0. \quad (4.64)$$

Вираз (4.64) є повною похідною від функції Гамільтона за часом:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \Rightarrow H = const. \quad (4.65)$$

Таким чином, функція Гамільтона для стаціонарних в'язей і консервативних сил є сталою величиною.

4.4.3. Канонічні рівняння для неконсервативних систем

Якщо на систему діють крім консервативних сил ще й неконсервативні сили, то рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^P \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.66)$$

де Q_k^P – неконсервативні сили (сили тертя, збуджувальні сили і таке інше).

Вважаючи, як і раніше $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k - Q_k^P. \quad (4.67)$$

На основі рівняння (4.62):

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k^P. \quad (4.68)$$

Приєднавши до рівняння (4.68) рівняння (4.62), отримуємо:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k^P. \quad (4.69)$$

Рівняння (4.69) є канонічними рівняннями для неконсервативної системи.

4.4.4. Циклічні координати. Перші інтеграли канонічних рівнянь

Узагальнена координата q_k називається циклічною, якщо вона не входить явно до функції Лагранжа L , тоді:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (4.70)$$

З другого рівняння системи (4.69) знайдемо співвідношення:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (4.71)$$

Зі співвідношення (4.71) випливає, що частинні похідні $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ і

$\frac{\partial H}{\partial q_k}$ можуть перетворюватись на нуль тільки одночасно. Тому циклічна координата рівняння Лагранжа є також циклічною координатою рівняння Гамільтона. Якщо функція Лагранжа містить узагальнену швидкість і не містить відповідної узагальненої координати, то ця координата не буде входити і в функцію Гамільтона.

Дійсно, з канонічних рівнянь (4.62) випливає, що:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (4.72)$$

Оскільки координата q_k є циклічною, то маємо:

$$\dot{p}_k = 0, \quad (4.73)$$

звідки отримаємо перший інтеграл рівняння Гамільтона:

$$p_k = \text{const}. \quad (4.74)$$

Звідси, *узагальнений імпульс*, що відповідає циклічній координаті q_n , під час руху зберігає своє стале значення.

Тепер допустимо, що всі координати циклічні, тобто:

$$H = H(t, p_k) \quad (k = 1, 2, \dots, \beta). \quad (4.75)$$

Тоді маємо β перших інтегралів рівнянь Гамільтона:

$$p_k = C_k = \text{const}. \quad (4.76)$$

Звідси, рівняння (4.62) набуває вигляду:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial C_k}. \quad (4.77)$$

У результаті інтегрування отримаємо кінематичні рівняння руху системи:

$$q_k = \int \frac{\partial H}{\partial C_k} dt + C_k^1, \quad (4.78)$$

де C_k^1 – нові довільні сталі інтегрування.

Таким чином, якщо всі узагальнені координати матеріальної системи є циклічними, то канонічні рівняння Гамільтона можна інтегрувати і визначити всі узагальнені координати як функції часу за заданими початковими умовами руху.

4.4.5. Дужки Пуассона. Теорема Пуассона-Якобі

Опишемо спосіб інтегрування канонічних рівнянь, що відомий в механіці під назвою способу Пуассона-Якобі. Для опису цього способу необхідно ввести поняття про дужки Пуассона.

Дужками Пуассона називають вираз:

$$(\varphi, \psi) = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right), \quad (4.79)$$

де $\varphi = \varphi(t, q_k, p_k)$, $\psi = \psi(t, q_k, p_k)$ – довільні функції канонічних змінних.

Дужки Пуассона мають низку властивостей, з яких вкажемо на такі:

$$\begin{aligned}
 (\varphi, \psi) &= -(\psi, \varphi); \\
 (\varphi, \varphi) &= (\psi, \psi) = 0; \\
 (\varphi, C) &= (C, \psi) = 0; \quad C = const; \\
 (\varphi_1, \varphi_2 + \varphi_3) &= (\varphi_1, \varphi_2) + (\varphi_1, \varphi_3); \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right); \\
 [\varphi_1, (\varphi_2, \varphi_3)] + [\varphi_2, (\varphi_3, \varphi_1)] + [\varphi_3, (\varphi_1, \varphi_2)] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.80}$$

Останній вираз називається тотожністю Пуассона-Якобі.

Складемо дужки Пуассона для функції Гамільтона H і будь-якої іншої функції $f(t, q_k, p_k)$ канонічних змінних:

$$(H, f) = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right).
 \tag{4.81}$$

Беручи до уваги канонічні рівняння (4.70), знайдемо:

$$(H, f) = -\sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).
 \tag{4.82}$$

Диференціюючи функцію $f(t, q_k, p_k)$ за часом, маємо:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).
 \tag{4.83}$$

Цей вираз, враховуючи першу властивість дужок Пуассона, можна записати так:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f). \quad (4.84)$$

Для випадку, коли $f(t, q_k, p_k)$, отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (4.85)$$

Таким чином, щоб функція $f(t, q_k, p_k)$ канонічних змінних була першим інтегралом рівнянь Гамільтона, необхідно виконання рівності (4.85). Наведемо теорему Пуассона-Якобі без доведення.

Якщо відомо два інтеграли канонічних рівнянь $\varphi = C_1$; $\psi = C_2$,
то дужки Пуассона дозволяють знайти третій інтеграл

$$(\varphi, \psi) = C_3. \quad (4.86)$$

Приклад 4.12

Циліндр маси m може котитися гладкою горизонтальною площиною (рис. 4.31).

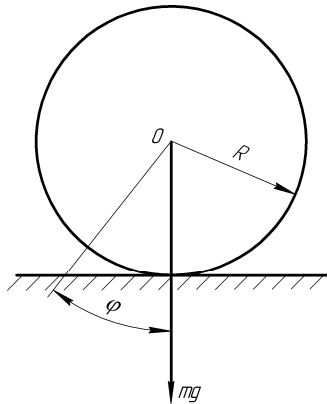


Рис. 4.31

Момент інерції циліндра щодо осі симетрії дорівнює I . За узагальнену координату приймемо кут повороту циліндра φ . Визначити функцію Гамільтона.

Кінетична енергія циліндра, що котиться:

$$T = \frac{1}{2}(I\dot{\varphi}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\varphi}^2.$$

Потенціальна енергія циліндра $\Pi=0$.

Функція Лагранжа дорівнює:

$$L = \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\varphi}^2.$$

Узагальнений імпульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I + mR^2)\dot{\varphi}.$$

Функція Гамільтона:

$$H = p\dot{\varphi} - \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\varphi}^2 = \frac{p^2}{2(I + mR^2)}.$$

Приклад 4.13

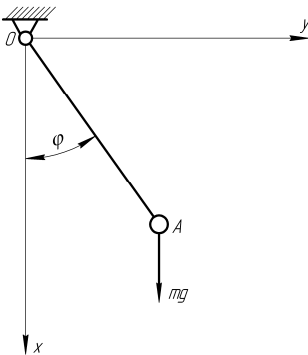


Рис. 4.32

Скласти канонічні рівняння Гамільтона для математичного маятника довжиною L .

Точку підвісу позначимо O . За узагальнену координату приймемо кут відхилення φ (рис. 4.32).

Координати точки A запишуться за формулами:

$$X_A = L \cos \varphi,$$

$$Y_A = L \sin \varphi.$$

Кінетична енергія математичного маятника:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2).$$

Підставляючи в цю формулу значення X_A і Y_A , маємо:

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}^2.$$

Потенціальна енергія математичного маятника:

$$\Pi = -mgL \cos \varphi,$$

де g – прискорення сили тяжіння.

Функція Лагранжа:

$$L = T - \Pi.$$

У результаті підстановки значень T і Π знайдемо:

$$L = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}^2 + mgL \cos \varphi.$$

Узагальнений імпульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mL^2 \dot{\varphi}.$$

Функція Гамільтона запишеться так:

$$H = p\dot{\varphi} - L = p\dot{\varphi} - \left[\frac{m}{2} L^2 \dot{\varphi}^2 + mgL \cos \varphi \right] = \frac{p^2}{2mL^2} - mgL \cos \varphi.$$

Візьмемо частинні похідні $\frac{\partial H}{\partial p}$ і $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$ від функції Гамільтона:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mL^2}; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = mgL \sin \varphi.$$

Звідси, канонічні рівняння Гамільтона:

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{mL^2}; \quad \dot{p} = mgL \sin \varphi.$$

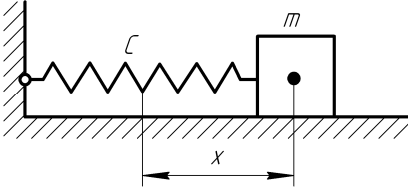


Рис. 4.33

Приклад 4.14

Скласти канонічні рівняння Гамільтона для системи (рис. 4.33).

Площина, на якій рухається вантаж, абсолютно гладка.

Маса вантажу дорівнює m , а коефіцієнт жорсткості пружини c . За узагальнену координату візьмемо відстань x .

Кінетична енергія маси:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Потенціальна енергія пружини:

$$П = \frac{1}{2} c x^2,$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 - c x^2).$$

Узагальнений імпульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}.$$

Напишемо вираз для функції Гамільтона:

$$H = p \dot{x} - L.$$

Підставивши замість p і L їх значення, знайдемо:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + cx^2 \right).$$

Тоді канонічні рівняння Гамільтона набудуть вигляду:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -cx.$$

Приклад 4.15

Кулька маси m знаходиться усередині прямолінійної трубки AB (рис. 4.34), яка рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω довкола осі, що проходить через точку A .

Кулька сполучена з нерухомою точкою A пружини з коефіцієнтом жорсткості c .

Скласти канонічні рівняння Гамільтона. Тертям кульки в трубці знехтувати.

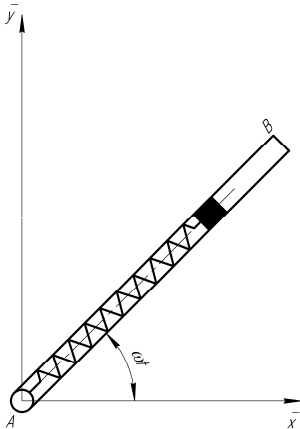


Рис. 4.34

За узагальнену координату приймемо відстань кульки від точки A . Координати кульки:

$$\bar{x} = x \cos \omega t;$$

$$\bar{y} = x \sin \omega t.$$

Швидкість руху кульки буде:

$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2 \omega^2.$$

Кінетична енергія кульки:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \omega^2)$$

Потенціальна енергія пружини:

$$\Pi = \frac{1}{2} c(x - x_o)^2,$$

де x_o – довжина пружини у ненапруженому стані.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2 \omega^2) - \frac{1}{2} c(x - x_o)^2.$$

Знайдемо узагальнений імпульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Тоді функція Гамільтона:

$$H = \frac{p}{2m} - \frac{1}{2} [m\dot{x}^2 \omega^2 - c(x - x_o)^2].$$

Звідси, канонічні рівняння Гамільтона мають вигляд:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = [m\dot{x}^2 \omega^2 - c(x - x_o)^2].$$

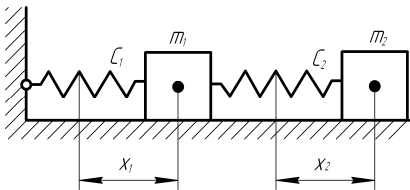


Рис. 4.35

Приклад 4.16

Скласти канонічні рівняння для матеріальної системи (рис. 4.35). Маса вантажів m_1 і m_2 , а коефіцієнти жорсткості пружин c_1 і c_2 . Площина, на якій рухаються вантажі,

абсолютно гладка. За узагальнені координати візьмемо відстані вантажів від положення, за якого пружини знаходяться в ненапруженому стані.

Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

Потенціальна енергія пружини:

$$П = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Функція Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2] - \frac{1}{2} [c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2].$$

Звідси, маємо:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2.$$

Складемо функцію Гамільтона:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} \right] + \frac{1}{2} [c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2].$$

Канонічні рівняння Гамільтона:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -[c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1)]; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -c_2 (x_2 - x_1);$$
$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}; \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}.$$

Приклад 4.17

Скласти канонічні рівняння коливального руху колісного екіпажа. Розглядаємо лише поздовжні коливання екіпажа як найважливіші.

Положення екіпажа під час коливань визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра мас і кутом повороту θ кузова відносно поперечної осі, що проходить через його центр мас (рис. 4.36).

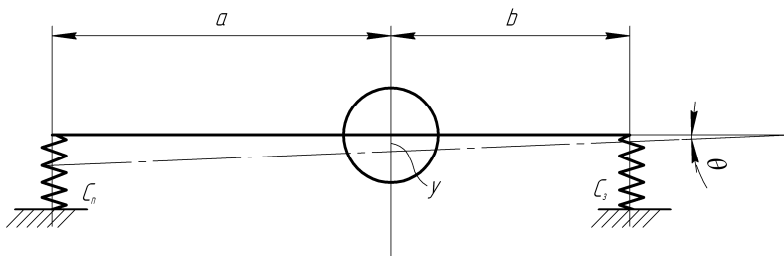


Рис. 4.36

Кінетична енергія кузова:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\theta}^2),$$

де r – радіус інерції кузова відносно поперечної осі.

Потенціальна енергія деформації ресор:

$$П = c_n (y + a\theta)^2 + c_s (y - b\theta)^2,$$

де c_n і c_s – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - [c_n (y + a\theta)^2 + c_s (y - b\theta)^2].$$

Визначимо узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}.$$

Функція Гамільтона представиться формулою:

$$H = p_1 \dot{y} + p_2 \dot{\theta} - \left\{ \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - [c_n (y + a\theta)^2 + c_s (y - b\theta)^2] \right\}.$$

Підставивши в цю формулу значення імпульсів p_1 і p_2 , після деяких перетворень маємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + [c_n (y + a\theta)^2 + c_s (y - b\theta)^2],$$

де m – маса кузова.

Система канонічних рівнянь руху екіпажа

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -2[c_n (y + a\theta) + c_s (y - b\theta)];$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2}; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -2[c_n (y + a\theta)a - c_s (y - b\theta)b].$$

Приклад 4.18

Скласти канонічні рівняння руху матеріальної точки M з масою m під дією центральної сили притягання до центра O , рівної

$$F = k \frac{m}{r^2},$$

де r – відстань OM .

Скористаємося полярними координатами. За узагальнені координати точки M приймемо полярні координати r і φ (рис. 4.37).

Як відомо, швидкості точки M визначаються за формулами:

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Кінетична і потенціальна енергія точки:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad \Pi = -k \frac{m}{r}.$$

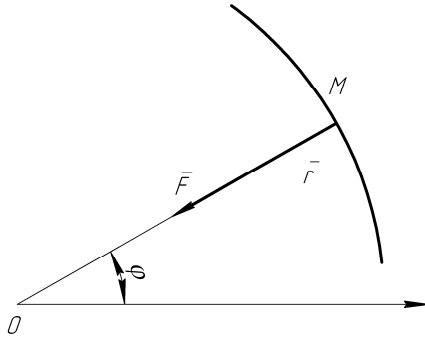


Рис. 4.37

Функція Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + k \frac{m}{r}.$$

Оскільки координата φ не входить до функції Лагранжа, то вона є циклічною.

Знаходимо узагальнені імпульси:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}.$$

Запишемо функцію Гамільтона:

$$H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \left[\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + k \frac{m}{r} \right].$$

Підставивши замість p_r і p_φ їх значення, після деяких перетворень маємо:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - k \frac{m}{r}.$$

Канонічні рівняння:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p; \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{r^3} + k \frac{m}{r^2};$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}; \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

З рівнянь знаходимо:

$$p_\varphi = \alpha = \text{const.} \quad \dot{\varphi} = \frac{\alpha}{mr^2}.$$

Підставимо в третє рівняння замість \dot{p}_r і $\dot{\varphi}$ їх значення:

$$\ddot{r} = -\left(\frac{\alpha^2}{mr} + k\right) \frac{1}{r^2} = 0.$$

Це і є диференціальне рівняння руху точки вздовж радіуса.

Приклад 4.19

Скласти канонічні рівняння вільного коливання системи з двома дисками (рис. 4.38).

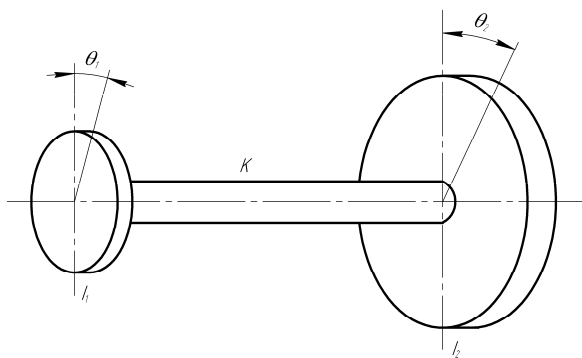


Рис. 4.38

Момент інерції першого диска I_1 , а момент інерції другого диска I_2 . Кути повороту дисків від положення рівноваги позначимо θ_1 і θ_2 .

Коефіцієнт крутильної жорсткості вала на ділянці між дисками дорівнює:

$$k = \frac{GI_p}{L},$$

де I_p – полярний момент інерції перерізу вала.

G – модуль пружності другого роду на крутіння.

Діаметр вала дорівнює d .

Кінетична енергія системи і потенціальна енергія кручення вала:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_1^2 + I_2\dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1\dot{\theta}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2\dot{\theta}_2.$$

Функція Гамільтона представиться формулою:

$$H = p_1\dot{\theta}_1 + p_2\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}[(I_1\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_2) - k(\theta_2 - \theta_1)^2]$$

Підставимо в цей вираз значення імпульсів p_1 і p_2 :

$$H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Система канонічних рівнянь руху вала з двома масами (дисками) запишеться у формі:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{I_1}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = k(\theta_2 - \theta_1);$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I_2}; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -k(\theta_2 - \theta_1).$$

Приклад 4.20

Скласти канонічні рівняння вільного руху трансмісійного вала з вільними кінцями, що несе три зосереджені махові маси з моментами інерції відносно центральних осей I_1, I_2, I_3 (рис 4.39).

Кінетична енергія обертюв мас:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2.$$

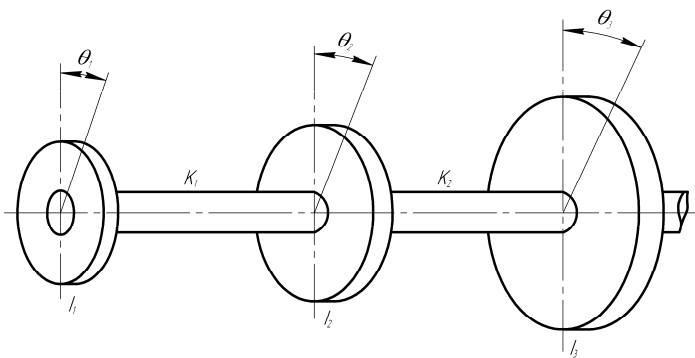


Рис. 4.39

Потенціальна енергія кручення трансмісійного вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_3 - \theta_2)^2.$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2 + I_3 \dot{\theta}_3^2] - \left[\frac{k_1}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{k_2}{2} (\theta_3 - \theta_2)^2 \right].$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2; \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = I_3 \dot{\theta}_3.$$

Функція Гамільтона представиться формулою:

$$H = p_1 \dot{\theta}_1 + p_2 \dot{\theta}_2 + p_3 \dot{\theta}_3 - \left\{ I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \beta \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 - \left[\frac{k_1}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{k_2}{2} (\theta_3 - \theta_2)^2 \right] \right\}.$$

Підставимо замість p_1, p_2, p_3 їх значення:

$$H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{p_3^2}{2I_3} + \frac{k_1}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{k_2}{2} (\theta_3 - \theta_2)^2.$$

Звідси маємо систему канонічних рівнянь:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1}{I_1}; \quad \dot{p}_1 = -k_1 (\theta_2 - \theta_1);$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{p_2}{I_2}; \quad \dot{p}_2 = -k_1 (\theta_2 - \theta_1) + k_2 (\theta_3 - \theta_2);$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що являє собою канонічні змінні?
2. Що являє собою функція Гамільтона?
3. Функцією яких аргументів вона є?
4. Який вигляд канонічних рівнянь динаміки для консервативної системи?
5. Написати повну похідну за часом від функції Гамільтона.
6. Як виражається функція Гамільтона для випадку стаціонарних в'язей?
7. Який вигляд мають канонічні рівняння для неконсервативних систем?
8. Яким є спосіб складання канонічних рівнянь динаміки?
9. Якій умові має задовольняти інтеграл канонічних рівнянь?
10. Яка особливість інтегрування канонічних рівнянь динаміки у випадку циклічних координат?
11. Перерахуйте основні властивості дужок Пуассона.
12. Який вигляд має тотожність Пуассона?
13. Сформулюйте теорему Пуассона.
14. Яким способом за двома відомими інтегралами канонічної системи рівнянь можна відшукати третій інтеграл?
15. Чи будуть дужки Пуассона (ϕ, ψ) інтегралом канонічної системи рівнянь у тому випадку, якщо функція ϕ не залежить явно від часу?

4.5. Елементарна теорія гіроскопа

Гіроскопом називають тверде тіло, яке досить швидко (десятки тисяч обертів за хвилину) обертається навколо осі матеріальної симетрії чи осі власного обертання, головної осі. Тіло має одну нерухому точку, яку називають точкою підвішування.

Рух тіла відносно нерухомої точки називається сферичним рухом. Положення тіла у просторі під час сферичного руху характеризується трьома кутами Ейлера: φ , ψ і θ (рис. 4.40).

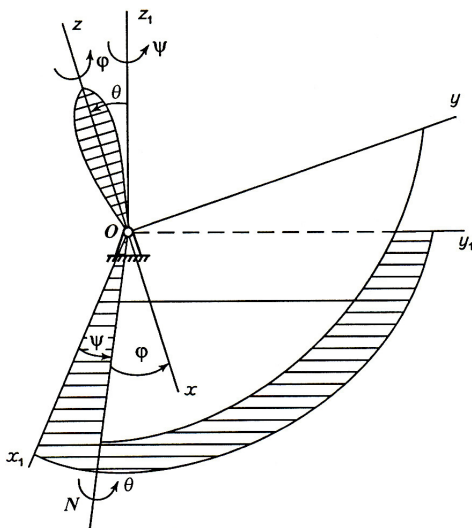


Рис. 4.40

Позначення, зображені на рисунку:

ON – лінія вузлів або вісь нутації, лінія перетину площин xOy і x_1Oy_1 ; $\angle\psi$ – *кут прецесії*, розташований у площині x_1Oy_1 , перпендикулярній до осі z_1 , яку називають віссю прецесії;

$\angle \theta$ – *кут нутації*, розташований у площині, перпендикулярній до лінії вузлів ON ; $\angle \varphi$ – *кут власного обертання*, розміщений у площині xOy , перпендикулярній до осі Oz , яку називають віссю власного обертання.

Отже, тіло гіроскопа має три ступеня вільності. За узагальнені координати приймають кути Ейлера, зміна яких з часом і є кінематичними рівняннями сферичного руху твердого тіла:

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t).$$

Тіло, що зображене на рис. 4.40, буде гіроскопом, якщо кутова швидкість обертання $\dot{\varphi}$ набагато більша, ніж $\dot{\psi}$ і $\dot{\theta}$ ($\dot{\varphi} \approx 5000 \dots 6000 \text{ рад/с}$, $\dot{\psi}, \dot{\theta} \approx 1 \text{ рад/с}$). Точку O , навколо якої обертається гіроскоп, називають точкою підвішування.

У техніці точка підвішування O гіроскопа реалізується за допомогою карданових або безконтактних силових підвісів (рис. 4.41).

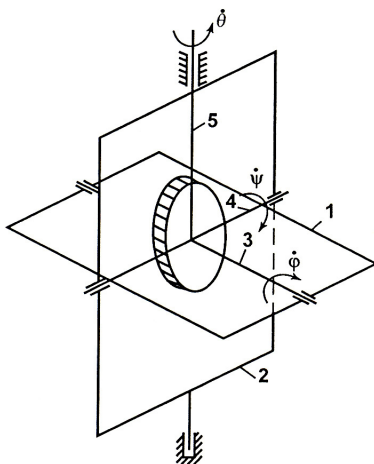


Рис. 4.41

На рисунку схематично зображений гіроскоп із трьома

ступенями вільності і зовнішнім кардановим підвісом, який складається із двох кілець (рамок): 1 – внутрішнє кільце, 2 – зовнішнє кільце. Якщо в цьому гіроскопі закріпити зовнішнє кільце 2, то він матиме два ступеня вільності.

Кільця гіроскопа слугують для забезпечення кінематичної можливості тіла одночасно обертатися навколо трьох осей 3, 4, 5, що перетинаються в одній точці O .

Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, дорівнює нулю, то такий гіроскоп називають вільним.

Якщо до точок осі симетрії гіроскопа прикласти сили, які прагнуть змінити напрям цієї осі, то виникають явища, які описуються досить точно наближеною теорією гіроскопа.

4.5.1. Основні припущення елементарної теорії гіроскопа

Розглянемо обертання гіроскопа навколо нерухомої осі Oz (рис. 4.40) з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$. У свою чергу вісь симетрії Oz обертається навколо вертикальної осі Oz_1 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$, яка дуже мала порівняно з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$.

Для того, щоб вивчити рух гіроскопа, треба знати його кінетичний момент відносно нерухомої точки O . Кут нутації θ дуже повільно змінюється з часом і його в першому наближенні можна вважати сталим, тоді похідна від цього кута за часом (кутова швидкість нутації) дорівнює нулю: $\omega_3 = \dot{\theta} = 0$.

Кутова швидкість прецесії $\omega_2 = \dot{\psi}$ теж дуже мала порівняно з кутовою швидкістю власного обертання $\omega_1 = \dot{\phi}$: $\omega_2 \ll \omega_1$ (рис. 4.42).

Миттєва кутова швидкість гіроскопа дорівнює векторній сумі кутових швидкостей власного обертання і прецесії:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

У першому наближенні можна вважати, що $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_1$, нехтуючи кутовою швидкістю прецесії.

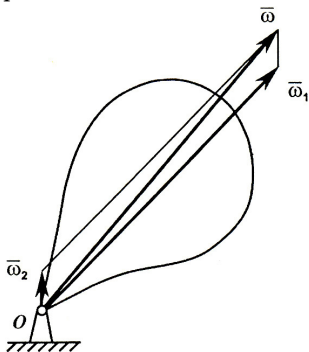


Рис. 4.42

Тоді кінетичний момент гіроскопа можна спрямувати за напрямом вектора $\bar{\omega}_1$ і вважати рівним:

$$\bar{L}_0 = I_z \cdot \bar{\omega}_1, \quad (4.87)$$

де I_z – момент інерції гіроскопа відносно власної осі обертання.

Таким чином, в елементарній теорії гіроскопа прецесію осі гіроскопа вважають регулярною, тобто, вісь Oz рівномірно обертається навколо вертикальної осі симетрії Oz_1 з кутовою швидкістю ω_2 , утворюючи, як твірна, поверхню кругового конуса.

4.5.2. Теорема Резаля

Швидкість кінця k вектора кінетичного моменту (головного моменту кількості руху гіроскопа) відносно нерухомої точки O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки.

Із кінематики відомо, що перша похідна за часом від будь-якого вектора є швидкістю кінця цього вектора (рис. 4.43) і спрямована по дотичній до годографа точки k .

Але відомо, що похідна за часом від кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомої точки дорівнює головному моменту зовнішніх сил:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e. \quad (4.89)$$

Порівнюючи вирази (4.88) і (4.89), можна записати:

$$\bar{u}_k = \frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e, \quad (4.90)$$

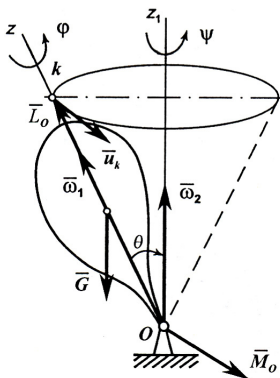


Рис. 4.43

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{u}_k. \quad (4.88)$$

де \bar{u}_k – швидкість кінця k вектора кінетичного моменту \bar{L}_0 ;

\bar{M}_0^e – головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O .

Дві основні властивості гіроскопа:

1. Властивість вектора кінетичного моменту вільного гіроскопа відносно нерухомої точки – зберігати свій напрям незмінним в інерціальній системі координат.

Дійсно, оскільки $\overline{M}_0^e = 0$, то за теоремою про зміну кінетичного моменту:

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{L}_0 = const.$$

2. Якщо до гіроскопа (рис. 4.41) із зовнішнім кардановим підвісом прикласти момент відносно осі 4 обертання внутрішньої рамки 1, то його головна вісь буде обертатися («прецесіювати») навколо осі 5 обертання зовнішньої рамки 2 карданового підвісу.

Ця властивість впливає безпосередньо з теореми Резаля (4.90), тому кінетичний момент, практично, дорівнює: $\overline{L}_0 = I_z \cdot \omega_1$ і спрямований вздовж осі z .

4.5.3. Основне рівняння елементарної теорії гіроскопа

Основне рівняння елементарної теорії гіроскопа отримаємо, якщо застосуємо теорему Резаля (4.90):

$$\overline{u}_k = \overline{M}_0^e.$$

Вектор кінетичного моменту \overline{L}_0 з припущеннями елементарної теорії гіроскопа обертається навколо нерухомої осі Oz_1 (рис. 4.43) з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_2$.

Внаслідок цього можна записати:

$$\overline{u}_k = \overline{\omega}_2 \times \overline{L}_0. \quad (4.91)$$

Враховуючи вираз (4.87), маємо:

$$\overline{u}_k = I_z \cdot \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1. \quad (4.92)$$

Порівнюючи вираз (4.92) із виразом (4.90), можна записати:

$$\bar{M}_o^e = I_z \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1. \quad (4.93)$$

Вираз (4.93) є основним рівнянням елементарної теорії гіроскопа.

Головний момент зовнішніх сил \bar{M}_o^e спрямований за перпендикуляром до площини, яку утворюють вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$.

Модуль вектора головного моменту зовнішніх сил має значення:

$$M_o^e = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta, \quad (4.94)$$

де θ – кут прецесії, кут між векторами $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$.

4.5.4. Закон прецесії осі гіроскопа

Нехай на гіроскоп діють сила ваги \bar{G} , прикладена в центрі мас точки C , реакція опори в точці O і сили опору повітря, якими нехтуємо (рис. 4.44).

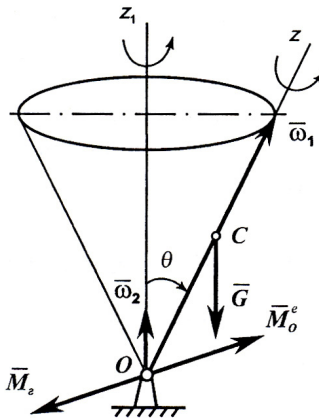


Рис. 4.44

Головний момент зовнішніх сил у такому випадку дорівнює моменту сили \bar{G} відносно точки O .

$$M_o^e = G \cdot OC \cdot \sin \theta. \quad (4.95)$$

Але, згідно з виразом (4.94) маємо:

$$M_o^e = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta,$$

тоді:

$$I_z \omega_1 \cdot \omega_2 \sin \theta = G \cdot OC \cdot \sin \theta,$$

звідки кутова швидкість регулярної прецесії:

$$\omega_2 = \frac{G \cdot OC}{I_z \cdot \omega_1}. \quad (4.96)$$

Із формули (4.96) легко побачити:

кутова швидкість прецесії ω_2 тоді менша, коли кутова швидкість власного обертання ω_1 більша, а також, якщо більша величина моменту інерції гіроскопа відносно осі власного обертання Oz .

4.5.5. Момент гіроскопічної реакції

Застосуємо принцип д'Аламбера до вивчення регулярної прецесії. Для цього до точок гіроскопа прикладемо сили інерції.

Головний момент коріолісових сил інерції відносно нерухомої точки O в елементарній теорії гіроскопа називають гіроскопічним моментом.

Переносними силами інерції в елементарній теорії гіроскопа нехтують у зв'язку з малою величиною ω_2 .

Згідно з принципом д'Аламбера розглядатимемо рівновагу гіроскопа з однією нерухомою точкою під дією двох моментів: головного моменту зовнішніх сил \bar{M}_0 і гіроскопічного моменту \bar{M}_z .

$$\bar{M}_o^e + \bar{M}_z = 0, \quad (4.97)$$

$$\bar{M}_z = -\bar{M}_o^e$$

і, враховуючи рівняння (4.93), можемо записати:

$$\bar{M}_z = -I_z \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1$$

або
$$\bar{M}_z = I_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2. \quad (4.98)$$

За модулем гіроскопічний момент дорівнює:

$$M_z = I_z \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin \Theta. \quad (4.99)$$

З рівняння (4.98) можна дійти висновку, що *гіроскопічний момент спрямований за перпендикуляром до площини, в якій розміщені вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$.*

Напрямок гіроскопічного моменту визначається за правилом Жуковського:

гіроскопічний момент намагається повернути гіроскоп паралельно осі прецесійного обертання і цю властивість гіроскопічного моменту називають гіроскопічним ефектом.

4.5.6. Визначення гіроскопічних реакцій

Під час розв'язування задач на визначення гіроскопічних реакцій опор додержуються такої послідовності.

1. Визначають нерухому точку гіроскопа (перетин осей відносного і переносного обертань, наприклад, на рис. 4.45 точка O).

2. Відкладають уздовж осі відносного обертання, в бік $\bar{\omega}_1$ вектор $\bar{L}_0 = I_z \cdot \bar{\omega}_1$.

3. Визначають за напрямом переносного обертання $\bar{\omega}_2$ (прецесія) і напрям швидкості \bar{u} кінця вектора \bar{L}_0 .

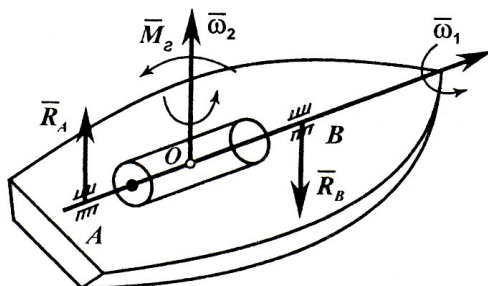


Рис. 4.45

4. Обчислюють величину і напрям головного моменту M_o^e зовнішніх сил.

$$\bar{M}_o^e = \bar{u}_k,$$

$$M_o^e = I_z \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \sin(\hat{\bar{\omega}}_1; \bar{\omega}_2).$$

5. Опорні реакції утворюють пару сил із моментом M_o^e . Опорна реакція дорівнює M_o^e , поділеному на плече пари (відстань між опорами).

Приклад 4.21

Турбіна, встановлена на човні в підшипниках A і B, обертається з кутовою швидкістю ω_1 , а човен у цей момент повертається з кутовою швидкістю ω_2 . Визначити у цей самий момент реакції опор. Відстань між опорами $AB = l$ (рис. 4.45).

Розв'язання

Гіроскопічний момент за модулем:

$$M_z = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta.$$

Оскільки кут нутації $\theta = 90^\circ$, то для реакції опор маємо:

$$R_A = R_B = \frac{M_z}{AB} = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{l}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке гіроскоп, який вид руху здійснює тіло гіроскопа?
2. Охарактеризуйте кути Ейлера, напишіть рівняння руху гіроскопа.
3. Як реалізується точка підвішування гіроскопа в техніці?
4. Які основні припущення елементарної теорії гіроскопа?
5. Сформулюйте теорему Резаля.
6. Напишіть основне рівняння елементарної теорії гіроскопа.
7. За якою формулою визначається кутова швидкість регулярної прецесії?
8. Як визначається модуль і напрям гіроскопічного моменту?
9. Який порядок визначення гіроскопічних реакцій опор?
10. У яких галузях техніки застосовують гіроскопи?

4.6. Основи теорії малих коливань механічних систем

4.6.1. Малі коливання системи наоکیل положення рівноваги

Цей підрозділ присвячений вивченню коливальних рухів механічних систем. Деякі результати, що стосуються прямолінійних коливань матеріальної точки, наведено вище. У подальшому згадані результати поглиблюються і розповсюджуються на коливання будь-яких складних матеріальних систем із галузі техніки.

Відомо, що всяке, так зване тверде тіло, має пружність, тому будучи деформоване і потім представлене дії пружних сил, починає вібрувати, причому окремі його частини здійснюють коливальні рухи біля своїх рівноважних положень. Звідси – розповсюдженість коливальних рухів у природі та велика важливість у техніці. Явища коливань слід враховувати у сільськогосподарському машинобудуванні, будівельних конструкціях інженерних споруд і транспортних засобах. Вивчення коливань і боротьба зі шкідливими їх наслідками або використання у технологічних цілях – це такі проблеми, що наполегливо висуваються перед інженерами і вченими. Теорія малих коливань сьогодні – важливий розділ механіки, а вібраційна техніка – самостійна і важлива галузь інженерних знань.

У галузі техніки інженер має справу з коливаннями і вібраціями надто малої амплітуди. У деяких випадках коливання виявляються тільки чутливими приладами, що не зменшує їх можливі небажані наслідки для надійності і довговічності машин. Тому інженер має підходити до цього питання з огляду на гарантування безпечної величини амплітуди вібрацій.

У цьому підрозділі вивчаються основні закони, яким підкоряються малі коливання матеріальної системи біля положення рівноваги. У подальшому розглянуто коливання матеріальних систем з кінцевим числом ступенів вільності. Задачі на коливання систем з незліченою множиною ступенів вільності належать до спеціального курсу теорії коливань.

Зазначимо, що говорити про коливальний рух системи біля положення рівноваги можна тільки в тому випадку, коли положення рівноваги системи є стійким. Якщо рівновага системи нестійка, тобто, якщо за найменшого відхилення від рівноважного положення система все більше від нього віддаляється, то не можна вести мову про малі коливання системи біля положення рівноваги. Тому, вивчаючи теорію малих коливань системи, слід зупинитися

на питанні про стійкість рівноваги, щоб навчитися відрізняти стійкі рівноважні стани від нестійких.

4.6.2. Потенціальна енергія системи в узагальнених координатах

Потенціальна енергія матеріальної системи для стаціонарного силового поля і стаціонарних в'язей є деякою функцією узагальнених координат:

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (4.100)$$

де s – кількість ступенів вільності системи.

Розкладаючи вираз потенціальної енергії в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат наоціл положення рівноваги, де $q_j = 0$, маємо:

$$P = P(0) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial P}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots \quad (4.101)$$

Не порушуючи загальності, можна прийняти, що потенціальна енергія системи в положенні рівноваги дорівнює нулю $P(0) = 0$.

Перші частинні похідні від потенціальної енергії за узагальненими координатами є узагальненими силами, які в положенні рівноваги дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q_j} \right)_0 = 0; \quad \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial P}{\partial q_j} \right)_0 q_j = 0. \quad (4.102)$$

Вважаємо, що в положенні рівноваги потенціальна енергія має мінімум. Це є достатньою умовою стійкості положення

рівноваги і тоді друга похідна від потенціальної енергії за узагальненою координатою буде додатною.

У результаті нехтування у виразі (4.101) всіх членів порядку вище другого знайдемо:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j. \quad (4.103)$$

У подальшому введемо позначення коефіцієнтів для других степенів узагальнених координат:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = c_{ij} \quad (ij = 1, 2, \dots, s). \quad (4.104)$$

Звідси формула наближеного виразу для потенціальної енергії системи:

$$P = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + \dots + c_{ss} q_s^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + \dots + 2c_{(s-1)s} q_{s-1} q_s) + \dots$$

або

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j. \quad (4.105)$$

Формула (4.105) свідчить, що потенціальну енергію системи можна наближено подати однорідною квадратичною функцією узагальнених координат.

Сталі симетричні *величини* c_{ij} , що входять до формули (4.105), *називаються коефіцієнтами жорсткості*.

Слід зазначити, що потенціальна енергія системи визначається за формулою (4.105) з точністю до величин другого порядку мализни включно.

У подальшому розглядатимемо випадки *малих відхилень точок* системи від положення рівноваги.

4.6.3. Теорема Ляпунова-Лагранжа-Діріхле

У праці «Загальна задача про стійкість руху» А. М. Ляпунов дав чітке визначення стійкості стану положення рівноваги.

«Стійким положенням рівноваги системи називається таке її положення, коли за достатньо малим початковим відхиленням від нього і за достатньо малими початковими швидкостями всі точки системи, маючи скільки завгодно малі швидкості, будуть рухатись таким чином, що всі вони не відхиляться від свого рівноважного положення далі наперед заданої відстані, якою б малою вона не була».

Слід вказати на недостатню ознаку стійкості положення рівноваги системи в консервативному силовому полі, що надається відомою теоремою Лагранжа-Діріхле.

Якщо для матеріальної системи, що знаходиться в консервативному силовому полі і підпорядкованій голономним ідеальним стаціонарним в'язям, потенціальна енергія в положенні рівноваги системи має мінімум, то таке положення рівноваги стійке.

Ця теорема є частинним випадком теореми Ляпунова. Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія має екстремальне значення, то можна записати:

$$\frac{\partial P}{\partial q_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, s). \quad (4.106)$$

Сформулюємо ще одну із теорем Ляпунова.

Якщо відсутність мінімуму потенціальної енергії P в досліджуваному положенні рівноваги виявляється вже за членами другого порядку мализни в розкладенні функції P в ряд Тейлора, то рівновага нестійка.

Зазначимо, якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія не має мінімуму, то дослідження стійкості стану рівноваги є досить складною проблемою.

Теорема Лангранжа-Діріхле дає умову стійкості рівноваги системи з кінцевим числом ступенів вільності, причому стійкому рівноважному положенню відповідає мінімум потенціальної енергії.

Потенціальна енергія консервативної системи з "s" ступенями вільності виражається відомою формулою:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S c_{ij} q_i q_j. \quad (4.107)$$

Для визначення умов, за яких ця квадратична форма буде строго додатною, необхідно скористатись критерієм Сильвестра про знаковизначеність квадратичної форми:

Для того, щоб квадратична форма була строго додатною, необхідно і достатньо, щоб головні мінори її дискримінанта були додатні:

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{S1} & c_{S2} & \dots & c_{SS} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.108)$$

Тут прийняті такі позначення:

$$c_{11} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2}; \quad c_{22} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2}; \quad \dots; \quad c_{SS} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_S^2};$$

$$c_{12} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad c_{23} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \text{ і т. д.} \quad (4.109)$$

При цьому слід мати на увазі: $c_{12} = c_{21}$; $c_{23} = c_{32}$; тощо.

Як бачимо з головних мінорів дискримінанта, зі збільшенням числа ступенів вільності системи дослідження стійкості рівноваги таких систем значно ускладнюється.

4.6.4. Кінетична енергія системи в узагальнених координатах

Нехай матеріальна система, на яку накладені стаціонарні в'язі, складається із n матеріальних точок. Кінетична енергія такої системи виражається формулою:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i}{2}, \quad (4.110)$$

де \bar{v}_i – швидкість будь-якої точки системи.

Для голономної системи зі стаціонарними в'язями радіус-вектор будь-якої точки системи $\bar{r}_i \in$ функцією "s" узагальнених координат:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S). \quad (4.111)$$

Звідси, швидкість будь-якої точки системи:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_S} \dot{q}_S. \quad (4.112)$$

Підставимо це значення вектора швидкості у вираз кінетичної енергії системи (4.110):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_S} \right)^2 \dot{q}_S^2 + 2 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{S-1}} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_S} \dot{q}_{S-1} \dot{q}_S \right]. \quad (4.113)$$

Вираз (4.113) для кінетичної енергії можна записати так:

$$T = \frac{1}{2}[A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + A_{ss}\dot{q}_s^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + 2A_{s-1}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s], \quad (4.114)$$

$$\text{де } A_{11} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)^2; \quad A_{22} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right)^2; \quad \dots; \quad A_{ss} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right)^2;$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad A_{s-1} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{s-1}} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}. \quad (4.115)$$

Розкладемо кожен із цих коефіцієнтів, які є функціями від узагальнених координат, у ряд Маклорена за степенями узагальнених координат в околі положення рівноваги:

$$A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s) = (A_{ij})_0 + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \dots \quad (4.116)$$

Індекс 0 означає, що відповідні величини обчислюються за значення узагальненої координати $q_j = 0$.

Враховуючи те, що розглядаються досить малі коливання системи біля положення рівноваги, обмежимося у виразі (4.116) тільки першими сталими числами, відкинувши члени вище другого порядку:

$$(A_{ij}) = A_{ij}(0, 0, \dots, 0). \quad (4.117)$$

Позначимо ці сталі через a_{ij} і отримаємо вираз для кінетичної енергії у формі:

$$T = \frac{1}{2}[a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + a_{ss}\dot{q}_s^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + 2a_{s-1}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s]. \quad (4.118)$$

Вираз (4.118) можна переписати:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (4.119)$$

де a_{ij} – незалежні від часу додатні симетричні відносно індексів сталі величини, що називаються коефіцієнтами інерції, розмірності яких співпадають із розмірністю маси або моменту інерції.

Отже, в разі стаціонарних в'язей кінетична енергія матеріальної системи є квадратичною формою узагальнених швидкостей.

Якщо система має один ступінь вільності $s = 1$, то на підставі (4.118) запишемо:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2.$$

Якщо система має два ступеня вільності $s = 2$, то із виразу (4.118):

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2).$$

4.6.5. Рівняння Лагранжа із системи Гамільтона

Принцип Гамільтона стверджує, що варіація дії дорівнює:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (4.120)$$

де $L = T - P$ – функція Лагранжа.

Як відомо, варіація дії за Гамільтоном на прямому шляху порівняно з будь-яким обхідним шляхом дорівнює нулю

$$\delta S = 0. \quad (4.121)$$

Покажемо, як, виходячи із принципу Гамільтона, можна отримати рівняння Лагранжа другого роду.

Нехай $q_1(t), \dots, q_n(t)$, – узагальнені координати, що відповідають прямому шляху консервативної системи.

Тепер розглянемо обхідний шлях, що визначається координатами $q_1 + \delta q_1, \dots, q_s + \delta q_s$. Тоді з точністю до членів першого порядку мализни порівняно з δq_n і $\delta \dot{q}_n$, матимемо:

$$\delta L = \sum_{n=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \sum_{n=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n. \quad (4.122)$$

Звідси:

$$\delta + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L) dt. \quad (4.123)$$

Дією на проміжку часу (t_1, t_2) називається, за Гамільтоном, величина S , що визначається виразом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (4.124)$$

Беручи до уваги вираз (4.124), знайдемо:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right) \right] dt. \quad (4.125)$$

Використовуючи властивість операторів $\delta \frac{dq_n}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_n$, перепишемо останній вираз:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} (\delta q_n) \right) \right] dt. \quad (4.126)$$

Інтегруємо цей вираз частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} (\delta q_n) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (4.127)$$

За умови, якщо $t = t_1$, і $t = t_2$ варіації δq_n дорівнюють нулю, отримаємо:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n \right|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (4.128)$$

Тоді вираз (4.126) набуде вигляду:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_n} \right] \delta q_n dt. \quad (4.129)$$

Відповідно до принципу Гамільтона:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_n} \right] \delta q_n dt = 0. \quad (4.130)$$

Внаслідок довільності інтервалу інтегрування маємо:

$$\sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_n} \right) \delta q_n = 0. \quad (4.131)$$

Оскільки варіації координат незалежні, то отримаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, s), \quad (4.132)$$

або

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_n} = 0.$$

4.6.6. Дисипативна функція Релея

Як відомо, коливання системи в реальних умовах згасають, оскільки на її точки діють сили опору середовища, завдяки чому відбувається розсіювання механічної енергії системи.

Допустимо, що сили опору, які діють на окремі точки системи, пропорційні першим ступеням швидкостей, тобто, вони є лінійною функцією швидкостей:

$$\bar{R}_i = -\mu_i \bar{v}_i, \quad (4.133)$$

де μ_i – сталий коефіцієнт пропорційності або коефіцієнт опору, що визначається експериментально.

За відомим правилом знайдемо узагальнені сили опору у випадку стаціонарних в'язей матеріальної системи

$$Q_{1R} = \sum_{i=1}^n R_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}; \quad Q_{2R} = \sum_{i=1}^n R_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad Q_{sR} = \sum_{i=1}^n R_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}. \quad (4.134)$$

Швидкість кожної точки системи:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s. \quad (4.135)$$

Для подальшого нам знадобиться перша тотожність Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}. \quad (4.136)$$

Підставимо значення \bar{R}_i і $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$ у вирази узагальнених сил опору:

$$Q_{1R} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i v_i^2}{2}; \quad Q_{2R} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i v_i^2}{2}; \quad \dots; \quad Q_{sR} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i v_i^2}{2}. \quad (4.137)$$

Введемо нову скалярну функцію:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i}{2}. \quad (4.138)$$

Ця функція називається дисипативною функцією Релея або функцією розсіювання енергії. Вона аналогічна за своєю структурою кінетичній енергії системи, але замість коефіцієнтів інерції у вираз дисипативної функції входять коефіцієнти опору середовища.

Виразимо функцію Релея через узагальнену координату q і швидкість \dot{q} , враховуючи, що радіуси-вектори точок системи і їх похідні дорівнюють:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s); \quad \dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Звідси, у випадку стаціонарних в'язей дисипативна функція є додатною квадратичною функцією узагальнених швидкостей:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$\text{де } b_{ij} = b_{ji} = \sum_{i=1}^s \mu_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j},$$

$$\Phi = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + b_{ss} \dot{q}_s^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2b_{s-1} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s). \quad (4.139)$$

Отже, функція розсіювання енергії є однорідною функцією узагальнених швидкостей зі сталими коефіцієнтами опору b_{ij} , що залежать тільки від узагальнених координат. Фізичний зміст функції розсіювання полягає у наступному.

Розсіювання повної механічної енергії за одиницю часу у випадку консервативної системи дорівнює подвоєному значенню дисипативної функції Релея.

Для матеріальної системи з одним ступенем вільності:

$$\Phi = \frac{1}{2} b(q) \dot{q}^2.$$

Якщо матеріальна система має два ступеня вільності:

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2).$$

Тоді узагальнені сили опору:

$$Q_{1R} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1}; \quad Q_{2R} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_2}; \quad \dots; \quad Q_{sR} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_s}. \quad (4.140)$$

Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням сил опору:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_n} \quad (n = 1, 2, \dots, s) \quad (4.141)$$

або

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_n} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_n}.$$

4.6.7. Гамільтонова система рівнянь

Рівняння Лагранжа другого роду є системою n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для узагальнених координат q_j . Ці рівняння можуть бути зведені до системи $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку у зручній симетричній формі шляхом введення нових змінних.

Ці рівняння називають канонічними рівняннями Гамільтона і мають велике значення для досліджень питань стійкості коливального руху. Вони виражені у канонічних змінних t, q_n, p_n .

Виведемо рівняння Гамільтона.

Гамільтон ввів функцію, виражену через канонічні змінні:

$$H(p, q, t) = \sum_{n=1}^s p_n \dot{q}_n - L(\dot{q}, q, t) = \sum_{n=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L \quad (n = 1, 2, \dots, s), \quad (4.142)$$

де $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}$ – додаткова незалежна змінна поряд з

узагальненою координатою q_n і називається узагальненим імпульсом системи,

$L(\dot{q}, q, t) = T - \Pi$ – функція Лагранжа або кінетичний потенціал, що є надлишком кінетичної енергії над потенціальною.

Допускаємо, що узагальнені швидкості \dot{q}_n виражені через канонічні змінні:

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t).$$

Сукупність узагальнених координат і узагальнених швидкостей є змінними Лагранжа, а сукупність узагальнених координат і узагальнених імпульсів є канонічними змінними Гамільтона.

Варіація функції Лагранжа:

$$\delta L = \sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right). \quad (4.143)$$

Цей вираз можна записати в іншій формі:

$$\delta L = \delta \sum_{n=1}^s p_n \dot{q}_n + \sum_{n=1}^s (p_n \delta q_n - \dot{q}_n \delta p_n). \quad (4.144)$$

Тепер варіація функції Гамільтона буде:

$$\delta H = \delta \left(\sum_{n=1}^s p_n \dot{q}_n - L \right). \quad (4.145)$$

Підставляючи в цей вираз значення δL , маємо:

$$\delta H = \sum_{n=1}^s (\dot{q}_n \delta p_n - \dot{p}_n \delta q_n). \quad (4.146)$$

З іншого боку, варіація функції Гамільтона:

$$\delta H = \sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \delta q_n \right). \quad (4.147)$$

Після порівняння виразів (4.146) і (4.147) отримаємо:

$$\sum_{n=1}^s \left(\dot{q}_n - \frac{\partial H}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \sum_{n=1}^s \left(\dot{p}_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \delta q_n = 0. \quad (4.148)$$

З огляду на незалежність варіацій δp_n та δq_n маємо

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}; \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (n=1,2,\dots,s). \quad (4.149)$$

Отриману систему $2s$ рівнянь першого порядку називають системою канонічних рівнянь Гамільтона.

Розглянемо приклади складання диференціальних рівнянь коливання механічних систем.

Приклад 4.22

Скласти диференціальне рівняння руху причепа на дорозі з нерівностями, що описуються рівнянням $h = h_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$, де $x = vt$ (рис. 4.46).

Враховати, що під час коливань причепа в ресорах виникають сили тертя, пропорційні швидкості вертикального зміщення $F = \alpha(\dot{y} - \dot{y}_1)$.

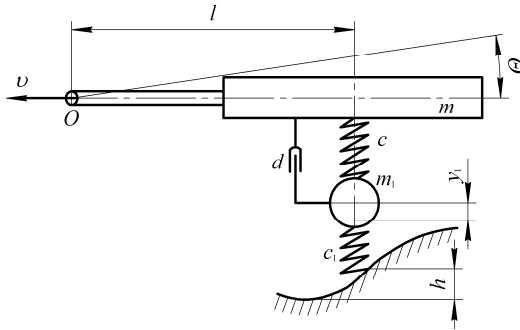


Рис. 4.46

Кінетична енергія причепа:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2,$$

де m – маса причепа; m_1 – маса коліс, I_o – момент інерції маси причепа відносно осі, що проходить через точку кріплення причепа до машини (точка O), v – швидкість буксирування.

Потенціальна енергія системи:

$$P = \frac{1}{2}c(l\theta - y_1)^2 + \frac{1}{2}c_1(y_1 - h)^2,$$

де c – коефіцієнт жорсткості ресор; c_1 – коефіцієнт жорсткості шин коліс.

$$\text{Дисипативна функція Релея } \Phi = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta} - \dot{y}_1)^2.$$

Рівняння Лагранжа з урахуванням дисипативної сили:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}}.$$

Підставляючи вирази похідних для T , P і Φ у рівняння Лагранжа, маємо:

$$m_1\ddot{y}_1 - \alpha(l\ddot{\theta} - \ddot{y}_1) - c(l\theta - y_1) + c_1(y_1 - h) = 0,$$

$$I\ddot{\theta} + \alpha(l\ddot{\theta} - \ddot{y}_1)l + c(l\theta - y_1)l = 0.$$

Це диференціальне рівняння коливання причепа з урахуванням нерівностей дороги. За відсутності сили тертя:

$$m_1\ddot{y}_1 - c(l\theta - y_1) + c_1(y_1 - h) = 0,$$

$$I\ddot{\theta} + c(l\theta - y_1)l = 0.$$

Приклад 4.23

Скласти диференціальне рівняння руху одновісного причепа (рис. 4.47).

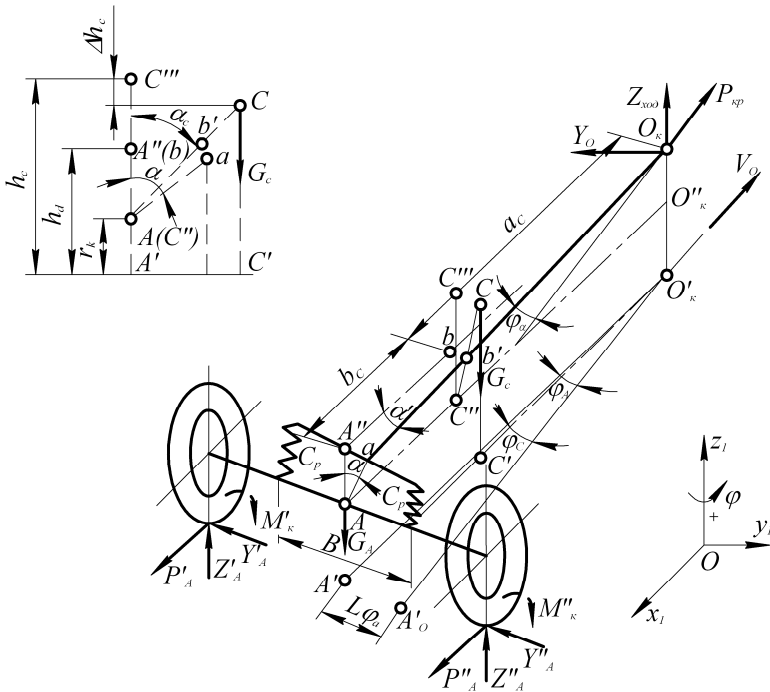


Рис. 4.47

Розрахункову схему одновісного причепа, відхиленого від нейтрального положення вліво за ходом, що здійснює поперечний горизонтальний рух проти годинникової стрілки, зображено на схемі.

Причеп представлений у вигляді системи, що складається з двох мас: не підресорена маса m зосереджена в середині ходової осі (точка A); підресорна маса m_c в точці C на висоті h_c від рівня опорної поверхні. Внаслідок дії знакозмінних сил інерції або у випадку впливу сніці причепа рама, жорстко зв'язана з дишлом, може здійснювати поперечні коливання на підвісці.

Кінетична енергія двомасової системи причепа під час обертального руху навколо осі $O_\kappa O'_\kappa$ дорівнює:

$$T = \frac{1}{2}(I_a \dot{\varphi}_a^2 + I_c \dot{\varphi}_c^2),$$

де I_a і I_c – моменти інерції мас A і C відносно вертикальної осі, що проходить через точку зчїпки O_k ;

φ_a і φ_c – кути відхилення мас A і C від нейтрального положення.

Потенціальна енергія підвіски причепа:

$$П = \frac{1}{2}L^2 c_{\text{за}} (\varphi_a - \varphi_c)^2,$$

де $c_{\text{за}}$ – зведений коефіцієнт поперечної жорсткості пружного елемента підвіски,

$L = a_c + b_c$ – подовжня міжосьова відстань OA .

Дисипативна функція для системи, що розглядається, представиться виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2}L^2 \xi_{\text{нр}}^2 (\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c)^2,$$

де $\xi_{\text{нр}}$ – зведений коефіцієнт опору підвіски.

Рівняння Лагранжа для цього випадку мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_a} + \frac{\partial П}{\partial \varphi_a} = Q_{\varphi_a} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_a};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_c} + \frac{\partial П}{\partial \varphi_c} = Q_{\varphi_c} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_c},$$

де Q_{φ_a} і Q_{φ_c} – узагальнені сили, які обчислюються як сума коефіцієнтів за узагальнених можливих переміщень:

$$Q_{\varphi_a} = -L^2 \left[\frac{\dot{\varphi}_a}{v_o} + \frac{\varphi_a}{L} - \frac{v}{h} (\varphi_a - \varphi_c) \right]; \quad Q_{\varphi_c} = 0,$$

де v – коефіцієнт, що враховує вплив кута крену на відведення ходової осі.

Підставивши вираз кінетичної і потенціальної енергії, дисипативної функції та узагальнених сил в рівняння Лагранжа, отримаємо диференціальні рівняння руху причепа:

$$I_a \ddot{\varphi}_a + L^2 \left(\frac{\kappa}{v_o} + \zeta_{np} \right) \dot{\varphi}_a + L^2 \left[c_{зв} - m_c g \frac{\beta^2}{h} + \left(1 - v \frac{L}{H} \right) \frac{\kappa}{L} \right] \varphi_a - L^2 \zeta_{np} \dot{\varphi}_c - L^2 \left[c_{зв} - m_c g \frac{\beta^2}{H} - \kappa \frac{v}{H} \right] \varphi_c = 0;$$

$$I_c \ddot{\varphi}_c + L^2 \zeta_{np} \dot{\varphi}_c + L^2 \left[c_{зв} - m_c g \frac{\beta^2}{h} \right] \varphi_c - L^2 \zeta_{np} \dot{\varphi}_a - L^2 \left[c_{зв} - m_c g \frac{\beta^2}{h} \right] \varphi_a = Q,$$

де $\beta = \frac{a_c}{L}$.

Приклад 4.24

Скласти диференціальні рівняння руху гусеничного трактора.

Пружно-балансирну коливальну систему гусеничного трактора (рис. 4.48а) в першому наближенні замінимо умовною еквівалентною підвіскою.

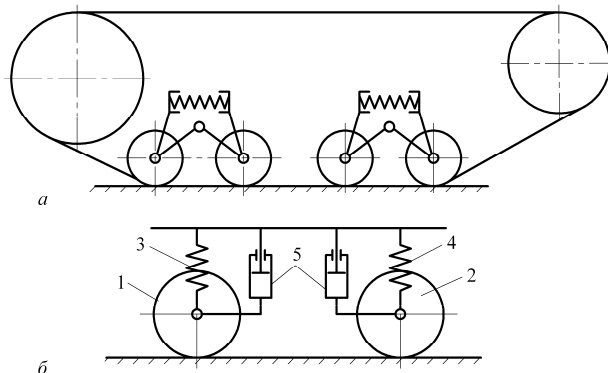


Рис. 4.48

На рис. 4.48б пружно-балансирна підвіска трактора замінена двома котками 1 і 2, підвішеними до остова трактора пружинами 3

і 4; осі пружин проходять через осі підвісу кареток.

Котки 1 і 2 імітують всі не підресорені маси балансірних кареток. Амортизатори 5 імітують гасіння коливань, що зумовлюється наявністю тертя в шарнірах підвіски.

Диференціальні рівняння руху гусеничного трактора:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_1 \frac{dy}{dt} + c_1(y - b\theta) + c_2(y + a\theta) = 0;$$

$$mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + k_2 \frac{d\theta}{dt} - c_1(y - b\theta)b + c_2(y + a\theta)a = 0.$$

де k_1 і k_2 – коефіцієнти опору амортизаторів;

c_1 і c_2 – коефіцієнти жорсткості пружин;

a і b – подовжні відстані від центрів котків 1 і 2 до центра ваги трактора.

Приклад 4.25

Скласти диференціальні рівняння руху колісного екіпажа (рис. 4.49). Положення екіпажа в процесі коливального руху характеризується сімома координатами:

y_1 – вертикальне переміщення центра ваги кузова;

y_2, y_3, y_4, y_5 – вертикальне переміщення центрів ваги коліс;

θ – кут повороту кузова відносно поперечної осі екіпажа;

φ – кут повороту кузова екіпажа відносно поздовжньої осі.

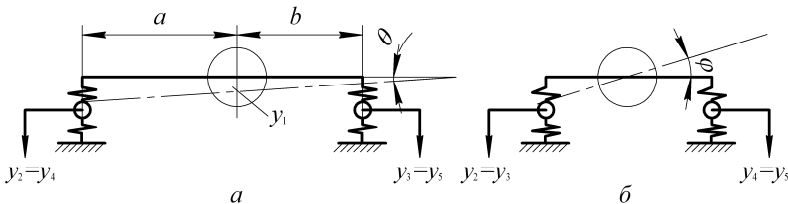


Рис. 4.49

Оскільки розподіл мас відносно поздовжньої осі майже симетричний, то в подальшому будемо ігнорувати деяку малу асиметрію, тому загальний процес руху можна розглядати таким, що складається із двох взаємно не пов'язаних процесів, а саме:

1. Поздовжніх коливань, що характеризуються вертикальним переміщенням кузова y_1 , поворотом кузова навколо поперечної осі, рівними зміщеннями обох передніх коліс $y_2=y_4$ і рівними зміщеннями обох задніх коліс $y_3=y_5$ (рис. 4.49а).

2. Поперечних коливань, що характеризуються поворотом кузова навколо поздовжньої осі φ і попарно рівними зміщеннями обох лівих $y_2=y_3$ і обох правих $y_4=y_5$ коліс (рис. 4.49б).

Враховуючи кількість узагальнених координат, поздовжні коливання описуються чотирма диференціальними рівняннями, а поперечні коливання – трьома диференціальними рівняннями. Розрахунки показують, що найважливіше значення мають поздовжні коливання, що розглядаються нижче.

Сумарна кінетична енергія кузова і коліс:

$$T = \frac{I}{2} \left[m \left(\dot{y}_1^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + 2m_k \left(\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 \right) \right],$$

де m – маса кузова; m_k – маса колеса; r – радіус інерції кузова відносно поперечної осі, що проходить через центр ваги.

Сумарна потенціальна енергія деформації ресор і шин:

$$P = c_n \left(y_1 - y_2 + a\theta \right)^2 + c_3 \left(y_1 - y_3 - b\theta \right)^2 + c_{ш} \left(y_2^2 + y_3^2 \right),$$

де c_n і c_3 – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор;

$c_{ш}$ – коефіцієнт жорсткості шин.

Рівняння Лагранжа другого роду в цьому випадку:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) + \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) + \frac{\partial P}{\partial y_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_3} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0.$$

У результаті підстановки виразів похідних від T і Π в рівняння Лагранжа, отримуємо диференціальні рівняння руху екіпажа:

$$m\ddot{y}_1 + 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) + 2c_s(y_1 - y_3 - b\theta) = 0;$$

$$2m_k\ddot{y}_2 - 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) + 2c_{u_1}y_2 = 0;$$

$$2m_k\ddot{y}_3 - 2c_s(y_1 - y_3 - b\theta) + 2c_{u_2}y_3 = 0;$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta)a - 2c_s(y_1 - y_3 - b\theta)b = 0.$$

Приклад 4.26

Скласти диференціальні рівняння руху колісного трактора.

Трактор на пневматичних шинах є коливальною системою, в якій роль демпфірувальних елементів виконують шини (рис. 4.50).

Розглянемо той випадок, коли передня вісь трактора є підресореною. Еквівалентна схема має чотири ступеня вільності з узагальненими координатами: лінійні переміщення центра ваги і коліс y_1, y_2, y_3 і кут повороту остова θ .

Сумарна кінетична енергія остова трактора з колесами:

$$T = \frac{I}{2} \left[m \left(\dot{y}_1^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + 2 \left(m_1 \dot{y}_2^2 + m_2 \dot{y}_3^2 \right) \right],$$

де m – маса остова трактора; m_1 і m_2 – маса передніх і задніх коліс; r – радіус інерції відносно центра мас.

Сумарна потенціальна енергія деформації передніх ресор і шин:

$$\Pi = c_n(y_1 - y_2 + a\theta)^2 + c_{u_1}y_2^2 + c_{u_2}y_3^2,$$

де c_n – коефіцієнт жорсткості передніх ресор; c_{u_1} і c_{u_2} – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх шин; a – відстань від передньої осі до центра ваги трактора.

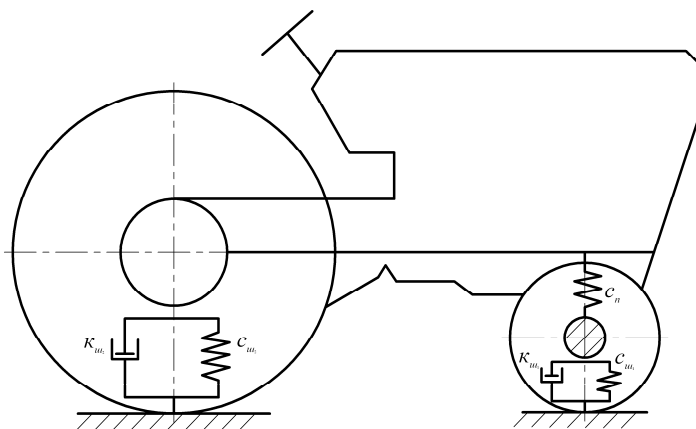


Рис. 4.50

Підставивши значення похідних від T і Π в рівняння Лагранжа, отримаємо диференціальні рівняння руху колісного трактора:

$$m\ddot{y}_1 + 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) = 0;$$

$$2m_1\ddot{y}_2 - 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) + 2c_{u_1}y_2 = 0;$$

$$2m_2\ddot{y}_3 + 2c_{u_2}y_3 = 0;$$

$$mr^2\ddot{\theta} + c_n(y_1 - y_2 + a\theta)a = 0.$$

Приклад 4.27

Скласти диференціальні рівняння руху самохідного комбайна масою m , маса кожного із чотирьох підресорених коліс m_k

(рис. 4.51). Радіус інерції остова комбайна відносно центральної поперечної осі r .

Комбайн на пневматичних шинах є коливальною системою, в якій роль демпфівувальних елементів виконують шини, а остов комбайна є не підресореною масою. На рис. 4.51 наведено коливальну систему комбайна. Розглядаємо найбільш важливі поздовжні коливання: система має три ступеня вільності. За узагальнені координати оберемо:

y_1 – зміщення центра ваги відносно положення рівноваги;

y_2 – зміщення центра передніх коліс;

y_3 – зміщення центра задніх коліс.

Сумарна кінетична енергія остова комбайна і коліс:

$$T = \frac{1}{2} \left[m \left(\dot{y}_1^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + 2m_k \left(\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 \right) \right].$$

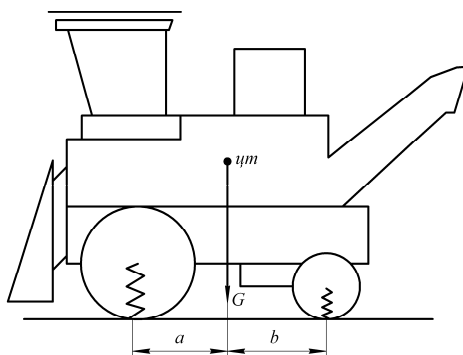


Рис. 4.51

Потенціальна енергія деформації шин:

$$\Pi = c_{ш} \left(y_2^2 + y_3^2 \right),$$

де $c_{ш}$ – коефіцієнт жорсткості шин.

Підставивши значення похідних кінетичної і потенціальної енергії в рівняння Лагранжа, отримаємо диференціальні рівняння коливального руху комбайна:

$$m\ddot{y}_1 = 0;$$

$$2m_k\ddot{y}_2 + 2c_{ш}y_2 = 0;$$

$$2m_k\ddot{y}_3 + 2c_{ш}y_3 = 0;$$

$$mr^2\ddot{\theta} = 0.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть причини виникнення механічних коливань системи.
2. За якою формулою визначається потенціальна енергія системи?
3. У чому полягає теорема Лагранжа-Діріхле?
4. У чому полягає критерій Сильвестра?
5. За якою формулою визначається кінетична енергія системи?
6. Чому дорівнює варіація дії за Гамільтоном?
7. Який вигляд мають рівняння Лагранжа для консервативної системи?
8. Який вигляд має дисипативна функція?
9. Який вигляд мають канонічні рівняння Гамільтона?
10. Який вигляд мають рівняння Лагранжа з урахуванням розсіювання енергії?

4.6.8. Власні коливання системи з одним ступенем вільності

Розглянемо малі коливання, які здійснюються відносно стійкого положення рівноваги. Почнемо з коливань системи з одним ступенем вільності. Уявимо собі консервативну систему зі стаціонарними в'язями, що складається із n матеріальних точок, на які діють потенціальні сили.

Для дослідження малих коливань системи скористаємось методом Лагранжа (рівняння Лагранжа другого роду). Тоді положення точок системи характеризуються однією узагальненою координатою q . Інтегрування цього рівняння дозволить визначити вираз узагальненої координати $q(t)$ як функції часу, а також частоту власних коливань, яка характеризує внутрішні властивості матеріальної системи.

Вважаємо, що положення рівноваги є стійким. Якщо порушити це положення, надавши системі незначне початкове відхилення і початкову швидкість, то кожна точка системи буде залишатися поблизу положення рівноваги під дією сил, що мають потенціал. Дослідити ці малі коливання в околі положення рівноваги – наше завдання.

Для малих коливань із метою спрощення подальших викладень приймемо, що в положенні рівноваги узагальнена координата $q = 0$. Звідси, в положеннях системи, близьких до рівноважного, координата q матиме малі значення. В подальшому вважаємо координату q , а також її похідну узагальнену швидкість \dot{q} величинами першого порядку мализни. Тому складатимемо диференціальні рівняння малих коливань із точністю лише до членів першого порядку мализни. Слід зазначити, що, нехтуючи величинами вищих порядків мализни, вносимо деяку похибку в остаточні результати. Проте, ця похибка повністю окупується спрощенням обчислень, що досягається лінеаризацією диференціальних рівнянь.

Під час складання диференціальних рівнянь руху з точністю до величин першого порядку мализни треба обчислювати як

кінетичну, так і потенціальну енергію з точністю до величин другого порядку мализни.

Складемо диференціальне рівняння руху системи за узагальноною координатою q :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \quad (4.150)$$

де T – кінетична енергія системи, Π – потенціальна енергія. Кінетична енергія для системи з одним ступенем вільності:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (4.151)$$

де a – коефіцієнт інерції або зведена маса системи. Потенціальна енергія системи:

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (4.152)$$

де c – зведений коефіцієнт жорсткості системи.

До того ж, коли узагальнена координата q є лінійним переміщенням якоїсь точки системи, то коефіцієнт a дорівнює масі тіла, зведеної до цієї точки, а узагальнений чи зведений коефіцієнт жорсткості c є лінійним коефіцієнтом жорсткості, зведеної до цієї точки або коефіцієнтом пропорційності відновлювальної сили.

Якщо узагальнена координата вимірюється в радіанах, тобто є кутом повороту відносно деякої осі, то коефіцієнт інерції a дорівнює моменту інерції маси системи, зведеної до цієї ж осі, а зведений коефіцієнт жорсткості c є коефіцієнтом жорсткості на кручення пружини, торсіона або коефіцієнтом пропорційності відновлювального моменту (наприклад, $c = mql$ для математичного чи фізичного маятника).

Підкреслимо, що як зведена маса, так і зведений момент інерції системи змінюються зі зміною конфігурації системи, тобто, є функцією узагальноною координати.

За теоремою Лагранжа-Діріхле рівноважне положення системи буде стійким, коли потенціальна енергія Π має мінімум, якщо $q=0$, а для цього потрібно, щоб було $c > 0$.

Підставляючи вирази похідних від (4.151) і (4.152) в рівняння Лагранжа (4.150), маємо:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (4.153)$$

Якщо $\lambda^2 = \frac{c}{a},$ (4.154)

тоді диференціальне рівняння остаточно набуде вигляду:

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = 0. \quad (4.155)$$

Для того, щоб рівняння (4.155) мало нетривіальний розв'язок ($q \neq 0$), треба задати не нульові початкові умови:

$$\text{коли } t=0: q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + \lambda^2 = 0. \quad (4.156)$$

Корені характеристичного рівняння:

$$k_{1,2} = \pm i\lambda. \quad (4.157)$$

Оскільки корені рівняння (4.156) є уявними, то загальний розв'язок диференціального рівняння (4.155) має вигляд

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t, \quad (4.158)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі інтегрування.

Довільні сталі C_1 і C_2 визначають за початковими умовами руху системи.

Диференціюючи за часом вираз (4.158), маємо друге рівняння:

$$\dot{q} = -\lambda C_1 \sin \lambda t + \lambda C_2 \cos \lambda t. \quad (4.159)$$

Підставляючи в рівняння (4.158) і (4.159), якщо $t = 0$ початкові

умови, отримаємо:

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\lambda}. \quad (4.160)$$

Якщо підставити значення C_1 і C_2 в рівняння (4.158), то отримаємо вираз узагальненої координати як функції часу:

$$q = q_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t. \quad (4.161)$$

Колова частота власних коливань визначається за формулою:

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (4.162)$$

Цю частоту називатимемо власною частотою системи, яка не залежить від початкових умов. Період власних коливань системи дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.163)$$

Період коливань T теж не залежить від початкових умов системи.

Знайдемо другий вигляд рівняння (4.159), позначивши:

$$C_1 = A \sin \alpha; \quad C_2 = A \cos \alpha,$$

де A і α – нові довільні сталі. Враховуючи знайдені C_1 і C_2 :

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\lambda^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0 \lambda}{\dot{q}_0}. \quad (4.164)$$

Підставляючи ці значення у формулу (4.159), після перетворення у синус суми двох кутів, отримаємо:

$$q = A \sin(\lambda t + \alpha). \quad (4.165)$$

Розглядаючи закони коливального руху у формах (4.161) (4.165) можна дійти висновку, що характеризують власні коливання системи з одним ступенем вільності.

1, Власні коливання системи є гармонічними.

2. Кожна точка системи здійснює прямолінійний рух за прямою, що проходить через її положення рівноваги.

3. Власна частота системи і період коливань не залежать від початкових умов і є сталими величинами для даної системи.

4. Амплітуди власних коливань точок системи A , а також початкова фаза α , що можна побачити із виразів (4.164), залежать від початкових умов. Відношення амплітуд різних точок системи від початкових умов не залежать, а тому не залежить від початкових умов і форма коливань системи, оскільки вона визначається саме відношенням амплітуд різних точок системи.

5. Фаза коливань $(\lambda t + \alpha)$ є загальною для всіх точок системи. Тобто, всі точки системи завжди знаходяться в одній фазі одночасно. А це означає, що всі точки системи одночасно проходять своє положення рівноваги і одночасно досягають максимального відхилення від цього положення.

Проте, слід розуміти, що ці висновки зроблені на підставі наближених лінеаризованих рівнянь. Дійсний рух тим точніше описується лінійними рівняннями, чим менше амплітуди вібрацій або коливань системи.

4.6.9. Коливання тіла на пружній нитці

Розглянемо власні коливання тіла вагою P , підвішеного на пружній нитці до нерухомої точки A (рис. 4.52).

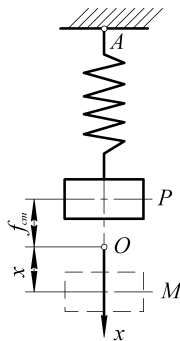


Рис. 4.52

Допустимо, що l – довжина нитки в не розтягнутому стані, $OM = x$ – відхилення тіла від рівноважного положення під час його коливань. Масою нитки нехтуємо, а тіло трактуємо як матеріальну точку. Направимо вісь x вертикально вниз, у бік відліку переміщень.

Кінетична енергія тіла, що коливається, матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (4.166)$$

де $m = \frac{P}{g}$ – маса тіла.

Потенціальна енергія системи складається із потенціальної енергії деформації пружної нитки і потенціальної енергії піднятого тіла. Приймаючи за нульове значення енергії в положенні рівноваги, маємо:

$$П = \frac{1}{2} c (f_{cm} + x)^2 - P (f_{cm} + x) = \frac{1}{2} c (x^2 - f_{cm}^2), \quad (4.167)$$

де $P = f_{cm}c$ – рівність ваги тіла і сили пружності у положенні рівноваги,

$c = \frac{EF}{l}$, де E – модуль пружності матеріалу, F – площа поперечного перетину.

Підставляючи похідні виразів (4.166) і (4.167) в рівняння Лагранжа (4.150), маємо:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (4.168)$$

звідси колова частота власних коливань тіла:

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (4.169)$$

Після підстановки значень c і m отримуємо:

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}}, \quad (4.170)$$

де $f_{cm} = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$ – статичне видовження нитки.

Період власних коливань визначається за формулою:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{f_{cm}}{g}}, \quad (4.171)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Формулу (4.169) для власної частоти λ отримали, нехтуючи масою нитки. У дійсності нитка має масу, яка бере участь у русі системи. Покажемо, як впливає маса нитки на величину колової частоти власних коливань. Для визначення кінетичної енергії маси нитки застосуємо метод Релея, який полягає в тому, що масу, розподілену за всією довжиною, зводять до маси, зосередженої на кінці нитки.

Метод Релея дає розв'язок, що мало відрізняється від точного, якщо обчислюється частота основного тону коливання. Невелика похибка, що виникає від застосування метода Релея, повністю виправдовується простотою обчислень.

Виділимо двома суміжними перетинами, проведеними на відстанях x і $x+dx$ від точки закріплення, елемент нитки dx (рис. 4.53).

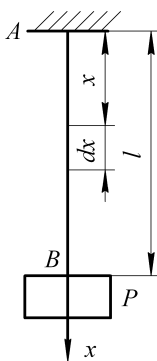


Рис. 4.53

Вважаємо масу нитки малою відносно ваги тіла. Тоді переміщення деякого перетину нитки під час її розтягу так відноситься до абсциси x , як динамічне видовження всієї нитки до її довжини. Звідси знаходимо швидкість взятого елемента dx як похідну від переміщення.

Кінетичну енергію нитки обчислимо як суму кінетичних енергій окремих елементів нитки. Кінетична енергія елемента дорівнює:

$$dT_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_\epsilon}{g} \dot{x}^2 dx \frac{x^2}{l^2}. \quad (4.172)$$

Кінетична енергія маси всієї нитки:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q_\epsilon}{g} \dot{x}^2 dx \frac{x^2}{l^2} = \frac{q_\epsilon l}{6g} \dot{x}^2. \quad (4.173)$$

Повна кінетична енергія системи з урахуванням тіла:

$$T = \frac{1}{2g} \left(P + \frac{1}{3} q_\epsilon l \right) \dot{x}^2, \quad (4.174)$$

де q_ϵ – питома вага нитки довжиною 1 см.

Обчислимо далі потенціальну енергію системи. До попереднього виразу додаємо член, який враховує вагу нитки. Позначаючи її P_1 і маючи на увазі, що переміщення центра ваги нитки після розтягу дорівнює $\frac{1}{2}(f_{cm} + x)$, отримаємо:

$$\Pi = \frac{1}{2} c (f_{cm} + x)^2 - P (f_{cm} + x) - \frac{1}{2} P_1 (f_{cm} + x).$$

Враховуючи умову статичної рівноваги, якщо $x = 0$:

$$c f_{cm} - P - \frac{1}{2} P_1 = 0,$$

остаточно отримуємо вираз потенціальної енергії:

$$\Pi = \frac{1}{2} c (x^2 - f_{cm}^2).$$

Підставляючи вирази похідних кінетичної та потенціальної енергії в рівняння Лагранжа (4.150), маємо:

$$\frac{\left(P + \frac{1}{3}q_6l\right)}{g}\ddot{x} + cx = 0. \quad (4.175)$$

Для зручності запису позначимо:

$$\lambda^2 = \frac{cg}{P + \frac{1}{3}q_6l}. \quad (4.176)$$

Тоді диференціальне рівняння коливань набуде вигляду:

$$\ddot{x} + \lambda^2x = 0. \quad (4.177)$$

Звідси для власної частоти λ знаходимо формулу:

$$\lambda = \sqrt{\frac{cg}{P + \frac{1}{3}q_6l}}. \quad (4.178)$$

Період коливання системи:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{P + \frac{1}{3}q_6l}{cg}}. \quad (4.179)$$

Отже, для обчислення власної частоти вантажу P з урахуванням впливу маси нитки необхідно додати до ваги вантажу одну третину ваги нитки. Формула (4.178) є наближеною. Дослідження базувалося на допущенні, що вага нитки мала відносно ваги тіла. Проте, розрахунки показують, якщо навіть вага нитки і тіла дорівнюють, то помилка становить 1%.

4.6.10. Власні коливання з урахуванням лінійного опору

Спостереження свідчать, що власні коливання відносно положення стійкої рівноваги, які відбуваються під дією

відновлювальної сили, поступово згасають, амплітуди коливань з плином часу зменшуються за певним законом.

Таке розходження між теорією і спостереженнями вказує на те, що не враховано реальний опір руху, спрямований проти напрямку коливального руху.

Розглянемо власні або вільні коливання системи з одним ступенем вільності з урахуванням сили лінійного опору, пропорційної швидкості (сила в'язкого тертя), що гальмує рух кожної точки:

$$\bar{R} = -\mu\bar{v},$$

де μ – сталий коефіцієнт в'язкого тертя середовища.

У цьому випадку кінетична, потенціальна енергії і дисипативна функція Релея мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2}cq^2; \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2}b\dot{q}^2. \quad (4.180)$$

Узагальнена сила опору визначається за формулою:

$$Q_R = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}} = -b\dot{q}. \quad (4.181)$$

Знак мінус вказує на те, що ця сила напрямлена у бік, протилежний руху системи.

Рівняння Лагранжа з урахуванням дисипативної сили:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}}. \quad (4.182)$$

Підставивши значення похідних від кінетичної і потенціальної енергії, а також від функції Релея в рівняння Лагранжа, отримаємо диференціальне рівняння коливань системи з урахуванням згасання:

$$\begin{aligned} a\ddot{q} + c\dot{q} &= -b\dot{q}, \\ \ddot{q} + 2n\dot{q} + \lambda^2 q &= 0, \end{aligned} \quad (4.183)$$

де $n = \frac{b}{2m}$ – коефіцієнт згасання.

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що для загального розв'язку однорідного диференціального рівняння необхідно скласти характеристичне рівняння:

$$r^2 + 2nr + \lambda^2 = 0. \quad (4.184)$$

Корені цього характеристичного рівняння:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \lambda^2}. \quad (4.185)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (4.183) матиме різні форми залежно від співвідношення величин n і λ .

I. Розглянемо випадок, коли $n < \lambda$ (випадок малого опору).

Тоді характеристичне рівняння (4.184) матиме комплексні корені:

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\lambda^2 - n^2}, \quad (4.186)$$

де $i = \sqrt{-1}$.

Для цього випадку загальний інтеграл рівняння (4.183):

$$q = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{\lambda^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - n^2} t \right) \quad (4.187)$$

Довільні сталі інтегрування визначаються з початкових умов, коли $t=0$: $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{\lambda^2 - n^2}}. \quad (4.188)$$

Звідси, загальний інтеграл рівняння (4.183) набуває вигляду:

$$q = e^{-nt} \left(q_0 \cos \sqrt{\lambda^2 - n^2} t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{\lambda^2 - n^2}} \sin \sqrt{\lambda^2 - n^2} t \right). \quad (4.189)$$

Введемо у вираз (4.187) замість сталих C_1 і C_2 нові A і β за формулами:

$$C_1 = A \sin \beta; \quad C_2 = A \cos \beta. \quad (4.190)$$

Тоді рівняння (4.189) можна записати в наступному вигляді:

$$q = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\lambda^2 - n^2}t + \beta) \quad (4.191)$$

A і β визначають за початковими умовами за формулами:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{\lambda^2 - n^2}}; \quad \text{ctg}\beta = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{q_0 \sqrt{\lambda^2 - n^2}}. \quad (4.192)$$

Таким чином, рух системи за виразом (4.191) має коливальний характер, оскільки координата змінює свій знак внаслідок зміни знака синуса. Але цей рух не є періодичним, тому що $q(t) \neq q(t + \tau_i)$. Графік цих коливань зображений на рис. 4.54.

З рівняння (4.191) видно, що множник e^{-nt} протягом часу зменшується, тому відхилення системи від її рівноважного положення також зменшуються.

Умовний період згасаючих коливань системи визначається за формулою:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - n^2}}. \quad (4.193)$$

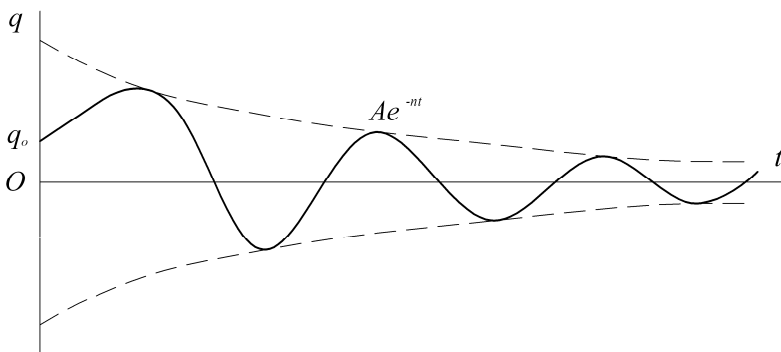


Рис. 4.54

Для практики більш зручною є наближена формула:

$$\tau_1 = \tau \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right], \quad (4.194)$$

де $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$ – період вільних коливань системи без опору.

Період згасаючих коливань більший за період вільних коливань без опору, тобто опір середовища, що пропорційний першому ступеню швидкості, збільшує період коливань. Але за малого опору збільшення періоду коливань є незначним. Разом з тим, згасання коливань протікає вельми енергійно і за дуже малого опору.

У випадку малого опору період τ_1 , незначно відрізняється від періоду τ , тому під час обчислення можна опором знехтувати. Зазначимо, що проміжок часу τ_1 , що відділяє моменти двох послідовних амплітудних відхилень системи від положення рівноваги, відповідає півперіоду коливань $\frac{\tau_1}{2}$, тому значення цих відхилень має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} q_t &= Ae^{-nt}; \\ q_t + \frac{\tau_1}{2} &= Ae^{-n\left(t + \frac{\tau_1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.195)$$

Відношення абсолютних значень двох послідовних амплітудних відхилень системи від положення рівноваги називається декрементом згасаючих коливань:

$$\psi = e^{-n\frac{\tau_1}{2}}. \quad (4.196)$$

Натуральний логарифм цього відношення називається логарифмічним декрементом коливань:

$$\ln \psi = n\frac{\tau_1}{2}. \quad (4.197)$$

II. Розглянемо другий випадок, коли $n > \lambda$ (випадок великого опору).

Корені характеристичного рівняння (4.184) будуть від'ємними:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \lambda^2}, \quad (4.198)$$

а загальний інтеграл диференціального рівняння (4.183)

$$q = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - \lambda^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - \lambda^2} t} \right). \quad (4.199)$$

Після деяких перетворень маємо

$$q = e^{-nt} \left(A_1 ch \sqrt{n^2 - \lambda^2} t + A_2 sh \sqrt{n^2 - \lambda^2} t \right) \quad (4.200)$$

Сталі A_1 і A_2 пов'язані з C_1 і C_2 формулами:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2C_1; \\ A_1 - A_2 &= 2C_2. \end{aligned} \quad (4.201)$$

Сталі A_1 і A_2 визначаються з початкових умов: коли $t = 0$: $q = q_o$, $\dot{q} = \dot{q}_o$. Звідси, A_1 і A_2 виражаються формулами:

$$A_1 = q_o; \quad A_2 = \frac{\dot{q}_o + nq_o}{\sqrt{n^2 - \lambda^2}}. \quad (4.202)$$

Підставивши в рівняння (4.200) замість A_1 і A_2 їх значення (4.202), отримаємо:

$$q = e^{-nt} \left(q_o ch \sqrt{n^2 - \lambda^2} t + \frac{\dot{q}_o + nq_o}{\sqrt{n^2 - \lambda^2}} sh \sqrt{n^2 - \lambda^2} t \right). \quad (4.203)$$

Відповідно до рівняння (4.203) узагальнена координата q з часом буде безмежно убувати і система, отримавши початкове збурення, буде асимптотично наближатися до рівноважного положення (рис. 4.55). Рух, який відповідає цьому рівнянню, не є коливальним. Такий рух називається аперіодичним. Великий опір швидко поглинає енергію власних коливань.

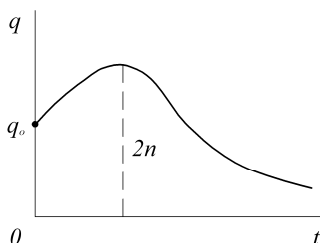


Рис. 4.53

III. Випадак, коли $n = \lambda$ (граничний аперіодичний рух).

Корені характеристичного рівняння (4.184) будуть дійсними, рівними і від'ємними:

$$r_{1,2} = -n. \quad (4.204)$$

Загальний інтеграл рівняння (4.183) має вигляд:

$$q = e^{-nt}(C_1 t + C_2). \quad (4.205)$$

Рух, що описується рівняннями (4.203) і (4.205) буде аперіодичним. Графік аперіодичного руху представлений на рис. 4.53.

З графіка (рис. 4.53) видно, що характер аперіодичного руху системи визначається тим, що за постійного зростання часу t координата q наближається до нуля.

У результаті розгляду питання щодо впливу опору на вільні коливання системи з одним ступенем вільності, можна дійти висновків.

1. Під час дії сил опору відбувається безперервне зменшення енергії коливної системи, а тому спостерігається поступове припинення вільних коливань.

2. Частота і період вільних коливань системи в результаті впливу малого опору зменшуються незначно.

3. За наявності великого опору відбувається аперіодичний рух, тобто, такий рух, за якого відсутній коливальний процес.

4.6.11. Власні коливання за наявності кулонівського тертя

Диференціальне рівняння власних коливань системи в цьому випадку має вигляд:

$$a\ddot{q} + cq = Q_R(\dot{q}), \quad (4.206)$$

де Q_R – узагальнена сила опору, нелінійна функція узагальненої швидкості.

Поділимо обидві частини рівняння на a :

$$\ddot{q} + f(\dot{q}) + \lambda^2 q = 0, \quad (4.207)$$

$$\text{де } f(\dot{q}) = -\frac{Q_R(\dot{q})}{a},$$

$\lambda^2 = \frac{c}{a}$ – частота власних коливань.

Здебільшого точний розв'язок диференціального рівняння (4.207) за допомогою елементарних функцій отримати неможливо.

Розв'язок цього рівняння можна отримати наближено за допомогою методів графічного або чисельного інтегрування з достатньою для практики точністю. Проте, слід зазначити, що ці методи громіздкі і потребують великого об'єму обчислювальних робіт.

Для випадку малого опору, коли він незначно впливає на частоту вільних коливань, можна період коливань прийняти рівним періоду вільних коливань системи:

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.208)$$

Якщо є питання щодо амплітуд коливань із кулонівським тертям, то дослідження доводять: *убування амплітуд коливань відбувається за законом арифметичної прогресії.*

Водночас відомо, що убування амплітуд у випадку сил опору, пропорційних швидкості, відбувається за законом геометричної прогресії.

4.6.12. Змушені коливання системи з одним ступенем вільності

У випадку змушених коливань до точок системи, крім раніше розглянутих сил, прикладені сили, що змінюються з часом за наперед заданим законом $S(t)$. Такі сили називають збурювальними силами. Прийmemo до уваги, що тут також враховують сили опору, пропорційні швидкостям точок їх прикладання. Диференціальне рівняння змушених коливань системи з одним ступенем вільності має вигляд:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{1}{a} S(t), \quad (4.209)$$

де $n = \frac{b}{2a}$ – коефіцієнт згасання,

$\lambda^2 = \frac{c}{a}$ – частота власних коливань.

Інтегрування рівняння (4.209) проводимо за способом довільних сталих Лагранжа. Для однорідного рівняння без правої частини загальний інтеграл має вигляд:

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t), \quad (4.210)$$

де $\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - n^2}$ – частота згасаючих коливань.

Для подальшого розв'язання загальний інтеграл неоднорідного рівняння (4.209) розглядаємо як вираз (4.210), приймаючи C_1 і C_2 як функції часу, що потребують визначення.

Диференціюємо вираз (4.210) за часом:

$$\dot{q} = e^{-nt} [-n(C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t) + \lambda_1 (-C_1 \sin \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_1 t) + (\dot{C}_1 \cos \lambda_1 t + \dot{C}_2 \sin \lambda_1 t)]. \quad (4.211)$$

Підпорядковуючи шукані функції C_1 і C_2 умові:

$$\dot{C}_1 \cos \lambda_1 t + \dot{C}_2 \sin \lambda_1 t = 0, \quad (4.212)$$

матимемо:

$$\dot{q} = e^{-nt} [-n(C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t) + \lambda_1 (-C_1 \sin \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_1 t)]. \quad (4.213)$$

У результаті диференціювання виразу (4.213) знайдемо:

$$\ddot{q} = e^{-nt} [(n^2 - \lambda_1^2)(C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t) - 2n\lambda_1(-C_1 \sin \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_1 t) + \lambda_1(-\dot{C}_1 \sin \lambda_1 t + \dot{C}_2 \cos \lambda_1 t)]. \quad (4.214)$$

Підставляючи значення (4.211), (4.213) і (4.214) величин q, \dot{q}, \ddot{q} в рівняння (4.209), отримуємо:

$$-\dot{C}_1 \sin \lambda_1 t + \dot{C}_2 \cos \lambda_1 t = \frac{e^{-nt}}{a\lambda_1} S(t). \quad (4.215)$$

Розв'язуючи рівняння (4.212) і (4.215) відносно \dot{C}_1 та \dot{C}_2 , маємо:

$$\dot{C}_1 = -\frac{e^{-nt}}{a\lambda_1} S(t) \sin \lambda_1 t; \quad (4.216)$$

$$\dot{C}_2 = \frac{e^{-nt}}{a\lambda_1} S(t) \cos \lambda_1 t. \quad (4.217)$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$C_1 = -\frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{-n\tau} S(\tau) \sin \lambda_1 \tau d\tau + \bar{C}_1; \quad (4.218)$$

$$C_2 = \frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{-n\tau} S(\tau) \cos \lambda_1 \tau d\tau + \bar{C}_2, \quad (4.219)$$

де \bar{C}_1 і \bar{C}_2 – нові довільні сталі інтегрування,

τ – змінна інтегрування у квадратурах, що взята у границях від 0 до t .

Підставляючи значення C_1 і C_2 в (4.209), знаходимо:

$$q = e^{-nt} (\bar{C}_1 \cos \lambda_1 t + \bar{C}_2 \sin \lambda_1 t) + \frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} S(\tau) \sin \lambda_1 (t-\tau) d\tau. \quad (4.220)$$

Якщо в системі відсутній опір, то формула (4.220) має вигляд:

$$q = (\bar{C}_1 \cos \lambda t + \bar{C}_2 \sin \lambda t) + \frac{1}{a\lambda} \int_0^t S(\tau) \sin \lambda(t - \tau) d\tau. \quad (4.221)$$

Довільні сталі \bar{C}_1 і \bar{C}_2 в цій формулі мають бути визначені за початковими умовами: коли $t = 0$, то $q = q_0$ і $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Диференціюючи вираз (4.221) за часом, маємо:

$$\dot{q} = -\lambda \bar{C}_1 \sin \lambda t + \lambda \bar{C}_2 \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda a} \int_0^t S(\tau) \cos \lambda(t - \tau) d\tau. \quad (4.222)$$

Припускаючи, що $t = 0$ у виразах (4.221) і (4.222), отримаємо:

$$\bar{C}_1 = q_0; \quad \lambda \bar{C}_2 = \dot{q}_0. \quad (4.223)$$

У результаті підстановки \bar{C}_1 і \bar{C}_2 в формулу (4.221), дістанемо:

$$q = q_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda a} \int_0^t S(\tau) \sin \lambda(t - \tau) d\tau. \quad (4.224)$$

Останній член у цій формулі характеризує коливання системи під дією збурювальних сил, а перші два члена формули дають власні коливання, що залежать від початкового положення системи та її початкових швидкостей.

4.6.13. Випадок періодичної сили. Явище резонансу

Випадок періодичної знакозмінної з часом сили часто зустрічається в інженерній практиці.

Розглянемо випадок, коли опір відсутній, а збурювальна сила змінюється за періодичним гармонічним законом $S(t) = S_0 \sin \omega t$. Рівняння Лагранжа для цього випадку запишеться так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = S_0 \sin \omega t. \quad (4.225)$$

Звідси, рівняння відрізняється від рівняння власного коливання тільки правою частиною. Тому скористаємось раніше отриманим рівнянням коливання і запишемо його у формі:

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = \frac{1}{a} S_o \sin \omega t; \quad (4.226)$$

де ω – частота змушених коливань.

Позначимо $k = \frac{S_o}{a}$.

Тоді диференціальне рівняння (4.226) набуде вигляду:

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = k \sin \omega t. \quad (4.227)$$

Загальний інтеграл рівняння (4.227):

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + \frac{k}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (4.228)$$

Для визначення довільних сталих C_1 і C_2 маємо початкові умови:

$$\text{коли } t = 0: , \text{ то } q_o = 0, \dot{q}_o = 0. \quad (4.229)$$

Підставляючи початкові умови (4.229), знайдемо:

$$C_1 = -\frac{k\omega}{\lambda^2 - \omega^2}; \quad C_2 = 0. \quad (4.230)$$

Звідси, рівняння коливального руху системи:

$$q = -\frac{k\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda t + \frac{k}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (4.231)$$

Якщо $\lambda = \omega$, то амплітуда змушених коливань швидко зростає і тоді настає явище резонансу.

Тепер зупинимось на питанні щодо коефіцієнту динамічності. Ігноруючи вільні коливання, отримуємо усталений стан змушених коливань.

$$q = \frac{S_o}{c} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}} \sin \omega t. \quad (4.232)$$

У виразі (4.232) множник $\frac{S_o}{c}$ являє собою переміщення, що викликає максимальне амплітудне значення збурювальної сили S_o , якщо вона прикладена статично, а множник $\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}}$ виражає

динамічну дію цієї сили. Абсолютну величину цього множника називають коефіцієнтом динамічності. Коефіцієнт динамічності залежить тільки від співвідношення $\frac{\omega}{\lambda}$, що утворюється шляхом ділення частоти збурювальної сили на частоту вільних коливань системи.

На рис. 4.56 показано зміну коефіцієнта динамічності залежно від співвідношення $\frac{\omega}{\lambda}$.

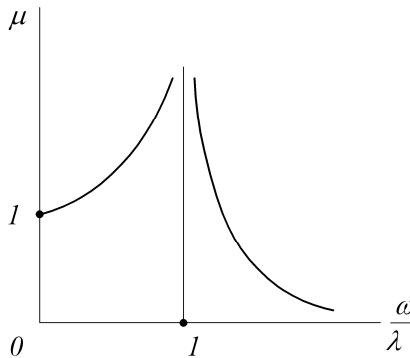


Рис. 4.56

4.6.14. Коливання балки, навантаженої однією масою

Розглянемо вільні коливання балки AB з однією зосередженою масою m (рис. 4.57). Дослідимо власні коливання цієї

системи, нехтуючи малою масою балки порівняно з масою вантажу. Для складання диференціального рівняння власних коливань балки скористаємось методом Лагранжа у другій формі. За узагальнене переміщення $q = y$ виберемо прогин балки у місці розміщення зосередженої маси m вагою P . Система має один ступінь вільності.

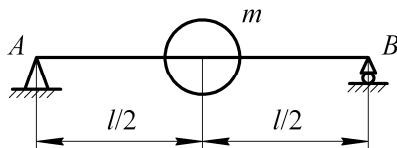


Рис. 4.57

Рівняння Лагранжа для цього випадку:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0. \quad (4.233)$$

Кінетична енергія дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2. \quad (4.234)$$

Потенціальна енергія балки:

$$\Pi = \frac{1}{2} c y^2, \quad (4.235)$$

де c – коефіцієнт жорсткості балки AB на згин.

З курсу опору матеріалів відомо, що жорсткість балки AB виражається формулою:

$$c = \frac{48EI}{l^3}, \quad (4.236)$$

де I – момент інерції перетину балки відносно головної осі. Підставляючи вирази похідних кінетичної і потенціальної енергії в рівняння Лагранжа (4.233), отримуємо:

$$m\ddot{y} + cy = 0. \quad (4.237)$$

Звідки колова частота власних коливань балки:

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (4.238)$$

У результаті підстановки значень c і m маємо:

$$\lambda = \sqrt{\frac{q}{\delta_{cm}}}, \quad (4.239)$$

де $\delta_{cm} = \frac{Pl^3}{48EI}$ – статичний прогин балки в місці прикладання вантажу P .

Період власних коливань балки визначається за формулою:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{cm}}{q}}. \quad (4.240)$$

Кількість власних коливань балки за хвилину визначається за формулою Гейгера:

$$N = \frac{300}{\sqrt{\delta_{cm}}}, \quad (4.241)$$

де величину δ_{cm} слід брати в сантиметрах.

4.6.15. Власні крутильні коливання вала з одним диском

Нехай маємо циліндричний вал, верхній кінець якого жорстко закріплений. На вільний кінець вала насаджено диск із моментом інерції відносно вертикальної осі I .

Якщо диск разом із валом закрутити на деякий кут θ , а потім відпустити, то система отримає вільний крутильний коливальний рух відносно вертикальної осі (рис. 4.58).

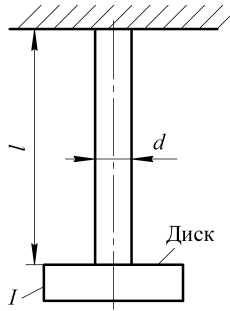


Рис. 4.58

Диференціальне рівняння руху у формі Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0, \quad (4.242)$$

де θ – кут повороту диска.

Кінетична енергія диска дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad (4.243)$$

де I – момент інерції маси диска відносно осі вала.

Потенціальна енергія кручення вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k \theta^2, \quad (4.244)$$

де k – коефіцієнт жорсткості системи.

Коефіцієнт жорсткості системи визначається за формулою:

$$k = \frac{GI_p}{l}, \quad (4.245)$$

де I_p – полярний момент інерції перетину вала.

Підставляючи вирази похідних від T і Π у рівняння Лагранжа (31.2.90), отримуємо:

$$I\ddot{\theta} + k\theta = 0. \quad (4.246)$$

Для кратності запису позначимо:

$$p^2 = \frac{k}{I}. \quad (4.247)$$

Тоді рівняння (4.246) набуде вигляду:

$$\ddot{\theta} + p^2\theta = 0. \quad (4.248)$$

Розв'язком цього рівняння буде вираз:

$$\theta = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt. \quad (4.249)$$

Довільні сталі C_1 та C_2 визначаються з початкових умов,

$$\text{коли } t = 0, \text{ то } \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0. \quad (4.250)$$

Використовуючи умови (4.250), знаходимо:

$$C_2 = 0; C_1 = \theta_0.$$

Підставляючи в вираз (4.249) замість C_1 та C_2 їх значення, маємо:

$$\theta = \theta_0 \cos pt. \quad (4.251)$$

Таким чином, наша система здійснюватиме гармонічні коливання з частотою p :

$$p = \sqrt{\frac{k}{I}}. \quad (4.252)$$

4.6.16. Змушені коливання вала з одним диском

Нехай на диск діє змінний періодичний крутний момент $\mu_0 \sin \varphi t$, тоді система здійснюватиме змушені крутильні коливання (рис. 4.59).

Диференціальне рівняння Лагранжа у другій формі:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \mu_o \sin \varphi t. \quad (4.253)$$

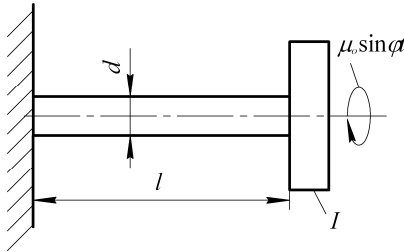


Рис. 4.59

Якщо підставити вирази похідних T і Π в рівняння Лагранжа (4.253), знайдемо:

$$I\ddot{\theta} + k\theta = \mu_o \sin \varphi t, \quad (4.254)$$

де φ – частота змушених крутильних коливань вала.

Беручи до уваги позначення (4.247), рівняння (4.254) набуде вигляду:

$$\ddot{\theta} + p^2\theta = \eta \sin \varphi t, \quad (4.255)$$

де $\eta = \frac{\mu_o}{I}$.

Інтеграл диференціального рівняння (4.255) запишеться у формі:

$$\theta = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{\eta}{p^2 - \varphi^2} \sin \varphi t. \quad (4.256)$$

Слід зазначити, що два перших члени цього виразу характеризують власні крутильні коливання системи, а останній член – змушені крутильні коливання.

Раніше було зазначено, що власні коливання швидко згасають, а змушені залишаються.

З виразу (4.256) видно, що амплітуда змушених коливань залежить від власної частоти p і кутової частоти збурювального моменту φ .

Якщо ці частоти є кратними одна одній, то може наступити явище резонансу.

Приклад 4.28

Циліндрична гвинтова пружина (рис. 4.60) на вільному кінці має вантаж вагою $Q = 100 \text{ Н}$.

Середній діаметр витка пружини $D=10 \text{ см}$, діаметр дроту пружини $d=1 \text{ см}$ і кількість витків пружини $n=10$. Модуль зсуву для сталі дорівнює $G=0,8 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$.

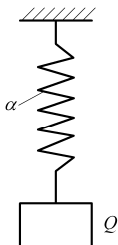


Рис. 4.60

Визначимо осідання пружини за формулою:

$$f_{cm} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^6 \cdot 1,0^4} = 1 \text{ см.}$$

Частота власних коливань вантажу:

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{1}} = 31,3 \text{ с}^{-1}.$$

Період власних коливань дорівнює:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{f_{cm}}{g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 1,12 \text{ с.}$$

Тепер обчислимо власну частоту вантажу, враховуючи вплив маси пружини. Повна вага пружини буде:

$$Q_o = \pi D n \frac{\pi d^2}{4} \gamma,$$

де $\gamma = 0,0785 \text{ Н/см}^3$ – об'ємна вага сталі.

Підставляючи в цю формулу значення числових даних, знайдемо:

$$Q_o = \pi \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 0,0785 = 19,4 \text{ Н.}$$

Для визначення власної частоти вантажу Q , враховуючи вплив маси пружини, необхідно додати до вантажу одну третину ваги пружини, тобто $\frac{1}{3}Q_o = 6,4 \text{ Н.}$

Тоді осідання пружини дорівнює:

$$f_{1cm} = \frac{8 \cdot 106,4 \cdot 10^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^6 \cdot 1^4} = 1,06 \text{ см.}$$

Частота власних коливань вантажу, враховуючи масу пружини, буде:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{981}{1,06}} = 30,4 \text{ с}^{-1}.$$

Приклад 4.29

Вантаж вагою $Q = 100 \text{ Н}$ підвішений до пружини (рис. 4.60), статичне видовження якої $f_{cm} = 1 \text{ см.}$

Яку амплітуду змушених коливань викличе періодична збурювальна сила $S_o \sin \omega t$, якщо її амплітуда $S_o = 10 \text{ Н}$, кругова частота $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

Амплітуда змушених коливань дорівнює:

$$q_o = \frac{S_o}{m(\lambda^2 - \omega^2)},$$

де $m = \frac{Q}{g}$ – маса вантажу.

Підставимо величини і отримаємо амплітуду коливань:

$$q_0 = \frac{gS_0}{Q(\lambda^2 - \omega^2)} = \frac{981 \cdot 10}{100(31,3^2 - 20^2)} = 0,17 \text{ см.}$$

Приклад 4.30

Визначити власну частоту і період вертикальних коливань колісного екіпажа, якщо прогин ресор від його ваги з повним навантаженням становить $f_{cm} = 10$ см.

При цьому допускаємо, що екіпаж здійснює тільки вертикальні коливання (рис. 4.61). У цьому випадку екіпаж має один ступінь вільності.

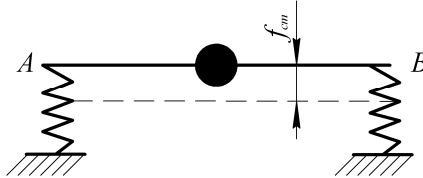


Рис. 4.61

Частота власних коливань екіпажа:

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{10}} = 9,9 \text{ с}^{-1}.$$

Період власних коливань автомобіля:

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14}{9,9} = 0,64 \text{ с.}$$

Приклад 4.31

На балці довжиною $l=4$ м, що вільно розміщена на двох опорах, посередині прикладений вантаж P вагою 20 кН (рис. 4.57). Балка має двотавровий перетин №24а, для якого момент інерції $I_x = 3800 \text{ см}^4$.

Визначити частоту власних коливань балки. Вагою балки знехтувати.

Прогин δ_{cm} балки під вантажем дорівнює:

$$\delta_{cm} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{20000 \cdot 400^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 3800} = 0,35 \text{ см.}$$

Частота власних коливань визначається за формулою:

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{0,35}} = 79 \text{ с}^{-1}.$$

Приклад 4.32

Визначити власну частоту крутильних коливань одномасової системи (рис. 4.62), якщо діаметр суцільного диска $D = 0,3$ м, вага 100 Н, діаметр вала $d = 10$ мм і довжина вала $l = 1,0$ м.

Матеріал диска – сталь. Модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^6$ Н/см².

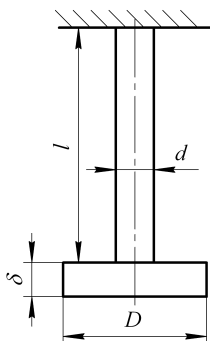


Рис. 4.62

Момент інерції маси диска відносно центральної осі дорівнює:

$$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{100 \cdot 15^2}{981 \cdot 2} = 11,5 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Полярний момент інерції перетину вала:

$$I_p = \frac{3,14 \cdot 1^4}{32} = 0,1 \text{ см}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала на кручення

$$k = \frac{G \cdot I_p}{l} = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{100} = 8000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Власна частота визначається за формулою (2.100)

$$p = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{8000}{11,5}} = 26,3 \text{ с}^{-1}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вид має диференціальне рівняння власних коливань?
2. Від яких параметрів залежить частота власних коливань системи?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння власних коливань, враховуючи згасання?
4. Який вигляд має диференціальне рівняння змушених коливань системи з одним ступенем вільності?
5. За яких умов виникає явище резонансу?
6. Як визначають коефіцієнт динамічності?
7. За якою формулою визначають максимальне значення амплітуди змушених коливань?
8. За яким законом змінюється амплітуда змушених коливань системи у випадку резонансу?
9. Написати диференціальне рівняння резонансних коливань системи.

4.6.17. Диференціальні рівняння власних коливань із двома ступенями вільності

Допустимо, що консервативна система має два ступеня вільності – це дуже важливий випадок для інженерної практики. Узагальнені координати системи позначимо через q_1 і q_2 . Дослідимо коливання системи в околі її положення рівноваги, яке вважається стійким.

Будемо вважати, що в рівноважному положенні узагальнені координати $q_1 = 0$ і $q_2 = 0$.

Рівняння Лагранжа для системи з двома ступенями вільності:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0; \quad (4.257)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0. \quad (4.258)$$

Нехай всі в'язі системи будуть голономними і стаціонарними, а сили, що діють на систему, мають потенціал.

Тоді кінетичну і потенціальну енергію системи запишемо за формулами:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2)$$

Підставивши в рівняння Лагранжа (4.257) і (4.258) значення похідних T і Π , отримаємо диференціальні рівняння вільних коливань системи з двома ступенями вільності в такому вигляді:

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0;$$

$$a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0.$$

На основі властивостей визначеності і додатності квадратичних форм T і Π визначаємо, що інерційні коефіцієнти і

коефіцієнти жорсткості мають задовольняти умови:

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0; a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0;$$
$$c_{11} > 0, c_{22} > 0; c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Крім того, має місце властивість:

$$a_{12} = a_{21} \text{ і } c_{12} = c_{21}.$$

Як приклад системи з двома ступенями вільності розглянемо випадок, що показано на рис. 4.63.

Уявимо вантаж P_1 , підвішений до нерухомої точки O на гвинтовій пружині. Послідовно за допомогою другої пружини підвішений вантаж P_2 .

Позначимо маси вантажів через m_1 і m_2 ; масами пружин нехтуємо.

Складемо диференціальні рівняння коливання системи.

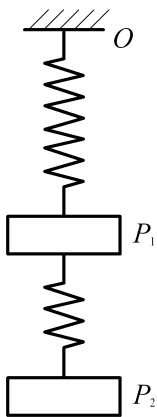


Рис. 4.63

Кінетична і потенціальна енергії дорівнюють, відповідно:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2; \quad (4.259)$$

$$П = \frac{1}{2}c_1q_1^2 + \frac{1}{2}c_2(q_2 - q_1)^2, \quad (4.260)$$

де c_1 і c_2 – коефіцієнти жорсткості пружин.

Підставляючи вирази (4.259) і (4.260) в рівняння Лагранжа (4.257) і (4.258), маємо:

$$m_1\ddot{q}_1 + c_1q_1 - c_2(q_2 - q_1) = 0; \quad (4.261)$$

$$m_2\ddot{q}_2 + c_2(q_2 - q_1) = 0. \quad (4.262)$$

Введемо позначення:

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = a, \quad \frac{c_2}{m_1} = b, \quad \frac{c_2}{m_2} = c. \quad (4.263)$$

Тоді диференціальні рівняння (4.261), і (4.262) набувають вигляду:

$$\ddot{q}_1 + aq_1 - bq_2 = 0; \quad (4.264)$$

$$\ddot{q}_2 - cq_1 + cq_2 = 0. \quad (4.265)$$

Частинний розв'язок системи (4.264) і (4.265) приймаємо у вигляді:

$$q_1 = A \sin(\lambda t + \alpha); \quad (4.266)$$

$$q_2 = B \sin(\lambda t + \alpha), \quad (4.267)$$

де α – початкова фаза коливань.

У результаті підстановки розв'язків (4.266) і (4.267) в систему рівнянь (4.264) і (4.265) маємо:

$$A(a - \lambda^2) - Bb = 0; \quad (4.268)$$

$$-Ac + B(c - \lambda^2) = 0. \quad (4.269)$$

Визначник системи (4.268), (4.269) дає рівняння:

$$\lambda^4 - (a + c)\lambda^2 + c(a - b) = 0. \quad (4.270)$$

Це квадратне рівняння відносно λ^2 називається частотним рівнянням системи.

Корні квадратного рівняння (4.270):

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)}. \quad (4.271)$$

Неважко помітити, що підкореневий вираз, який входить у (4.271), завжди додатний, тому обидва кореня λ_1^2 і λ_2^2 дійсні. З позначень (4.263) видно, що рівність $(a-b)$ додатна, звідси значення кореня в (4.271) завжди менше, ніж $\frac{1}{2}(a+c)$, тому обидва корені додатні.

Звідси, обидва корені завжди дійсні та додатні, і у цьому разі отримуємо дві частоти λ_1 і λ_2 .

4.6.18. Коефіцієнти розподілу

Позначимо відношення узагальнених координат, що дорівнює відношенню амплітуд коливань, літерою μ :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{B}{A} = \mu. \quad (4.272)$$

Тоді частинний розв'язок системи набуде вигляду:

$$\begin{aligned} q_1 &= A \sin(\lambda t + \alpha); \\ q_2 &= \mu A \sin(\lambda t + \alpha). \end{aligned} \quad (4.273)$$

Підставивши значення q_1 і q_2 , а також їх похідні в систему диференціальних рівнянь (4.264), (4.265), отримаємо:

$$-\lambda^2 + a - b\mu = 0; \quad (4.274)$$

$$-\mu\lambda^2 - c + \mu c = 0. \quad (4.275)$$

Виключаючи з системи (4.274) і (4.275) відношення узагальнених координат μ , отримуємо наступне рівняння:

$$\lambda^4 - (a + c)\lambda^2 + (a - b)c = 0. \quad (4.276)$$

Це рівняння (4.276) називається рівнянням частот. Корні цього рівняння λ_1^2 і λ_2^2 визначають частоти власних коливань системи λ_1 і λ_2 . Обидва ці корені будуть додатними, оскільки в протилежному випадку λ_1 і λ_2 будуть уявними або комплексними числами.

У випадку уявних або комплексних коренів λ_1 і λ_2 прийнятий нами частинний розв'язок диференціальних рівнянь (4.264) і (4.265), виражений через тригонометричні функції уявного або комплексного аргументу, дав би необмежене зростання координат q_1 і q_2 , але цього не може бути за малих коливань системи.

Колівання, що відповідають частотам λ_1 і λ_2 , називаються головними коліваннями.

У теорії коливань прийнято меншу із частот λ_1 називати ***основною частотою***. Основна частота коливань відіграє важливу роль у техніці.

4.6.19. Форми головних коливань

Якщо відомі частоти λ_1 і λ_2 , то з системи (4.274) і (4.275) знаходимо два значення μ , що відповідають кожному з головних коливань:

$$\mu_1 = \frac{a - \lambda_1^2}{b}; \quad (4.277)$$

$$\mu_2 = \frac{c}{c - \lambda_2^2}. \quad (4.278)$$

Звідси, величини μ_1 і μ_2 являють собою відношення амплітуд в кожному з головних коливань системи.

Величини μ_1 і μ_2 характеризують форми головних коливань і називаються коефіцієнтами розподілу.

З формул (4.277) і (4.278) видно, що форми головних коливань системи не залежать від початкових умов.

Введемо позначення узагальнених координат і амплітуд, що відповідають першому головному коливанню, через $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$, $A^{(1)}$ і $B^{(1)}$.

Візьмемо відношення узагальнених координат і амплітуд коливань:

$$\mu_1 = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \frac{B^{(1)}}{A^{(1)}},$$

звідки отримуємо:

$$B^{(1)} = A^{(1)}\mu_1. \quad (4.289)$$

Рівняння, що визначає перше головне коливання:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1); \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1), \end{aligned} \quad (4.290)$$

де α_1 – початкова фаза, що відповідає частоті λ_1 .

За аналогією запишемо для другого головного коливання:

$$\frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}} = \frac{B^{(2)}}{A^{(2)}} = \mu_2,$$

звідки маємо:

$$B^{(2)} = \mu_2 A^{(2)}. \quad (4.291)$$

Рівняння, що визначають друге головне коливання:

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= A^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2); \\ q_2^{(2)} &= \mu_2 A^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (4.292)$$

де α_2 – початкова фаза, що відповідає частоті λ_2 .

Загальний розв'язок системи (4.264), (4.265) отримаємо, додаючи частинні розв'язки:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + A^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2); \quad (4.293)$$

$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \mu_1 A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2). \quad (4.294)$$

Довільні сталі $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, α_1 і α_2 визначаються з початкових умов:

$$\text{якщо } t=0, \text{ то } q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}, \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \dot{q}_2 = \dot{q}_{20} \quad (4.295)$$

Із загального розв'язку (4.293) і (4.294) видно, що підсумковий рух системи є складним рухом, який утворюється в результаті накладання одне на одне головних коливань різноманітних частот λ_1 і λ_2 .

4.6.20. Явище биття

Нехай головні частоти λ_1 і λ_2 вільних коливань системи з двома ступенями вільності дуже мало відрізняються одна від одної.

$$\lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1. \quad (4.296)$$

Далі в загальному розв'язку системи рівнянь (4.293) і (4.294) різниця аргументів синусів:

$$\varphi = (\lambda_2 - \lambda_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (4.297)$$

якщо $t=0$, то $\varphi_{(0)} = \alpha_2 - \alpha_1$.

Таким чином, зі зростанням часу t ця різниця через мализну $\lambda_2 - \lambda_1$ збільшується досить повільно, тому маємо:

$$\lambda_2 t + \alpha_2 = \lambda_1 t + \alpha_1 + \varphi. \quad (4.298)$$

Підставивши вираз (4.298) у загальний розв'язок диференціальних рівнянь (4.293), (4.294), отримаємо:

$$q_1 = A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + A^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1 + \varphi). \quad (4.299)$$

На основі формул тригонометрії другий синус можна записати:

$$A^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1 + \varphi) = A^{(2)} [\sin(\lambda_1 t + \alpha_1) \cos \varphi + \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) \sin \varphi]. \quad (4.300)$$

Тоді рівняння (4.299) набуде такого вигляду:

$$q_1 = (A^{(1)} + A^{(2)} \cos \varphi) \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + A^{(2)} \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) \sin \varphi. \quad (4.301)$$

За аналогією приймаємо:

$$q_2 = (\mu_1 A^{(1)} + \mu_2 A^{(2)} \cos \varphi) \sin(\lambda_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A^{(2)} \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) \sin \varphi. \quad (4.302)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} A^{(1)} + A^{(2)} &= c_1 \cos \theta_1; & A^{(2)} \sin \varphi &= c_1 \sin \theta_1; \\ \mu_1 A^{(1)} + \mu_2 A^{(2)} \cos \varphi &= c_2 \cos \theta_2; & \mu_2 A^{(2)} \sin \varphi &= c_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (4.300) і (4.302) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_1 \sin(\lambda_1 t + \alpha_1 + \theta_1); \\ q_2 &= c_2 \sin(\lambda_1 t + \alpha_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (4.303)$$

У цих рівняннях C_1 , C_2 , θ_1 , θ_2 виражаються формулами:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{A^{(1)2} + A^{(2)2} + 2A^{(1)}A^{(2)} \cos \varphi}; \\ C_2 &= \sqrt{\mu_1^2 A^{(1)2} + \mu_2^2 A^{(2)2} + 2\mu_1 \mu_2 A^{(1)}A^{(2)} \cos \varphi}; \\ \theta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{A^{(2)} \sin \varphi}{A^{(1)} + A^{(2)} \cos \varphi}; \\ \theta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{\mu_2 A^{(2)} \sin \varphi}{\mu_1 A^{(1)} + \mu_2 A^{(2)} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.304)$$

Слід зазначити, що у вирази (4.304) входить кут φ , який з часом змінюється повільно, тому власні коливання (4.303) не будуть гармонічними.

Зазначимо, що амплітуди цих коливань C_1 і C_2 за повільною зміною $\cos \varphi$ від -1 до $+1$ змінюються в таких межах:

амплітуда C_1 : від $(A^{(1)} - A^{(2)})$ до $(A^{(1)} + A^{(2)})$;

амплітуда C_2 : від $(\mu_1 A^{(1)} - \mu_2 A^{(2)})$ до $(\mu_1 A^{(1)} + \mu_2 A^{(2)})$.

Таким чином, якщо коефіцієнти μ_1 і μ_2 мають різні знаки, то максимуму C_1 відповідає мінімум C_2 і навпаки.

Тому у випадку, коли частоти λ_1 і λ_2 головних коливань близькі одна до одної, з часом відбувається періодична зміна

амплітуд, тобто, за підсиленням першого головного коливання інтенсивність другого головного коливання зменшується і навпаки.

Це явище, що виникає в процесі коливань системи, називається *биттям*.

4.6.21. Головні координати. Рівняння руху в головних координатах

Головними або нормальними координатами системи називають узагальнені координати, що обираються таким чином, щоб вираз кінетичної енергії містив тільки квадрати узагальнених швидкостей, а вираз потенціальної енергії – тільки квадрати узагальнених координат. Якщо позначити головні координати системи через θ_1 і θ_2 , то кінетичну і потенціальну енергії запишемо так:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a_1\dot{\theta}_1^2 + a_2\dot{\theta}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2}(c_1\theta_1^2 + c_2\theta_2^2), \end{aligned} \quad (4.305)$$

де a_1 , a_2 , c_1 і c_2 – моменти інерції і коефіцієнти жорсткості.

Рівняння Лагранжа дають два незалежних диференціальних рівняння руху системи:

$$a_1\ddot{\theta}_1 + c_1\theta_1 = 0; \quad (4.306)$$

$$a_2\ddot{\theta}_2 + c_2\theta_2 = 0. \quad (4.307)$$

Загальним розв'язком системи (4.306), (4.307) буде:

$$\theta_1 = C_1 \sin(\lambda_1 t + \alpha_1); \quad (4.308)$$

$$\theta_2 = C_2 \sin(\lambda_2 t + \alpha_2). \quad (4.309)$$

Частоти вільних коливань λ_1 і λ_2 у головних координатах виражаються формулами:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c_1}{a_1}}; \lambda_2 = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}}. \quad (4.310)$$

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , α_1 і α_2 визначаються з початкових умов,

$$\text{якщо } t = 0, \text{ то } \theta_1 = \theta_{10}, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_{10}, \theta_2 = \theta_{20}, \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_{20}. \quad (4.311)$$

З рівнянь (4.308), (4.309) випливає, що кожна головна координата θ_1 і θ_2 змінюється за гармонічним законом із частотами, що відповідають частотам головних коливань системи.

4.6.22. Випадок рівних частот

Раніше ми досліджували випадки власних коливань системи, коли частоти головних коливань були різні. Розглянемо випадок рівності головних частот. Нехай θ_1 і θ_2 будуть головними координатами, тоді частоти головних коливань λ_1 і λ_2 запишуться формулами:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c_1}{a_1}}; \lambda_2 = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}}. \quad (4.312)$$

Якщо ці частоти рівні, то отримуємо:

$$\sqrt{\frac{c_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}} = k. \quad (4.313)$$

Звідси, обидві координати змінюються за гармонічним законом з однаковою частотою k :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= C_1 \sin(kt + \alpha_1); \\ \theta_2 &= C_2 \sin(kt + \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.314)$$

Можна показати, що і довільно вибрані узагальнені координати системи q_1 і q_2 змінюються за таким самим законом. Це питання розбирається в більш повних курсах теорії коливань.

4.6.23. Власні коливання з урахуванням лінійного опору

Досліджуємо випадок, коли на систему з двома ступенями вільності крім консервативних сил діють сили опору, пропорційні швидкості. Нехай θ_1 і θ_2 будуть головними координатами системи. Тоді вирази для кінетичної і потенціальної енергії системи будуть:

$$T = \frac{1}{2} (a_1 \dot{\theta}_1^2 + a_2 \dot{\theta}_2^2) \quad (4.315)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 \theta_1^2 + c_2 \theta_2^2) \quad (4.316)$$

Вираз для дисипативної функції через головні координати θ_1 і θ_2 буде:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\theta}_1^2 + 2h \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2^2) \quad (4.317)$$

З виразу (4.317) видно, що дисипативна функція є однорідною квадратичною формою узагальнених швидкостей $\dot{\theta}_1$ і $\dot{\theta}_2$ зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Лагранжа другого роду для системи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{\theta}_1}; \quad (4.318)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{\theta}_2}. \quad (4.319)$$

Підставивши значення похідних від T , Π і \mathcal{C} до системи (4.318), (4.319), отримаємо диференціальні рівняння руху системи:

$$a_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 + h \dot{\theta}_2 + c_1 \theta_1 = 0; \quad (4.320)$$

$$a_2 \ddot{\theta}_2 + h_1 \dot{\theta}_1 + b_2 \dot{\theta}_2 + c_2 \theta_2 = 0. \quad (4.321)$$

Таким чином, ми отримали систему спільних диференціальних рівнянь другого порядку.

Частинний розв'язок системи (4.320), (4.321) шукаємо у виразі:

$$\theta_1 = c_1 e^{rt}; \theta_2 = c_2 e^{rt}. \quad (4.322)$$

Підставивши ці вирази в систему диференціальних рівнянь (4.320), (4.321), маємо:

$$(a_1 r^2 + b_1 r + c_1) c_1 + c_2 h r = 0; \quad (4.323)$$

$$h r c_1 + c_2 (a_2 r^2 + b_2 r + c_2) = 0. \quad (4.324)$$

Для того, щоб система (4.323), (4.324) мала відмінні від нуля розв'язки, її визначник має бути рівним нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 r^2 + b_1 r + c_1 & h r \\ h r & a_2 r^2 + b_2 r + c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.325)$$

У результаті розкриття визначника отримаємо характеристичне рівняння:

$$a_1 a_2 r^4 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) r^3 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - h^2) r^2 + (c_1 b_2 + b_1 c_2) r + c_1 c_2 = 0. \quad (4.326)$$

Зазначимо, що T , Π і Φ є додатно-визначеними квадратичними формами, тому їх коефіцієнти задовольняють нерівності:

$$a_1 > 0; a_2 > 0; c_1 > 0; c_2 > 0; b_1 > 0; b_1 b_2 - h^2 > 0. \quad (4.327)$$

Таким чином, всі коефіцієнти характеристичного рівняння (4.326) додатні.

Звідси рух системи відбувається з постійною витратою енергії на подолання опорів руху, тому коливання системи будуть згасаючими.

У цьому можна переконатись, виконавши дослідження коренів характеристичного рівняння (4.326).

Для цього необхідно встановити, що дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні.

Відомо, що необхідні і достатні умови від'ємності дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння даються критерієм Гурвіца.

Щоб всі корені характеристичного рівняння (4.326) за $c_1, c_2 > 0$ мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори визначника були додатними:

$$\Delta_1 = a_1 b_2 + a_2 b_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 \\ (c_1 b_2 + b_1 c_2) & (a_2 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - h^2) \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 & 0 \\ (c_1 b_2 + b_1 c_2) & (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - h^2) & (a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ 0 & c_1 c_2 & (c_1 b_2 + b_1 c_2) \end{vmatrix} > 0; \quad (4.328)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} (a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 & 0 \\ (c_1 b_2 + b_1 c_2) & (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - h^2) & (a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ 0 & c_1 c_2 & (c_1 b_2 + c_2 b_1) \end{vmatrix} > 0.$$

4.6.24. Демпфер коливань (гасник коливань)

Нехай дана балка AB на жорстких опорах. На балці встановлено електродвигун, причому маса ротора не збалансована. Тому під час обертання ротора виникає відцентрова сила F . Вертикальна складова її, що дорівнює $F \sin \omega t$, (збурювальна сила) буде викликати коливання системи. Амплітуда змушених коливань балки залежатиме від різниці частот власних коливань і збурювальної сили. В деяких випадках вдається значно зменшити амплітуду змушених коливань, якщо до основної системи додати додатковий спеціальний пристрій – гасник коливань (рис. 4.64). Таким пристроєм може слугувати пружина, жорстко скріплена з балкою і навантажена на кінці масою m_2 . При цьому допускаємо, що приєднана маса з пружиною настільки малі, що змінити частоту вільних коливань системи в значній мірі не можуть. Значимо, що роль додаткової маси полягає не в безпосередній зміні частоти коливань всієї системи, а в локалізації сили, що збурює коливання.

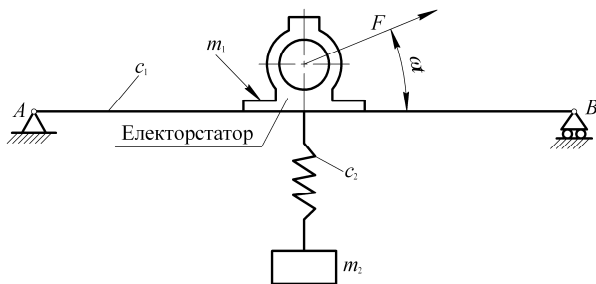


Рис. 4.64

Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (4.329)$$

де m_1 – маса електродвигуна;

m_2 – маса додаткового пристрою;

y_1 – переміщення центра ваги електродвигуна;

y_2 – переміщення центра ваги вантажу додаткового пристрою.

Потенціальна енергія системи дорівнює:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 y_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (y_2 - y_1)^2, \quad (4.330)$$

де c_1 – коефіцієнт жорсткості балки; c_2 – коефіцієнт жорсткості пружини.

Рівняння Лагранжа в цьому випадку мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = F \sin \omega t; \quad (4.331)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 0. \quad (4.332)$$

Підставивши вирази похідних кінетичної і потенціальної енергії в рівняння Лагранжа, отримаємо рівняння руху:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) = F \sin \omega t; \quad (4.333)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) = 0. \quad (4.334)$$

Частинний розв'язок системи (4.333), (4.334) шукаємо у виразі:

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin \omega t; \\ y_2 &= B \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.335)$$

Якщо підставити ці вирази в систему (4.333), (4.334), знайдемо:

$$-m_1 A \omega^2 + c_1 A - c_2 (B - A) = F; \quad (4.336)$$

$$-m_2 B \omega^2 + c_2 (B - A) = 0. \quad (4.337)$$

Розв'язуючи систему (4.336), (4.337) відносно A і B маємо:

$$A = \frac{(c_2 - m_2 \omega^2) F}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}; \quad (4.338)$$

$$B = \frac{c_2 F}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \quad (4.339)$$

Виключивши з рівнянь (4.335) сталі A і B , отримаємо:

$$y_1 = \frac{F(c_2 - m_2 \omega^2) \sin \omega t}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}; \quad (4.340)$$

$$y_2 = \frac{c_2 F \sin \omega t}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \quad (4.341)$$

Тепер з'ясуємо, за яких умов амплітуда коливання основної системи буде згасати. З виразу (4.340) випливає, що амплітуда перетворюється на нуль у тому випадку, коли має місце рівність:

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0. \quad (4.342)$$

З виразу (4.342) знаходимо співвідношення між коефіцієнтом жорсткості пружини пристрою і масою його вантажу:

$$\omega^2 = \frac{c_2}{m_2}. \quad (4.343)$$

Підставивши значення ω^2 у рівняння (4.341), отримаємо переміщення маси вантажу додаткового пристрою:

$$y_2 = -\frac{1}{c_2} F \sin \omega t. \quad (4.344)$$

З цього виразу випливає, що напрям переміщення маси вантажу додаткового пристрою прямо протилежний напрямку збудовувальної сили, а деформація пружини пропорційна величині збудовувальної сили і обернена за напрямом:

$$y_2 c_2 = -F \sin \omega t. \quad (4.345)$$

На основі формул (4.344), (4.345) можна підібрати такі розміри додаткового пристрою, що коливання основної системи значно зменшуються.

4.6.25. Змушені коливання системи з двома ступенями вільності

Розглянемо змушені коливання системи з двома ступенями вільності під дією гармонічної збудовувальної сили $S_0 \sin \omega t$. Рівноважне положення системи будемо вважати стійким, тобто, $q_1 = 0$ і $q_2 = 0$.

Запишемо рівняння руху системи за Лагранжем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = S_0 \sin \omega t; \quad (4.346)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0. \quad (4.347)$$

Як приклад подібної системи знову розглянемо дві маси m_1 і m_2 (рис. 4.65).

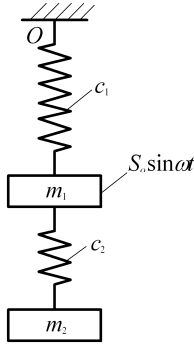


Рис. 4.65

Допустимо, що крім пружних сил пружин є збурювальна сила $S_o \sin \omega t$, прикладена до маси m_1 .

Підставляючи похідні кінетичної (31.3.3) і потенціальної енергії (31.3.4) в рівняння Лагранжа (4.346), (4.347), маємо:

$$m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) = S_o \sin \omega t; \quad (4.348)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) = 0. \quad (4.349)$$

Введемо позначення:

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = a; \quad \frac{c_2}{m_1} = b; \quad \frac{c_2}{m_2} = c; \quad \frac{S_o}{m_1} = P_o. \quad (4.350)$$

Тоді система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\ddot{q}_1 + a q_1 - b q_2 = P_o \sin \omega t; \quad (4.351)$$

$$\ddot{q}_2 - c q_1 + c q_2 = 0. \quad (4.352)$$

Частинний розв'язок системи (4.351), (4.352) шукаємо у виразі:

$$q_1 = C \sin \omega t; \quad (4.353)$$

$$q_2 = D \sin \omega t. \quad (4.354)$$

Підставимо функції (4.353), (4.354) в систему (4.351), (4.352), знайдемо:

$$(a - \omega^2)c - bD = P_0; \quad (4.355)$$

$$-cC + (c - \omega^2)D = 0. \quad (4.356)$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо для C і D значення:

$$C = \frac{(c - \omega^2)P_0}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}; \quad (4.357)$$

$$D = \frac{P_0 c}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}. \quad (4.358)$$

Слід зазначити, що вирази (4.353), (4.354) являють собою гармонічне коливання обох мас із частотою ω збурювальної сили.

Із виразів (4.357), (4.358) видно, що амплітуди C і D залежать від зведеної амплітуди P_0 збурювальної сили і від частоти ω .

4.6.26. Коливання вала з вільними кінцями

Допустимо, що на кінцях вала насаджено два диски з моментами інерції I_1 і I_2 (рис. 4.66). Потрібно визначити частоту власних коливань заданої системи, якщо відома крутильна жорсткість вала.

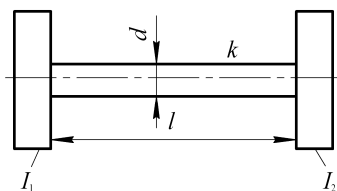


Рис. 4.66

Якщо до кінців вала прикласти дві рівні і протилежно направлені крутильні пари сил, а потім їх раптово видалити, то виникнуть крутильні коливання, в процесі яких кінцеві диски весь час будуть повертатися у протилежних напрямках.

Отже є деякий проміжний перетин вала, який в процесі коливань залишається нерухомим.

Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2, \quad (4.359)$$

де θ_1 і θ_2 – кути повороту дисків відносно рівноважного положення системи.

Потенціальна енергія вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2, \quad (4.360)$$

де k – коефіцієнт крутильної жорсткості вала.

Диференціальні рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0; \quad (4.361)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0. \quad (4.362)$$

Підставляючи похідні від T і Π в рівняння Лагранжа (4.361), (4.362), маємо диференціальні рівняння крутильних коливань мас:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0; \quad (4.363)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (4.364)$$

Розв'язок рівнянь (4.363), (4.364) шукаємо за формою:

$$\theta_1 = A \cos pt; \quad (4.365)$$

$$\theta_2 = B \cos pt. \quad (4.366)$$

У результаті підстановки значень θ_1 і θ_2 та їх похідних у систему рівнянь (4.363), (4.364) отримаємо:

$$(I_1 p^2 - k)A + Bk = 0; \quad (4.367)$$

$$(I_2 p^2 - k)B + Ak = 0. \quad (4.368)$$

Складемо визначник системи (4.367), (4.368), прирівняємо його до нуля і отримаємо частотне рівняння:

$$p^4 - p^2 \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) k = 0. \quad (4.369)$$

Розв'язуючи рівняння частот (4.369), визначаємо частоту власних крутильних коливань системи:

$$p = \sqrt{k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}. \quad (4.370)$$

4.6.27. Коливання вала з двома дисками і жорстко закріпленим кінцем

На валу циліндричної форми насаджено два диски (рис. 4.67), один кінець вала жорстко закріплений, другий – вільний. Коефіцієнти крутильної жорсткості ділянок вала k_1 і k_2 , відповідно. Моменти інерції дисків I_1 і I_2 . Дана система має два ступені вільності. За узагальнені координати системи приймемо кути повороту дисків θ_1 і θ_2 . Визначимо частоти власних коливань вала з дисками.

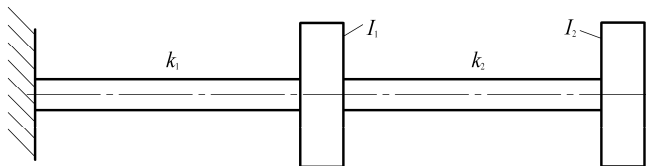


Рис. 4.67

Кінетична енергія дисків:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2. \quad (4.371)$$

Потенціальна енергія вала:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (4.372)$$

Підставляючи значення похідних від T і Π в рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо диференціальні рівняння крутильних коливань:

$$I_1\ddot{\theta}_1 - k_1\theta_1 - k_2(\theta_2 - \theta_1) = 0; \quad (4.373)$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + k_2(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (4.374)$$

Частинний розв'язок цієї системи оберемо таким:

$$\theta_1 = A \cos pt; \quad (4.375)$$

$$\theta_2 = B \cos pt. \quad (4.376)$$

У результаті підстановки значень θ_1 і θ_2 та їх похідних в систему рівнянь (4.373), (4.374) маємо:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - I_1p^2)A - k_2B &= 0; \\ (k_2 - I_2p^2) - k_2A &= 0. \end{aligned}$$

Складемо визначник цієї системи і прирівняємо його до нуля, звідки отримуємо частотне рівняння:

$$p^4 - \left(\frac{k_1}{I_1} + \frac{k_2}{I_1} + \frac{k_2}{I_2} \right) p^2 + \frac{k_1k_2}{I_1I_2} = 0. \quad (4.377)$$

Частота коливань визначиться за формулою:

$$p = \sqrt{\frac{\bar{c}}{2} \pm \sqrt{\frac{\bar{c}^2}{4} - \beta}}, \quad (4.378)$$

де $\bar{c} = \frac{k_1}{I_1} + \frac{k_2}{I_1} + \frac{k_2}{I_2}$; $\beta = \frac{k_1 k_2}{I_1 I_2}$.

Система буде мати дві частоти вільних коливань.

На закінчення розглянемо частинний випадок, коли $I_1 = I_2 = I$ та $k_1 = k_2 = k$.

Тоді частотне рівняння набуде вигляду:

$$p^4 - 3\frac{k}{I}p^2 + \frac{k^2}{I^2} = 0, \quad (4.379)$$

Звідки знаходимо частоти крутильних коливань:

$$p_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{I}} = 0,62\sqrt{\frac{k}{I}}; \quad (4.380)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{I}} = 1,62\sqrt{\frac{k}{I}}. \quad (4.381)$$

Обчислимо коефіцієнти розподілу:

$$\mu_1 = \frac{2k - p_1^2 I}{k} = 2 - 0,62^2 = 1,62; \quad (4.382)$$

$$\mu_2 = \frac{2k - p_2^2 I}{k} = 2 - 1,62^2 = -0,62. \quad (4.383)$$

За коефіцієнтами розподілу можна побудувати графік форм головних коливань вала (рис. 4.68).

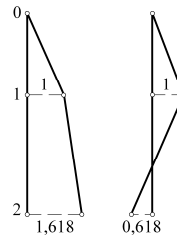


Рис. 4.68

4.6.28. Коливання вала з трьома дисками і вільними кінцями

На вал насаджено три диски, моменти інерції яких відносно осі обертання I_1, I_2, I_3 (рис. 4.69).

У процесі коливання кожен диск відхиляється від положення рівноваги на кут повороту θ_1, θ_2 і θ_3 (рад). Коефіцієнти крутильної жорсткості ділянок вала k_1 і k_2 .

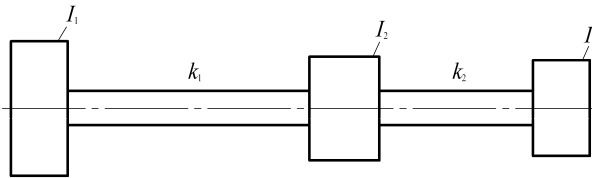


Рис.4.69

Кінетична енергія дисків, що обертаються під час коливань:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2. \quad (4.384)$$

Потенціальна енергія вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_3 - \theta_2)^2. \quad (4.385)$$

Диференціальні рівняння Лагранжа другого роду для цього випадку:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0; \quad (4.386)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0; \quad (4.387)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3} = 0. \quad (4.388)$$

Підставимо значення похідних від T і P в рівняння Лагранжа другого роду, отримуючи систему диференціальних рівнянь:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 - k_1(\theta_2 - \theta_1) = 0; \quad (4.389)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) - k_2(\theta_3 - \theta_2) = 0; \quad (4.390)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3 - \theta_2) = 0. \quad (4.391)$$

Розв'язок системи (4.389) – (4.391) шукаємо у формі:

$$\theta_1 = A \cos pt; \quad (4.392)$$

$$\theta_2 = B \cos pt; \quad (4.393)$$

$$\theta_3 = C \cos pt. \quad (4.394)$$

Підставимо вирази для θ_1 , θ_2 і θ_3 і їх похідні в систему (4.389) – (4.391):

$$(-I_1 p^2 + k_1)A - k_1 B = 0; \quad (4.395)$$

$$(-I_2 p^2 + k_1 + k_2)B - k_1 A - k_2 C = 0; \quad (4.396)$$

$$(-I_3 p^2 + k_2)C - k_2 B = 0. \quad (4.397)$$

Складемо визначник системи рівнянь (4.395) – (4.397) і прирівняємо його до нуля. Розкривши визначник, дістанемо частотне рівняння:

$$p^4 - \left(\frac{k_1}{I_2} + \frac{k_2}{I_2} + \frac{k_2}{I_3} + \frac{k_1}{I_1} \right) p^2 + k_1 k_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} = 0. \quad (4.398)$$

Розв'язуючи це біквдратичне рівняння, знайдемо частоти крутильних коливань p_1 і p_2 .

4.6.29. Власні коливання зі скінченним числом ступенів вільності

Розглянемо загальний випадок коливань вала з багатьма дисками, моменти інерції яких відносно осі обертання I_1, I_2, I_3, \dots . Коефіцієнти крутильної жорсткості ділянок валів k_1, k_2, k_3, \dots . Кути повороту перетинів вала в місцях розміщення дисків позначимо $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$.

Кінетична енергія мас, що обертаються під час коливань:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 + \dots \quad (4.399)$$

Потенціальна енергія вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (\theta_4 - \theta_3)^2 + \dots \quad (4.400)$$

Підставляючи вирази похідних кінетичної і потенціальної енергії в рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - k_1 (\theta_1 - \theta_2) + k_2 (\theta_2 - \theta_3) &= 0; \\ I_3 \ddot{\theta}_3 - k_2 (\theta_2 - \theta_3) + k_3 (\theta_3 - \theta_4) &= 0; \\ &\dots \dots \dots \quad (4.401) \\ I_{n-1} \ddot{\theta}_{n-1} - k_{n-2} (\theta_{n-2} - \theta_{n-1}) + k_{n-1} (\theta_{n-1} - \theta_n) &= 0; \\ I_n \ddot{\theta}_n - k_{n-1} (\theta_{n-1} - \theta_n) &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язок системи (4.401) шукаємо у вигляді:

$$\theta_1 = A \cos pt; \theta_2 = A_2 \cos pt; \theta_3 = A_3 \cos pt; \dots \quad (4.402)$$

Положення системи визначається двома координатами y_1 і y_2 , тому вона має два ступені вільності.

Будемо розглядати вантажі P_1 і P_2 як матеріальні точки і складемо диференціальні рівняння руху цих точкових мас. Відповідні диференціальні рівняння матимуть вигляд:

$$m_1 \ddot{y}_1 = P_1 - F_1; \quad (4.404)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = P_2 - F_2, \quad (4.405)$$

де F_1 і F_2 – відновлювальні сили пружності балки в місцях прикладання сили ваги вантажів P_1 і P_2 .

З курсу опору матеріалів відомо, що прогини під вантажами P_1 і P_2 виражаються такими формулами:

$$f_1 = \frac{1}{486EI} (8P_1 + 3P_2) l^3; \quad (4.406)$$

$$f_2 = \frac{1}{486EI} (3P_1 + 8P_2) l^3. \quad (4.407)$$

Розв'язуємо ці рівняння відносно P_1 і P_2 :

$$P_1 = c(8f_1 - 3f_2); \quad (4.408)$$

$$P_2 = c(8f_2 - 3f_1), \quad (4.409)$$

$$\text{де } c = \frac{486EI}{l^3}.$$

У рівноважному стані балки вагою P_1 і P_2 зрівноважуються відновлювальними силами F_1 і F_2 ; тому можна записати:

$$F_1 = c(8f_1 - 3f_2); \quad (4.410)$$

$$F_2 = c(8f_2 - 3f_1). \quad (4.411)$$

Користуючись цими формулами, можна знайти значення відновлювальних сил і в будь-якому іншому стані системи:

$$F_1 = c[8(f_1 + y_1) - 3(f_2 + y_2)]; \quad (4.412)$$

$$F_2 = c[8(f_2 + y_2) - 3(f_1 + y_1)] \quad (4.413)$$

Підставимо значення F_1 і F_2 у вихідні диференціальні рівняння:

$$m_1 \ddot{y}_1 = P_1 - c(8f_1 - 3f_2) - c(8y_1 - y_2); \quad (4.414)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = P_2 - c(8f_2 - 3f_1) - c(8y_2 - 3y_1). \quad (4.415)$$

Виключаємо з цих рівнянь P_1 і P_2 :

$$m_1 \ddot{y}_1 + c(8y_1 - 3y_2) = 0; \quad (4.416)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c(8y_2 - 3y_1) = 0. \quad (4.417)$$

Розв'язок цієї системи шукаємо у формі:

$$y_1 = A \sin(\lambda t + \alpha); \quad (4.418)$$

$$y_2 = B \sin(\lambda t + \alpha). \quad (4.419)$$

Підставмо значення y_1 і y_2 і їх другі похідні в систему рівнянь (4.416) і (4.417):

$$\left(\frac{8c}{m_1} - \lambda^2 \right) A - \frac{3c}{m_1} B = 0; \quad (4.420)$$

$$-\frac{3c}{m_2} A + \left(\frac{8c}{m_2} - \lambda^2 \right) B = 0. \quad (4.421)$$

Складемо визначник системи рівнянь і прирівняємо його до нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{8c}{m_1} - \lambda^2 & -\frac{3c}{m_1} \\ -\frac{3c}{m_2} & \frac{8c}{m_2} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.422)$$

У підсумку розкриття визначника дістанемо:

$$\left(\frac{8c}{m_1} - \lambda^2\right)\left(\frac{8c}{m_2} - \lambda^2\right) - \frac{9c^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (4.423)$$

Після деяких перетворень виразу (4.423) отримаємо частотне рівняння:

$$\lambda^4 - 8c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\lambda^2 + \frac{55c^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (4.424)$$

Корені цього біквadratного рівняння:

$$\lambda_{1,2}^2 = 4c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left[4c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\right]^2 - \frac{55c^2}{m_1 m_2}}. \quad (4.425)$$

Звідси отримаємо дві частоти головних коливань.

Частоти головних коливань λ_1 і λ_2 називаються власними частотами балки.

Розглянемо частинний випадок, якщо $m_2 = \frac{m_1}{3}$.

У цьому випадку рівняння частот (4.424) матиме вигляд:

$$\lambda^4 - 32\frac{c}{m_1} + 165\frac{c^2}{m_1^2} = 0. \quad (4.426)$$

Корені частотного рівняння (4.426):

$$\lambda_1^2 = 6,460\frac{c}{m_1}; \quad \lambda_2^2 = 25,540\frac{c}{m_1}, \quad (4.427)$$

знаходимо дві головні частоти власних коливань відносно положення статичної рівноваги:

$$\lambda_1 = 2,542 \frac{c}{m_1}; \quad \lambda_2 = 5,050 \frac{c}{m_1}. \quad (4.428)$$

Тоді два головних коливання можна представити формулами:

$$\begin{aligned} y_1 &= A^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1); \\ y_2 &= A^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \alpha_1); \\ y_1 &= B^{(1)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2); \\ y_2 &= B^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.429)$$

З системи рівнянь (4.420), (4.421) визначимо коефіцієнти розподілу:

$$\mu_1 = \frac{3 \frac{c}{m_1} - \lambda_1^2}{3 \frac{c}{m_1}}; \quad \mu_2 = \frac{8 \frac{c}{m_1} - \lambda_2^2}{3 \frac{c}{m_1}}.$$

Підставляючи в ці формули значення λ_1^2 і λ_2^2 , отримаємо:

$$\mu_1 = \frac{8 \frac{c}{m_1} - 6,460 \frac{c}{m_1}}{3 \frac{c}{m_1}} = 0,520; \quad \mu_2 = \frac{8 \frac{c}{m_1} - 25,540 \frac{c}{m_1}}{3 \frac{c}{m_1}} = -5,840. \quad (4.430)$$

На рис. 4.71 показано головні форми коливань балки.

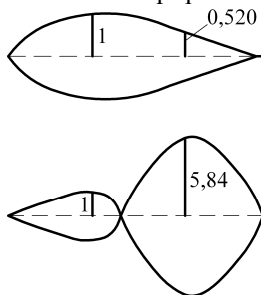


Рис. 4.71

4.6.31. Коливання колісного екіпажа

Коливання колісного екіпажа, як системи з багатьма ступенями вільності, дуже складні. Положення такої системи в процесі коливань характеризуються сімома координатами.

Ця задача може бути спрощена, якщо розглянути, як основні, тільки поздовжні коливання.

Така система має два ступені вільності, її положення під час коливання визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра мас системи і кутом повороту θ відносно поперечної осі (рис. 4.36).

Координати y і θ будемо відраховувати від положення статичної рівноваги.

Вважаючи деформації шин малими порівняно з ресорами, можна записати вирази для кінетичної і потенціальної енергій:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (4.431)$$

$$П = c_n(y + a\theta)^2 + c_s(y - b\theta)^2, \quad (4.432)$$

де m – маса кузова; c_n і c_s – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор;

r – радіус інерції кузова відносно поперечної осі, що проходить через його центр мас.

Рівняння Лагранжа другого роду для цього випадку:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial П}{\partial y} = 0; \quad (4.433)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial П}{\partial \theta} = 0. \quad (4.434)$$

Підставляючи в рівняння Лагранжа (4.433), (4.434) похідні від кінетичної і потенціальної енергій за відповідними узагальненими координатами і швидкостями, отримаємо диференціальні рівняння коливання колісного екіпажа:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2c_n(y + a\theta) + 2c_3(y - b\theta) = 0; \quad (4.435)$$

$$mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2c_n a(y + a\theta) - 2c_3 b(y - b\theta) = 0. \quad (4.436)$$

Частинний розв'язок системи (4.435), (4.436) шукаємо у формі:

$$y = A \sin pt; \quad (4.437)$$

$$\theta = B \sin pt. \quad (4.438)$$

Після підстановки значень (4.437), (4.438) і їх похідних:

$$(-mp^2 + 2c_n + 2c_3)A + (2c_n a - 2c_3 b)B = 0; \quad (4.439)$$

$$(2c_n a - 2c_3 b)A + (-mr^2 p^2 + 2c_n a^2 + 2c_3 b^2)B = 0. \quad (4.440)$$

Для отримання нетривіального розв'язку необхідно прирівняти нулю визначник, складений із коефіцієнтів до A і B :

$$\begin{vmatrix} -mp^2 + 2c_n + 2c_3 & 2c_n a - 2c_3 b \\ 2c_n a - 2c_3 b & -mr^2 p^2 + 2c_n a^2 + 2c_3 b^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.441)$$

Розкриваючи визначник, отримаємо частотне рівняння другого степеня відносно p^2 :

$$p^4 - \frac{2}{mr^2} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)]p^2 + 4 \frac{c_n c_3}{m^2 r^2} (a + b)^2 = 0. \quad (4.442)$$

Для квадрата частоти дістанемо два дійсні і додатні результати:

$$p_1^2 = \frac{1}{mr^2} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)] - \sqrt{\frac{1}{m^2 r^4} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)]^2 - 4 \frac{c_n c_3}{m^2 r^2} (a + b)^2}. \quad (4.443)$$

$$p_2^2 = \frac{1}{mr^2} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)] + \sqrt{\frac{1}{m^2r^4} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)]^2 - 4 \frac{c_n c_3}{m^2 r^2} (a + b)^2}. \quad (4.444)$$

Визначимо із виразів (4.443), (4.444) дві власні частоти:

$$p_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{mr^2} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)] -}{-\sqrt{\frac{1}{m^2r^4} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)]^2 - 4 \frac{c_n c_3}{m^2 r^2} (a + b)^2}}}. \quad (4.445)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{mr^2} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)] +}{+\sqrt{\frac{1}{m^2r^4} [c_n(a^2 + r^2) + c_3(b^2 + r^2)]^2 - 4 \frac{c_n c_3}{m^2 r^2} (a + b)^2}}}. \quad (4.446)$$

Таким чином, коливальний процес колісного екіпажа виявляється двочастотним.

Знаючи частоти, можна знайти головні форми коливань подібного екіпажа.

Для цієї мети із рівняння (4.439) необхідно скласти відношення амплітуд:

$$\mu_1 = \frac{B^{(1)}}{A^{(1)}} = \frac{mp_1^2 - 2c_n - 2c_3}{2c_n a - 2c_3 b};$$

$$\mu_2 = \frac{B^{(2)}}{A^{(2)}} = \frac{mp_2^2 - 2c_n - 2c_3}{2c_n a - 2c_3 b}.$$

Приклад 4.33

Визначити власні частоти і форми головних коливань системи, схема якої представлена на рис. 4.72. Припускаємо, що маси вантажів і коефіцієнти жорсткості пружин рівні, відповідно $m_1 = m_2$; $c_1 = c_2$.

За формулами (4.263) маємо:

$$a = 2 \frac{c_1}{m_1}; \quad b = \frac{c_1}{m_1}; \quad c = \frac{c_1}{m_1}.$$

Далі за рівнянням (4.271) отримаємо

$$\lambda_1^2 = 0,382 \frac{c_1}{m_1}; \quad \lambda_2^2 = 2,618 \frac{c_1}{m_1}.$$

Частоти власних коливань системи дорівнюють:

$$\lambda_1 = 0,618 \sqrt{\frac{m_1}{c_1}}; \quad \lambda_2 = 1,620 \sqrt{\frac{m_1}{c_1}},$$

де $\sqrt{\frac{m_1}{c_1}}$ – частота власних коливань маси m_1 на пружині за відсутності другої пружини і другої маси.

Для визначення форм головних коливань скористаємось формулою (4.277). На рис. 4.73 показано форми головних коливань.

$$\mu_1 = \frac{2 \frac{c_1}{m_1} - 0,382 \frac{c_1}{m_1}}{\frac{c_1}{m_1}} = -1,618;$$

$$\mu_2 = \frac{2 \frac{c_1}{m_1} - 2,618 \frac{c_1}{m_1}}{\frac{c_1}{m_1}} = -0,618.$$

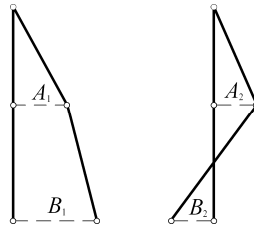


Рис. 4.73

Приклад 4.34

Визначити власну частоту крутильних коливань двомасової системи (рис. 4.74), якщо діаметри дисків $D_1=30$ см і $D_2=25$ см; товщина дисків $\delta_1=20$ мм і $\delta_2=15$ мм; діаметр вала $d=15$ мм; довжина вала $l=1,0$ м. Матеріал дисків і вала – сталь із об'ємною масою $\gamma = 7,8$ г/см³. Модуль зсуву для сталі $G = 8 \cdot 10^6$ Н/см².

Моменти інерції мас дисків відносно центральної осі:

$$I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} = \gamma \frac{\pi R_1^4}{2} \delta_1 = \frac{0,0078 \cdot 3,14 \cdot 15^4}{2} \cdot 2 = 1239,0 \text{ кг} \cdot \text{см}^2;$$

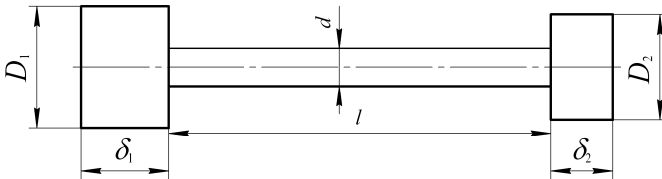


Рис. 4.74

$$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \gamma \frac{\pi R_2^4}{2} \delta_2 = \frac{0,0078 \cdot 3,14 \cdot 12,5^4}{2} \cdot 1,5 = 448,0 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Полярний момент інерції перетину вала:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 1,5^4}{32} = 0,498 \text{ см}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала на кручення:

$$k = \frac{GI_p}{l} = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 0,498}{100} = 39850 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Власну частоту крутильних коливань визначають за формулою (4.370):

$$p = \sqrt{k \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{39850 \cdot \frac{1239 + 448}{1239 \cdot 448}} = 21,2 \text{ с}^{-1}.$$

Приклад 4.35

Визначити власні частоти коливань колісного екіпажу (рис. 4.36) з масою $m = 1600$ кг, радіусом інерції кузова відносно поперечної осі, що проходить через його центр мас $r = 122,5$ см, коефіцієнтами жорсткості шин передніх і задніх коліс $2C_n = 484$ Н/см; $2C_3 = 370$ Н/см, лінійні розміри $a = 131$ см; $b = 139$ см.

Рівняння частот (4.442) набуде вигляду:

$$p^4 - 117,8p^2 + 3400 = 0.$$

У підсумку розв'язку цього рівняння отримаємо величини частот:

$$p_1 = 7,11 \text{ с}^{-1}; p_2 = 8,20 \text{ с}^{-1}.$$

Приклад 4.36

Визначити власну частоту крутильних коливань системи трьох суцільних дисків, з'єднаних невагомими валами (рис. 4.75). Маса дисків $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 75$ кг, $m_3 = 50$ кг, діаметри дисків $D_1 = 30$ см, $D_2 = 25$ см і $D_3 = 20$ см.

Довжина ділянок вала $l_1 = 30$ см, $l_2 = 50$ см. Діаметр вала $d = 2$ см.

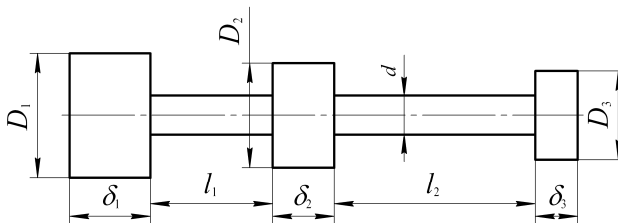


Рис. 4.75

Моменти інерції дисків відносно центральної осі:

$$I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} = \frac{100 \cdot 15^2}{2} = 11250 \text{ кг} \cdot \text{см}^2;$$

$$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{75 \cdot 12,5^2}{2} = 5860 \text{ кг} \cdot \text{см}^2;$$

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{50 \cdot 10^2}{2} = 2500 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Полярний момент інерції перетину вала дорівнює:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{32} = 1,57 \text{ см}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала на кручення за ділянками:

$$k_1 = \frac{GI_p}{l_1} = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 1,57}{30} = 42 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$k_2 = \frac{GI_p}{l_2} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 1,57}{50} = 25 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Підставимо значення k_1 , k_2 , I_1 , I_2 , I_3 у рівняння (31.3.142):

$$p^4 - 37,4 \cdot 10^4 p^2 + 260 \cdot 10^8 = 0,$$

звідси: $p_1 = 532 \text{ с}^{-1}$; $p_2 = 303 \text{ с}^{-1}$.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вигляд мають диференціальні рівняння власних коливань системи з двома ступенями вільності?
2. Який вигляд має рівняння частот власних коливань системи?
3. Які коливання називаються головними?
4. Яку з частот називають основною частотою?
5. Яке явище називається биттям?
6. Які координати називаються головними?

7. Написати рівняння руху в головних координатах.
8. Написати диференціальні рівняння власних коливань, враховуючи згасання.
9. Яке призначення демпфера коливань?
10. Як визначається частота власних коливань вала з вільними кінцями?

4.6.32. Згинальні коливання і вібрації балок.

Коефіцієнти впливу

Розглянемо вільні коливання балки, на якій розміщено одну масу m_1 (рис. 4.76). Сила інерції маси, що діє на балку під час коливань $-m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$. Переміщення під масою m_1 визначаємо за формулою:

$$y = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{11}, \quad (4.447)$$

де δ_{11} – переміщення точки 1 під дією одиничної сили.

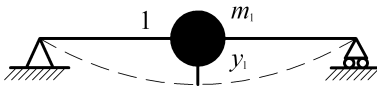


Рис. 4.76

Цей вираз еквівалентний відомому диференціальному рівнянню коливань:

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + c y_1 = 0,$$

$$\text{де } c = -\frac{1}{\delta_{11}}.$$

Далі розглянемо випадок, коли на невагомій балці розміщено дві зосереджені маси m_1 і m_2 в точках 1 і 2 (рис. 4.77).

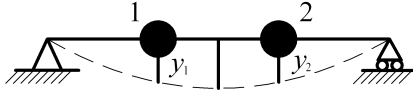


Рис. 4.77

Переміщення y_1 точки 1 складатиметься із переміщення, що викликане силою інерції маси m_1 :

$$-m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{11}$$

і переміщення, викликаного силою інерції маси m_2 :

$$-m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{12},$$

де δ_{12} – переміщення точки 1 під дією одиничної сили, прикладеної в точці 2.

Повне переміщення знайдемо додаванням:

$$y_1 = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{11} - m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{12}. \quad (4.448)$$

Переміщення y_2 точки 2 складатиметься із переміщення, що викликане силою інерції маси m_1 :

$$-m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{21}$$

і переміщення, викликаного силою інерції маси m_2 :

$$-m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta_{22}.$$

Повне переміщення отримаємо додаванням:

$$y_2 = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{21} - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta_{22}. \quad (4.449)$$

Після деяких перетворень отримаємо два спільних диференціальних рівняння вільних коливань балки:

$$\delta_{11}m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \delta_{12}m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_1 = 0; \quad (4.450)$$

$$\delta_{21}m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \delta_{22}m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 = 0. \quad (4.451)$$

Частинний розв'язок системи рівнянь (4.450), (4.451) шукаємо у такому виразі:

$$y_1 = A_1 \sin(\lambda t + \alpha), \quad (4.452)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\lambda t + \alpha). \quad (4.453)$$

Підставляючи похідні виразів (4.452), (4.453) у систему (4.450), (4.451), отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд A_1 і A_2 :

$$(\delta_{11}m_1\lambda^2 - 1)A_1 = \delta_{12}m_2\lambda^2 A_2 = 0; \quad (4.454)$$

$$\delta_{21}m_1\lambda^2 A_1 + (\delta_{22}m_2\lambda^2 - 1)A_2 = 0. \quad (4.455)$$

Для того, щоб ненульові значення A_1 і A_2 задовольняли рівняння (4.454), (4.455), необхідно поставити вимогу перетворення на нуль визначника системи (4.454), (4.455):

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1\lambda^2 - 1 & \delta_{12}m_2\lambda^2 \\ \delta_{21}m_1\lambda^2 & \delta_{22}m_2\lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.456)$$

Розкриємо визначник (4.456):

$$\lambda^4 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \lambda^2 (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0. \quad (4.457)$$

Це рівняння називається рівнянням частот.

Оскільки воно біквдратне, то для λ^2 можна знайти два значення λ_1 і λ_2 .

З системи (4.454), (4.455) видно, що амплітуди A_1 і A_2 пов'язані умовою:

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\delta_{11}m_1\lambda^2 - 1}{\delta_{12}m_2\lambda^2} = -\frac{\delta_{21}m_1\lambda^2}{\delta_{22}m_2\lambda^2 - 1}. \quad (4.458)$$

Слід зазначити, що кожному значенню λ буде відповідати своє відношення амплітуд:

$$\mu_1 = -\frac{\delta_{11}m_1\lambda_1^2 - 1}{\delta_{12}m_2\lambda_1^2}; \quad (4.459)$$

$$\mu_2 = -\frac{\delta_{11}m_1\lambda_2^2 - 1}{\delta_{12}m_2\lambda_2^2}. \quad (4.460)$$

На закінчення розглянемо випадок, коли невагома балка навантажена скінченною кількістю мас m_1, m_2, \dots, m_n .

Сили інерції, що викликаються цими масами, дорівнюють:

$$-m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, \quad -m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2}, \quad \dots, \quad -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2}.$$

Вони є єдиним навантаженням на балку в процесі коливань.

Повні переміщення в розгорнутому вигляді представляються виразами:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{11} - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta_{12} - \dots - m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} \delta_{1n}; \\ y_2 &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{21} - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta_{22} - \dots - m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} \delta_{2n}; \\ &\dots\dots\dots; \\ y_n &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta_{n1} - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta_{n2} - \dots - m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} \delta_{nn}; \end{aligned} \quad (4.461)$$

Частинний інтеграл системи (4.461) приймемо у вигляді:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\Omega_i \mu_k}{EI},$$

де Ω_i – площа епюри μ_i ;

μ_k – ордината на епюрі μ_i , розміщена під центром ваги площі Ω_i .

Для консольної балки площа одиничної епюри дорівнює:

$$\Omega = \frac{l^2}{2}.$$

Ордината, розміщена під центром ваги площі епюри Ω :

$$\mu_k = \frac{2}{3}l.$$

Підставимо знайдені величини до формули Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}.$$

Частота власних коливань консольної балки буде:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}.$$

Підставимо в цю формулу значення δ_{11} :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}.$$

Приклад 4.38

Визначити частоти вільних коливань невагомої балки, на якій рівномірно розміщено дві однакові маси m , як вказано на рис. 4.79.

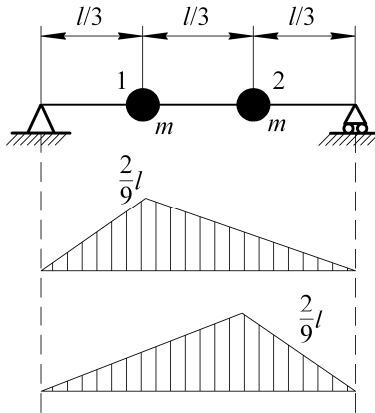


Рис. 4.79

Будуємо епюри згинальних моментів від одиничних сил і обчислюємо значення коефіцієнтів δ_{11} , δ_{12} за формулою Верещагіна.

Площі епюри μ_1 і відповідні ординати під центром ваги площ будуть:

$$\mu_1 = \frac{2}{9}l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{27}; \quad \mu_2 = \frac{2}{9}l \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{1}{2} = \frac{2l^2}{27};$$

$$\mu_{c_1} = \frac{2}{9}l \cdot \frac{\frac{2}{9}l}{\frac{1}{3}l} = \frac{12}{81}l; \quad \mu_{c_2} = \frac{2}{9}l \cdot \frac{\frac{4}{9}l}{\frac{2}{3}l} = \frac{12}{81}l.$$

Тоді за формулою Верещагіна отримаємо:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{27} \cdot \frac{12}{81}l + \frac{2l^2}{27} \cdot \frac{12}{81}l \right) = \frac{4l^3}{243EI}.$$

Площа епюри μ_2 і відповідні ординати під центром ваги площ дорівнюють:

$$\mu_1 = \frac{2}{9}l \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{27}; \quad \mu_2 = \frac{1}{9}l \cdot \frac{l}{3} = \frac{l^2}{27};$$

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_3 &= \frac{1}{9}l \cdot \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{54}; & \bar{\Pi}_4 &= \frac{1}{9}l \cdot \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{54}. \\ \bar{\mu}_{c_1} &= \frac{2}{9}l \cdot \frac{\frac{2}{9}l}{\frac{2}{3}l} = \frac{6l}{81}; & \bar{\mu}_{c_2} &= \frac{2}{9}l \cdot \frac{\frac{4}{9}l}{\frac{2}{3}l} = \frac{12l}{81}; \\ \bar{\mu}_{c_3} &= \frac{2l}{9} \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{2}{3}l} = \frac{l}{6}; & \bar{\mu}_{c_4} &= \frac{2}{9}l \cdot \frac{\frac{2}{3}l}{\frac{1}{3}l} = \frac{12l}{81}.\end{aligned}$$

Підставляючи визначене до формули Верещагіна, отримаємо:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6l^3}{27 \cdot 81} + \frac{12l^3}{27 \cdot 81} + \frac{l^3}{6 \cdot 54} + \frac{12l^3}{54 \cdot 81} \right) = \frac{4l^3}{2916EI}.$$

Рівняння частот (4.457):

$$\lambda^4 \left[\left(\frac{4}{243} \right)^2 - \left(\frac{41}{2916} \right)^2 \right] \frac{m^2 l^6}{(EI)^2} - \lambda^2 \frac{8}{243} \frac{ml^3}{EI} + 1 = 0.$$

Після деяких перетворень частотне рівняння виглядатиме:

$$\left(\frac{ml^3 \lambda^2}{243EI} \right)^2 - \frac{8 \cdot 144}{623} \left(\frac{ml^3 \lambda^2}{243EI} \right) + \frac{144}{623} = 0,$$

звідки маємо:

$$\frac{ml^3 \lambda^2}{243EI} = \frac{4 \cdot 144}{623} \pm \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 144}{623} \right)^2 - \frac{144}{623}}.$$

Звідси квадрати частот:

$$\lambda_1^2 = 31,6 \frac{EI}{ml^3}; \quad \lambda_2^2 = 420 \frac{EI}{ml^3}.$$

Частоти власних коливань невагомої балки:

$$\lambda_1 = 5,64 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad \lambda_2 = 20,60 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Приклад 4.39

Визначити частоти вільних коливань невагомої балки, на котрій рівномірно розміщено три однакові маси m (як на рис. 4.79).

Знайдемо значення коефіцієнтів δ , використовуючи формулу Верещагіна. Пропускаючи проміжні розрахунки, отримуємо:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{75l^3}{9 \cdot 36^2 EI}; \quad \delta_{22} = \frac{243l^3}{9 \cdot 36^2 EI}; \quad \delta_{22} = \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI};$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI}; \quad \delta_{32} = \delta_{23} = \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{51l^3}{9 \cdot 36^2 EI}.$$

Тепер складаємо визначник (4.464):

$$\begin{vmatrix} \frac{75l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 - 1 & \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 & \frac{51l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 \\ \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 & \frac{243l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 - 1 & \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 \\ \frac{51l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 & \frac{117l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 & \frac{75l^3}{9 \cdot 36^2 EI} m\lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо частотне рівняння:

$$77760 \left(\frac{ml^3 \lambda^2}{9 \cdot 36^2 EI} \right)^3 - 12096 \left(\frac{ml^3 \lambda^2}{9 \cdot 36^2 EI} \right)^2 + 393 \frac{ml^3}{9 \cdot 36^2 EI} \lambda^2 - 1 = 0.$$

Це рівняння має три корені:

$$\lambda_1 = 5,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad \lambda_2 = 22,05 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad \lambda_3 = 36,00 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

4.6.33. Вплив розмірів тіла на частоту коливань балки

У випадку значних розмірів тіла на частоту коливань впливає момент сил інерції, що виникає внаслідок переміщення тіла в процесі коливань.

Як приклад розглянемо консольну балку, навантажену диском дуже великих розмірів (рис. 4.80).

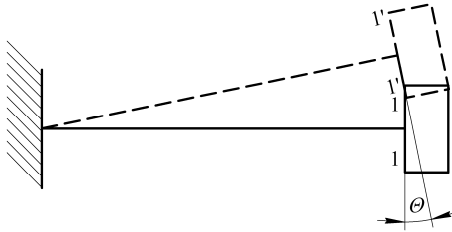


Рис. 4.80

Як наслідок прогинів балки диск провертається на кут Θ , переходячи з положення 1 – 1 в положення 1' – 1'.

Звідси, під час коливання балки диск буде здійснювати обертальний рух, що викличе момент сил інерції – $I\ddot{\theta}$, де I – момент інерції диска відносно осі обертання.

Сила інерції тіла під час коливань:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Для нашого випадку дістанемо систему двох рівнянь із двома невідомими функціями y і θ

$$y = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \delta_{11} - I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta_{12}; \quad (4.465)$$

$$\theta = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \delta_{21} - I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta_{22}, \quad (4.466)$$

де δ_{11} – прогин, що викликається в точці 1 одиничною силою;

δ_{12} – прогин перетину 1', що викликається одиничною силою;

δ_{22} – поворот перетину 1 під дією одиничного моменту.

Шукаємо розв'язок системи (4.465), (4.466) у такому виразі:

$$\begin{aligned}y_1 &= A_1 \sin(\lambda t + \alpha); \\ \theta &= A_2 \sin(\lambda t + \alpha).\end{aligned}\tag{4.467}$$

Підставляємо ці вирази в систему рівнянь (4.465) і (4.466):

$$(1 - m\lambda^2\delta_{11})A_1 - \lambda^2 I\delta_{12}A_2 = 0;\tag{4.468}$$

$$-\lambda^2 m\delta_{21}A_1 + (1 - \lambda^2 I\delta_{22})A_2 = 0.\tag{4.469}$$

Для того, щоб ненульові значення A_1 і A_2 задовольняли рівняння (4.468), (4.469), необхідно поставити вимогу перетворення на нуль визначника системи (4.468) і (4.469):

$$\begin{vmatrix}1 - \lambda^2 m\delta_{11} & -\lambda^2 I\delta_{12} \\ -\lambda^2 m\delta_{21} & 1 - \lambda^2 I\delta_{22}\end{vmatrix} = 0.\tag{4.470}$$

Розкриваючи визначник, отримаємо частотне рівняння:

$$\lambda^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)mI - \lambda^2(\delta_{11}m + \delta_{22}I) + 1 = 0.\tag{4.471}$$

Розв'язуючи це бікватратне рівняння, знайдемо:

$$\lambda^2 = \frac{(\delta_{11}m + \delta_{22}I) \pm \sqrt{(\delta_{11}m + \delta_{22}I)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)mI}}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)mI}.\tag{4.472}$$

Приклад 4.40

Консольна стальна балка (рис. 4.81) діаметром $d = 50$ см із вильотом $l = 1,25$ м несе на кінці тонкий суцільний стальний диск діаметром $D = 1$ м і вагою $Q = 1000$ Н.

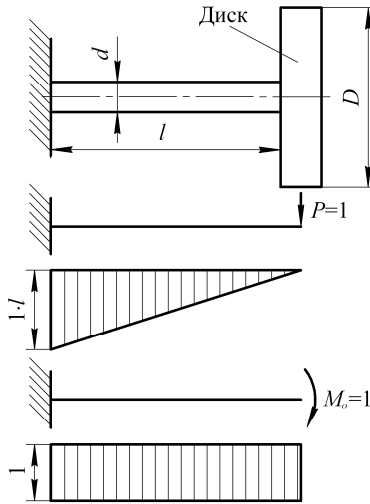


Рис. 4.81

Визначити частоти вільних коливань балки. Модуль пружності для сталі $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$.

Будуємо епюри моментів від одиничної сили і одиничного моменту (рис. 4.81).

Обчислюємо переміщення δ_{11} , δ_{22} , δ_{12} за формулою Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{l}{EI}; \quad \delta_{12} = \frac{l^2}{2EI}.$$

Підставляючи числові величини, знаходимо переміщення:

$$\delta_{11} = \frac{125^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^7 \frac{3,14 \cdot 5^4}{64}} = 108 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta_{22} = \frac{125}{2 \cdot 10^7 \frac{3,14 \cdot 5^4}{64}} = 2 \cdot 10^{-7};$$

$$\delta_{12} = \frac{125^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \frac{3,14 \cdot 5^4}{64}} = 128 \cdot 10^{-7}.$$

Момент інерції тонкого диска відносно осі балки:

$$I = m \frac{r^2}{4} = \frac{1000 \cdot 50^2}{9,81 \cdot 4} = 63700 \text{ кг}\cdot\text{см}^2.$$

Маса диска:

$$m = \frac{1000}{9,81} = 102 \text{ кг}.$$

Після підстановки величин в формулу (4.472) маємо:

$$\lambda_1 = 29 \text{ с}^{-1}; \lambda_2 = 147 \text{ с}^{-1}.$$

Якщо вважати масу диска зосередженою в одній точці і не враховувати впливу інерції повороту, то отримаємо:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{108 \cdot 10^{-5} \cdot 1000}} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, частота коливань балки, навантаженої зосередженою в одній точці масою, виявилась дещо вище частоти балки з урахуванням інерції повороту тіла (диска).

4.6.34. Наближені методи визначення частот коливань балки. Метод Релея

Процеси коливань матеріальної системи можна розглядати як процес перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. Наприклад, для балки запишемо закон збереження енергії в формі:

$$T + \Pi = \text{const}, \quad (4.473)$$

де T – кінетична енергія; Π – потенціальна енергія системи.

З цього закону випливає, що мінімум одного із доданків співпадає за часом з максимумом іншого. Але, оскільки мінімальні значення кінетичної і потенціальної енергії дорівнюють нулю:

$$T_{\min} + \Pi_{\min} = 0, \quad (4.474)$$

то максимальні значення T і Π мають бути рівні між собою:

$$T_{\max} = \Pi_{\max} = \text{const.} \quad (4.475)$$

Візьмемо будь-яку форму коливань, що відповідає одній визначеній частоті λ :

$$y(x, t) = \bar{y}(x) \sin(\lambda t + \alpha). \quad (4.476)$$

Кінетичну енергію визначатимемо за формулою:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx. \quad (4.477)$$

Підставивши $y(x, t)$ у формулу (4.477), маємо:

$$T = \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2(\lambda t + \alpha) \int_0^l m \bar{y}^2(x) dx. \quad (4.478)$$

З виразу (4.478) випливає, що кінетична енергія буде досягати максимуму в ті моменти часу, коли $\cos(\lambda t + \alpha)$ перетворюється на одиницю:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^l m \bar{y}^2(x) dx. \quad (4.479)$$

Потенціальну енергію згину знайдемо за формулою:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (4.480)$$

Порівнюючи вирази (4.479) і (4.480), отримаємо:

$$\lambda^2 \int_0^l m \bar{y}^2(x) dx = \int_0^l \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right) EI dx, \quad (4.481)$$

звідки знаходимо формулу для квадрата частоти:

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right) dx}{\int_0^l m \bar{y}^2(x) dx}, \quad (4.482)$$

де EI – жорсткість балки на згин.

Частота, отримана за методом Релея, завжди вище дійсної. Це пояснюється тим, що, вводячи до розрахунків замість динамічних прогинів статичні, ми накладаємо відомі обмеження на форму кривої прогинів, а це рівнозначно збільшенню жорсткості системи, що, як відомо, призводить до збільшення частоти коливань.

Приклад 4.41

Визначити власну частоту коливань для двоопорної простої балки, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 4.82). Перетин балки прийняти сталим ($EI = \text{const}$).

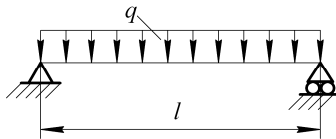


Рис. 4.82

Рівняння статичних прогинів від суцільного рівномірного навантаження буде:

$$\bar{y}(x) = \frac{ql^4}{2EI} \left[\left(\frac{x}{l} \right) - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

Інтегруємо чисельник і знаменник формули (4.481) в межах довжини балки:

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{30} \left(\frac{ql^2}{24EI} \right)^2; \quad \int_0^l \bar{y}^2(x) dx = \frac{31}{630} \left(\frac{ql^4}{24EI} \right)^2.$$

Підставивши ці вирази в формулу (4.481), знайдемо:

$$\lambda^2 = 97,5 \frac{EI}{ml^4}; \Rightarrow \lambda = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

4.6.35. Наближена формула Донкерлі

З формули (4.482) випливає, що обернене значення квадрата частоти дорівнює:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{A}{2\Pi}, \quad (4.483)$$

де Π – потенціальна енергія за амплітудних зміщень;

A – чисельник формули (4.483), рівний $\sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i^2$.

Звідси, формула (4.483) набуде вигляду:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{y}_i^2}{2\Pi}. \quad (4.484)$$

Далі вважатимемо, що значення переміщення \bar{y}_i і потенціальної енергії деформацій Π відповідають дійсній формі коливань системи з приєднаними масами m_1, m_2, \dots, m_n , тоді формула (4.484) дає точне значення частоти коливань системи з багатьма масами.

Запишемо формулу для частоти власних коливань системи, до якої приєднана тільки одна маса

$$\bar{\lambda}_i^2 = \frac{2\Pi}{m_i \bar{y}_i^2}. \quad (4.485)$$

Необхідно відмітити, що величина $\bar{\lambda}_i$ є наближеною, оскільки до формули (4.484) входять значення Π і \bar{y}_i , що відповідають формі коливань за наявності багатьох мас.

Раніше було зазначено, що наближене значення частоти за формулою Релея завжди більше дійсного. Звідси:

$$\bar{\lambda}_i \geq \lambda_{v.}, \quad (4.486)$$

де $\bar{\lambda}_i$ – точне значення частоти коливань системи з масою m_i , що дорівнює:

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{1}{m_i \delta_{ii}}}. \quad (4.487)$$

Тому формулу (4.484) можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\lambda}_i^2}. \quad (4.488)$$

Замінюючи наближені значення частот $\bar{\lambda}_i$ точними, отримаємо замість рівності нерівність:

$$\frac{1}{\lambda^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (4.489)$$

З цієї нерівності випливає, що обернене значення квадрата нижчої частоти власних коливань системи з n масами завжди менше, ніж сума обернених значень квадратів частот коливань кожної з мас.

Нерівність (4.489) можна використовувати для наближеного визначення частоти λ власних коливань системи, що несе декілька мас:

$$\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}}}. \quad (4.490)$$

Це є формула Донкерлі. Вона дає для частоти коливань λ дещо занижене значення.

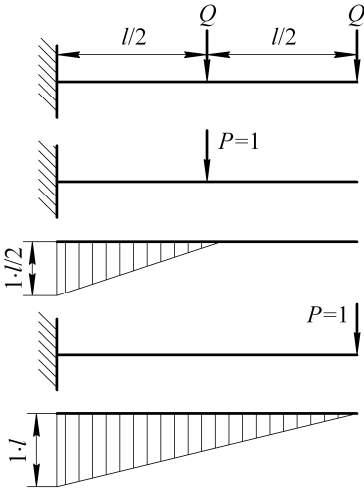


Рис. 4.83

Приклад 4.42

Визначити частоту коливань консольної балки, навантаженої двома силами Q на вільному кінці і посередині (рис. 4.83).

Визначимо коефіцієнти впливу (прогини від одиничних сил у місцях прикладання сил Q). Користуючись відомою формулою Верещагіна, отримаємо:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{24EI}.$$

Обчислимо величини квадратів частот вільних коливань балки, що відповідають роздільним навантаженням балки кожною силою Q окремо за формулою (4.487):

$$\lambda_1^2 = \frac{3EI}{ml^3}; \quad \lambda_2^2 = \frac{24EI}{ml^3}.$$

Підставляючи ці значення частот у формулу Донкерлі (4.490), маємо:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{9}{24} \frac{ml^3}{EI}, \text{ звідки } \lambda = 1,63 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

4.6.36. Параметричні коливання

У багатьох прикладних задачах техніки коливання систем описуються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами вигляду:

$$\ddot{q} + a_1(t)\dot{q} + a_2(t)q = 0. \quad (4.491)$$

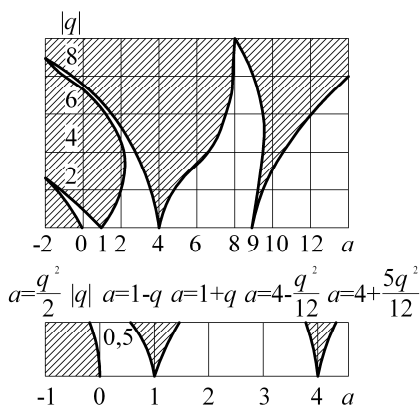


Рис. 4.84

Розглянемо тут частинний випадок таких параметричних коливань, коли коефіцієнти згаданого вище рівняння (4.491) коливань будуть періодичними функціями параметра часу. Якщо змінні коефіцієнти диференціального рівняння (4.491) дорівнюватимуть $a_1 = 0$; $a_2 = a + 2q \cos 2t$, то отримаємо, так зване, рівняння Мат'є:

$$\ddot{y} + (a + 2q \cos 2t)y = 0. \quad (4.492)$$

Залежно від числових значень a і q розв'язок рівняння (4.492) може бути стійким або нестійким. Стійким розв'язкам рівняння Мат'є відповідає положення зображувальної точки на діаграмі Айнса-Стретта в не заштрихованих ділянках (рис. 4.84).

Приклад 4.43

Скласти диференціальне рівняння малих коливань математичного маятника з довжиною, що періодично змінюється (рис. 4.85).

У довільний момент часу довжина нитки маятника змінюється за законом $l = l_0 + l_1 \sin \omega t$.

У цьому випадку для складання диференціального рівняння коливання маятника зручно скористатися теоремою про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d}{dt} [m(l_0 + l_1 \sin \omega t)^2 \dot{\varphi}] = -mg(l_0 + l_1 \sin \omega t) \dot{\varphi}.$$

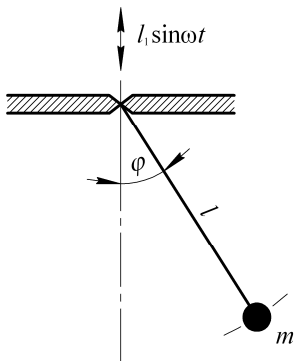


Рис. 4.85

Після диференціювання лівої частини рівності і після деяких перетворень рівняння отримаємо диференціальне рівняння коливань маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Для випадку, коли довжина нитки маятника залишається сталою, дістанемо відоме рівняння:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Приклад 4.44

Скласти диференціальне рівняння коливань маятника масою m , закріпленого на невагомому стрижні довжиною l (рис. 4.86).

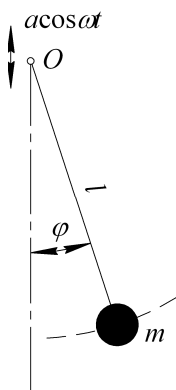


Рис. 4.86

Точка O підвісу маятника здійснює періодичний рух за законом:

$$y = a \cos \omega t.$$

Приєднаємо до сили ваги маятника mg переносну силу інерції $F_e = -m\ddot{y}$, де $y = a \cos \omega t$ – закон руху точки підвісу O , і скористаємось теоремою про зміну моменту кількості руху відносно осі обертання маятника.

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) = -m(g - \ddot{y})l \sin \varphi.$$

Після деяких перетворень ця рівність набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{d\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0.$$

Для того, щоб звести рівняння Мат'є (4.492) до канонічної форми, допустимо, що:

$$\tau = \frac{\omega t}{2}.$$

У підсумку очевидних перетворень отримаємо:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{4q}{\omega^2 l} + 4 \frac{a}{l} \cos 2\tau \right) \varphi = 0. \quad (4.493)$$

Порівнюючи це з рівнянням (4.492) знаходимо:

$$a = 4 \frac{g}{\omega^2 l}; \quad 2q = 4 \frac{a}{l};$$

Залежно від числових параметрів системи малі коливання маятника будуть стійкими або нестійкими.

Приклад 4.45

Стальна балка довжиною l несе на вільному кінці точкову масу m (рис. 4.87). Скласти диференціальне рівняння малих вертикальних коливань маси m , якщо довжина балки змінюється за законом $l = l_0 - l_1 \sin \omega t$. Масою балки знехтувати.

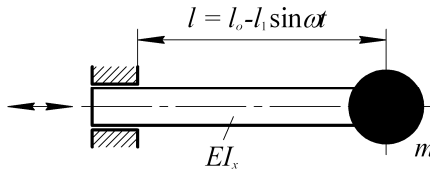


Рис. 4.87

Диференціальне рівняння коливання маси вантажу представимо у вигляді:

$$y = -m\ddot{\delta}_{11}, \text{ де } \delta_{11} = \frac{(l_o + l_1 \sin \omega t)^3}{3EI}.$$

Це рівняння можна записати інакше:

$$m\ddot{y} + \frac{1}{\delta_{11}} y = 0.$$

Обмежуючись лінійною частиною розкладання функції $\frac{1}{\delta_{11}}$ в ряд за степенями l_1 , отримаємо диференціальне рівняння вигляду:

$$\ddot{y} + \frac{3EI_x}{ml_o^3} \left(1 + 3\frac{l_1}{l_o} \sin \omega t \right) y = 0.$$

Це рівняння зручно представити у формі Мат'є:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau) y = 0,$$

де
$$a = 4 \frac{3EI_x}{\omega^2 ml_o^3}; \quad 2q = 4 \frac{3EI_x}{\omega^2 ml_o^3}; \quad \omega t = \frac{\pi}{2} + 2\tau.$$

Розв'язок рівняння Мат'є буде стійким або нестійким залежно від співвідношення коефіцієнтів a і q .

4.6.37. Нелінійні коливання систем

Метод Ляпунова-Пуанкаре. В основі цього методу лежить припущення про те, що система має «слабку» нелінійність. Як приклад розглянемо коливання системи, що описуються рівнянням Дуффінга:

$$\ddot{y} + p_o^2 y + \mu y^3 = 0, \tag{4.494}$$

де μ – малий параметр.

У цьому випадку розв'язок рівняння (4.494) слід шукати у вигляді розкладання за степенями малого параметра μ :

$$y = y_0 + \mu^1 y_1 + \mu^2 y_2 + \dots; \quad (4.495)$$

$$p_0 = p + \mu \bar{c}_1 + \mu^2 \bar{c}_2 + \dots, \quad (4.496)$$

де y_i – невідомі функції;

\bar{c}_i – невідомі сталі числа;

p – невідома частота коливань.

Підставивши (4.495), (4.496) в диференціальне рівняння (4.494) і згрупувавши члени з однаковими степенями μ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + p^2 y_0 + \mu(\dot{y} + p^2 y_1 + \bar{c}_1 y_0 + y_0^3) + \\ + \mu^2(\ddot{y}_2 + p^2 y_2 + \bar{c}_2 y_0 + \bar{c}_1 y_1 + 3y_0^2 y_1) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.497)$$

Відмітимо, що вираз (4.497) справедливий за будь-якого μ , тому маємо систему рівнянь:

$$\ddot{y}_0 + p^2 y_0 = 0; \quad (4.498)$$

$$\dot{y}_1 + p^2 y_1 = -\bar{c}_1 y_0 - y_0^3; \quad (4.499)$$

$$\ddot{y}_2 + p^2 y_2 = -\bar{c}_2 y_0 - \bar{c}_1 y_1 - 3y_0^2 y_1. \quad (4.500)$$

Структура отриманих рівнянь (4.498) – (4.500) дозволяє намітити наступний хід розв'язку: перше рівняння дозволяє знайти y_0 , після чого з другого рівняння можна визначити y_1 , потім з третього – y_2 .

Якщо $t = 0$: $y = a$; $\dot{y} = 0$, то матимемо:

$$y_0 = a; \dot{y}_0 = 0; y_1 = 0; y_2 = 0; \dot{y}_1 = 0; \dot{y}_2 = 0.$$

Звідси для y_0 отримаємо: $y_0 = a \cos p_1 t$.

Підставивши значення y_0 в друге рівняння (4.499), знайдемо:

$$\ddot{y}_1 + p^2 y_1 = -\left(\bar{c}_1 a + \frac{3}{4} a^3\right) \cos p_1 t - \frac{1}{4} a^3 \cos^3 p_1 t. \quad (4.501)$$

Якщо коефіцієнт попереду $\cos p_1 t$ в правій частині рівняння (4.501) відмінний від нуля, то результат розв'язку цього рівняння зі збільшенням часу безмежно збільшується.

Тому для отримання обмеження розв'язку з часом необхідно допустити, що:

$$c_1 a + \frac{3}{4} a^3 = 0, \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{4} a^2. \quad (4.502)$$

Тоді частота коливань у першому наближенні:

$$p_1^2 = p_o^2 + \frac{3}{4} \mu a^2. \quad (4.503)$$

Умова обмеженості розв'язку дозволяє визначити і решту сталих c_i , послідовно розв'язуючи рівняння для y_2 , y_3 тощо.

На закінчення відмітимо, що частота основної гармоніки p_1 виявляється залежною від амплітуди коливань a : в цьому випадку чим більша амплітуда, тим більша і частота коливань.

Приклад 4.46

Маса m приєднана до пружині, що має характеристику сили пружності $F = cx + c_1 x^3$ (рис. 4.88). Сили опору руху не враховуються.

Встановити залежність між частотою власних коливань і амплітудою, вважаючи, що у початковий момент часу відхилення маси від положення рівноваги дорівнює a , швидкість руху маси в цей момент дорівнює нулю.

Під час розв'язання задачі прийняти:

$$a = 1 \text{ см}; c = 10 \text{ Н/см}; c_1 = 0,5 \text{ Н/см}; m = 1 \text{ кг}.$$

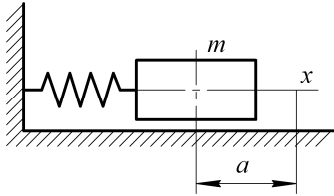


Рис. 4.88

Диференціальне рівняння руху маси m :

$$m\ddot{x} + cx + c_1x^3 = 0 \quad \text{або}$$

$$\ddot{x} + p_1^2x + \mu x^3 = 0,$$

$$\text{де } \mu = \frac{c_1}{m}.$$

Розв'язки останнього рівняння шукаємо у вигляді ряду:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

$$\text{Допустимо: } p_0^2 = p^2 + \mu \bar{c}_1 + \mu^2 \bar{c}_2 + \dots$$

Підставивши ці вирази у вихідне рівняння і обмежувачись доданками, що містять μ у першому степені, отримаємо:

$$\ddot{x}_0 + p_1^2 x_0 + \mu(\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 + \bar{c}_1 x_0 + x_0^3) = 0.$$

Це рівняння має бути справедливим за будь-якого малого значення μ , тому:

$$1) \ddot{x}_0 + p_1^2 x_0 = 0; \quad 2) \ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = -(\bar{c}_1 x_0 + x_0^3)$$

Розв'язок першого рівняння представимо у вигляді $x_0 = a \cos p_1 t$.

Підставимо цей розв'язок у праву частину другого рівняння:

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = -\left(\bar{c}_1 a + \frac{3}{4} a^3\right) \cos p_1 t - \frac{1}{4} a^3 \cos^3 p_1 t.$$

Розв'язок цього рівняння, враховуючи початкові умови:

$$x_1 + \frac{a^3}{32 p_1^2} (\cos^3 p_1 t - \cos p_1 t)$$

У першому наближенні новий розв'язок вихідного диференціального рівняння має вигляд:

$$x = a \cos p_1 t + \mu \frac{a^3}{32 p_1^2} (\cos^3 p_1 t - \cos p_1 t)$$

Частоту вільних коливань системи знаходимо за формулою (4.503):

$$p_1^2 = \frac{0,1}{0,1} + \frac{3 \cdot 0,05}{4 \cdot 0,10} 1,0^2 = 1,37 \Rightarrow p_1 = \sqrt{1,37} = 1,17 \text{ с}^{-1}.$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають коефіцієнтом впливу? Як він визначається?
2. Як впливають розміри тіла на частоту коливань балки?
3. У чому полягає метод Релея?
4. Напишіть формулу Донкерлі?
5. У чому сутність параметричних коливань?
6. У чому полягає метод Ляпунова-Пуанкаре?
7. Що таке жорсткість балки на згін і як вона визначається?
8. Які особливості диференціального рівняння Матьє ви знаєте?
9. Як визначається форма коливань балки?
10. За якою діаграмою і як визначається стійкість розв'язку рівняння Матьє?

4.7. Основи теорії стійкості руху

Теорія стійкості руху має важливе практичне значення для багатьох галузей техніки. Вона широко застосовується в наукових дослідженнях і під час розрахунків та конструювання систем автоматичного регулювання, навігаційних приладів, літаків, космічних апаратів, різного роду двигунів тощо.

Без відповідної стійкості руху ракета не може виводити супутник на розрахункову траєкторію, а машина не може якісно виконувати технологічний процес, корабель і літак – стійко зберігати заданий курс, гірокомпас – стійко показувати напрям географічного меридіана.

Із середини ХІХ ст. у науці і техніці виникали проблеми, які змусили вчених і інженерів поставити загальну задачу про стійкість не тільки рівноваги але й руху.

Перш за все – це криза у машинобудуванні, коли конструкторам довго не вдавалося стійко зберігати задану частоту обертання колінчастих валів двигунів (двигун йшов у «розліт»).

У працях Д.К. Максвелла, І.А. Вишнеградського, Е. Рауса, М.Є. Жуковського розглянуто низку загальних питань про стійкість руху. Неоціненні плідні результати містить робота О. М. Ляпунова «Загальна задача про стійкість руху», яка була опублікована в 1892 році.

Ляпунов надав точне визначення стійкості руху, одержав повний розв'язок задачі для усталеного руху, запропонував два методи дослідження стійкості руху у загальній постановці, що характеризуються простотою і ефективністю.

Сьогодні методи Ляпунова поглиблюються, виникають нові прикладні напрями, в яких створюються загальні методи дослідження стійкості руху окремих широких класів систем: системи автоматичного регулювання, керовані системи тощо.

Бурхливий розвиток отримала теорія автоматичного керування і технічна кібернетика, де створення методів дослідження і забезпечення стійкості руху систем є однією з головних задач.

4.7.1. Стійкість положення рівноваги

Розглянемо спочатку більш просте поняття про стійкість рівноваги. З фізичної точки зору положення рівноваги називається стійким, якщо за достатньо малих початкових відхилень і швидкостей система протягом руху не виходить за межі як завгодно малого відхилення від положення рівноваги, маючи при цьому як завгодно малі швидкості.

Аналізуючи деякі найпростіші рухи з погляду заданого визначення, можна стверджувати, що кулька на угнутій сферичній поверхні є стійкою системою, тому що вона під час руху під дією достатньо малих збурювальних сил намагається знову повернутись у своє вихідне найнижче положення.

У той же час кулька на випуклій поверхні у стані рівноваги не має стійкого положення, навіть за як завгодно малих відхилень вона не повернеться до стану рівноваги. Байдуже положення має кулька на горизонтальній поверхні.

Візьмемо другий приклад – фізичний маятник. У нижньому вертикальному положенні він має стійку рівновагу (після низки коливань він повертається у вихідне положення спокою).

У верхньому вертикальному положенні фізичний маятник посідає нестійку рівновагу: за як завгодно малого відхилення він починає рухатись, прямуючи до стійкого нижнього положення.

Достатні умови стійкості рівноваги системи дає теорема Лагранжа – Діріхле:

Якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія голономної стаціонарної системи, що перебуває в полі консервативних сил, має ізольований мінімум, то таке положення рівноваги є стійким.

Для консервативної системи діє закон збереження механічної енергії:

$$T_0 + P_0 = T + P, \quad (4.504)$$

де T_0, P_0, T, P – кінетична і потенціальна енергія в стані рівноваги і під час збурення. Оскільки завжди $T \geq 0$, то із виразу

(4.504) маємо:

$$T = T_0 + \Pi_0 - \Pi \geq 0, \quad (4.505)$$

Звідси:
$$\Pi \leq T_0 + \Pi_0. \quad (4.506)$$

Нерівності (4.505), (4.506) свідчать, що рух системи після відхилення її від положення рівноваги відбувається в околі положення рівноваги.

Зростання потенціальної енергії обмежене нерівністю (4.506) настільки, що вона буде одним із значень потенціальної енергії в околі положення рівноваги.

На основі (4.505) можна вважати, що за вказаних початкових умов швидкості всіх точок системи обмежені за модулем: із зменшенням T_0 і Π_0 до нуля, T і Π також наближаються до нуля. Теорема доведена.

Теорема Лагранжа – Діріхле має лише достатні умови стійкості стану рівноваги. Вирішення питання про нестійкість рівноваги консервативної системи ґрунтується на двох теоремах О.М. Ляпунова про нестійкість рівноваги.

Суть теорем Ляпунова про нестійкість рівноваги полягає в тому, що нестійкість має місце, якщо:

- 1) *потенціальна енергія не має мінімуму, що можна встановити за членами другого порядку в розкладанні потенціальної енергії в ряд Маклорена;*
- 2) *потенціальна енергія має максимум і це можна встановити за членами нижчого порядку мализни, що входять до ряду Маклорена.*

Як відомо з аналітичних курсів механіки, вираз потенціальної енергії для голономної стаціонарної системи можна отримати у вигляді квадратичної форми в функції узагальнених координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N C_{kj} q_k q_j, \quad (4.507)$$

де C_{kj} – узагальнені коефіцієнти жорсткості (коефіцієнти ряду Маклорена);

q_1, \dots, q_N – узагальнені координати системи.

У виразі (4.507) враховано, що узагальнені координати і потенціальна енергія в положенні рівноваги дорівнюють нулю ($q_j = 0$; $\Pi(0) = 0$).

Крім того, узагальнені сили в положенні рівноваги також дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_0 = 0.$$

Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю ($\Pi(0) = 0$), то вона має мінімум у цьому положенні, якщо $\Pi(\bar{q})$ буде явно додатною функцією.

Знак квадратичної форми визначається теоремою Сильвестра.

Для додатно-визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатні.

Випишемо матрицю коефіцієнтів виразу (4.507):

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2N} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} & \dots & C_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{M1} & C_{N2} & C_{N3} & \dots & C_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.508)$$

Складемо головні діагональні мінори матриці (4.508):

$$\Delta_1 = C_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_N = \begin{vmatrix} C_{11} & \dots & C_{M1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{M1} & \dots & C_{NN} \end{vmatrix}.$$

За критерієм Сильвестра, квадратична форма є додатно-визначеною, а звідси і буде мінімум потенціальної енергії в

положенні рівноваги, якщо головні діагональні мінори матриці коефіцієнтів додатні:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_N > 0; \quad (4.509)$$

4.7.2. Приклади визначення положення стійкої рівноваги

У багатьох галузях техніки досить часто приходится розглядати коливальний рух механічної системи, при якому точки системи переміщуються послідовно то в один бік, то в другий навколо середнього положення рівноваги. Це коливання і вібрації машин і їх деталей (автомобілі, трактори, електричні машини, судна, літаки тощо.).

Колівальний рух механічних систем зручно описувати рівняннями Лагранжа другого роду в узагальнених координатах.

Під час складання рівнянь узагальнені координати відраховують від положення стійкої рівноваги, відносно якої і відбуваються коливання механічної системи.

Здебільшого ці рівняння нелінійні та їх інтегрування пов'язане з серйозними труднощами. У багатьох технічних задачах ці рівняння лінеаризують.

Колівання, які описуються лінеаризованими рівняннями за певним вибором початку відліку, повинні бути малими коливаннями навколо положення рівноваги.

Механічні системи, зазвичай, є консервативними, тобто, їх коливання відбуваються у потенціальному силовому полі, тому рівняння Лагранжа другого роду зручно приймати у формі:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (4.510)$$

де $-\frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q$ – узагальнена сила;

$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$ – кінетична енергія системи в узагальнених швидкостях (розглядається система з одним ступенем вільності);

$\Pi = \frac{1}{2}cq^2$ – потенціальна енергія системи в узагальнених координатах;

a – коефіцієнт інерції;

c – узагальнений коефіцієнт жорсткості системи.

$$\text{Тоді: } \frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq.$$

Звідси рівняння (4.500) набуває вигляду:

$$a\ddot{q} + cq = 0 \Rightarrow \ddot{q} + k^2q = 0, \quad (4.511)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{a}.$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (4.511) без правої частини має вигляд:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (4.512)$$

$$\text{де } A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (4.513)$$

Період коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (4.514)$$

У положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія системи має бути мінімальною, тобто, виконуються умови:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_{q=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0. \quad (4.515)$$

Приклад 4.47

Визначити умови стійкості рівноваги стрижня AB у вертикальному положенні, якщо маса стрижня дорівнює m , а

довжина – l . В точці B до стрижня приєднані дві пружини, коефіцієнти жорсткості яких дорівнюють, відповідно c_1 і c_2 . Пружини в початковий момент стиснуті на величини λ_{10} і λ_{20} (рис. 4.89).

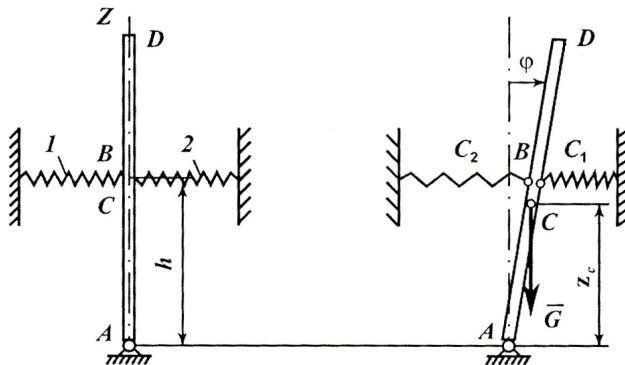


Рис. 4.89

Розв'язання

За узагальнену координату обираємо кут φ відхилення стрижня від вертикалі. Вважаємо кут φ малим, обчислимо потенціальну енергію системи.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (1)$$

де $\Pi_1 = G \cdot z_c = mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi$ – потенціальна енергія стрижня; (2)

$$\Pi_2 = \frac{c_1(\lambda_{10} + h\varphi)^2}{2} + \frac{c_2(\lambda_{20} + h\varphi)^2}{2} \text{ – потенціальна енергія пружини.} (3)$$

Обчислюючи потенціальну енергію пружини, вважаємо, що точка B рухається горизонтально і її переміщення дорівнює $h\varphi$, стиск пружини 1 збільшується, а пружини 2 – зменшується.

Розкладемо $\cos \varphi$ в ряд:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots \quad (4)$$

Підставимо значення (2), (3), (4) в рівняння (1):

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{mgl}{4} \varphi^2 + (c_1 \lambda_{10} - c_2 \lambda_{20}) h \varphi + \frac{(c_1 + c_2) h^2}{2} \varphi^2.$$

Визначаємо від останнього виразу першу частинну похідну за узагальненою координатою φ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{mgl}{2} \varphi + (c_1 \lambda_{10} - c_2 \lambda_{20}) h + (c_1 + c_2) h^2 \varphi. \quad (5)$$

Для того, щоб стрижень був у рівновазі, перша похідна має дорівнювати нулю, коли $\varphi = 0$:

$$(c_1 \lambda_{10} - c_2 \lambda_{20}) h = 0 \Rightarrow c_1 \lambda_{10} = c_2 \lambda_{20}. \quad (6)$$

Визначаємо другу частинну похідну за узагальненою координатою φ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{mgl}{2} + (c_1 + c_2) h^2. \quad (7)$$

Для стійкої рівноваги необхідно, щоб $\frac{mgl}{2h^2} > 0$, звідки:

$$(c_1 + c_2) > \frac{mgl}{2h^2}. \quad (8)$$

Вирази (6) і (8) складають умови стійкості рівноваги стрижня у вертикальному положенні.

Приклад 4.48

Чутливий елемент приладу для реєстрації вертикальних коливань фундаментів схематично зображений на рис. 4.90 (вертикальна площина).

Дві горизонтальні пружини, коефіцієнт жорсткості яких дорівнює c_1 , у положенні рівноваги не деформовані.

Осьовий момент інерції важеля з вантажем вагою G дорівнює I_z . Коефіцієнт жорсткості вертикальної пружини – c_2 .

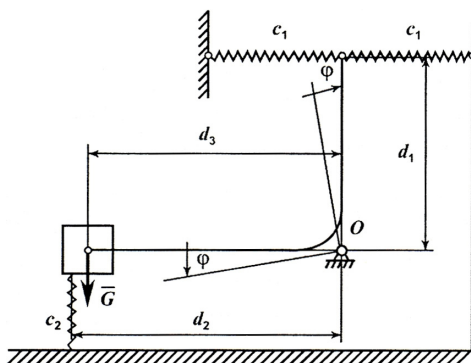


Рис. 4.90

Розв'язання задачі полягає у тому, щоб скласти диференціальне рівняння руху механічної системи і знайти період коливань.

Розв'язання

Система має один ступінь вільності. За узагальнену координату обираємо кут повороту системи φ .

Кінетична і потенціальна енергії системи:

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

де Π_1 – потенціальна енергія вантажу вагою G ;

Π_2 – потенціальна енергія трьох пружин;

λ_{cm} – статична деформація вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості c_2 .

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} (2c_1) \cdot (d_1 \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\lambda_{cm} + d_2 \cdot \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_2 \lambda_{cm}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 \cdot d_1^2 \cdot \varphi^2 + \frac{1}{2} c_2 \lambda_{cm}^2 + c_2 \lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2} c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2} c_2 \lambda_{cm}^2 = \\
&= c_1 d_1^2 \varphi^2 + c_2 \lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2} c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 &= -G \cdot d_3 \cdot \varphi + c_1 d_1^2 \cdot \varphi^2 + c_2 \lambda_{cm} \cdot d_2 \cdot \varphi + \frac{1}{2} c_2 d_2^2 \cdot \varphi^2 = \\
&= (-G \cdot d_3 + c_2 \lambda_{cm} \cdot d_2) \varphi + \left(c_1 d_1^2 + \frac{1}{2} c_2 d_2^2 \right) \varphi^2;
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_{\varphi=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 = -G d_3 + c_2 \lambda_{cm} d_2 = 0.$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi^2.$$

Диференціальне рівняння руху системи набуває вигляду:

$$I_z \ddot{\varphi} + (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi = 0.$$

Звідси колова частота і період вільних коливань

$$k = \sqrt{\frac{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}{I_z}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}}.$$

4.7.3. Стійкість руху механічної системи

Стійкість руху механічної системи, наприклад, машини, літака, снаряда тощо, залежить від діючих сил і початкових умов руху (координат і швидкостей точок системи в момент початку руху).

Знаючи сили і початкові умови, можна теоретично розрахувати, як буде рухатись система. Рух, який відповідає

розрахунку, називається незбуреним.

У зв'язку з деякою неточністю виміру початкових умов, їх дійсні значення, як правило, відрізняються від розрахункових. Крім того, механічна система під час руху може підпадати під випадкові впливи різних сил, що також еквівалентно змінює початкові умови.

Відхилення початкових умов, що виникають із різних причин, називають початковими збуреннями, а рух, який система при цьому здійснює за наявності збурень, – збуреним рухом. Як підсумок вищесказаного можна дати таке визначення.

Якщо за достатньо малих початкових збурень яка-небудь із характеристик руху протягом всього часу мало відрізняється від того значення, що вона повинна мати у разі незбуреного руху, то рух системи щодо цієї характеристики називається стійким. Умови, за яких рух механічної системи є стійким, називаються критеріями стійкості.

Розрізняють стійкість положення рівноваги і стійкість руху.

Будь-яка система може за певних умов втратити стійкість своєї рівноваги або руху. Якщо сила, що виникає під час відхилення системи, збільшує початкові відхилення або швидкості, які б не були вони малі, то рівновага системи буде нестійкою. У випадку стійкої рівноваги подальше зростання початкових відхилень або швидкостей не відбудеться і система повернеться в початкове положення.

Поняття про стійкість руху є узагальненням простішого поняття стійкості рівноваги. Слід зазначити, що вплив малих збурювальних сил на рух системи буде неоднаковим для різних рухів. На одному русі цей вплив позначається не сильно, тобто збурений рух мало відрізняється від незбуреного, а на інших рухах вплив збурень позначається дуже сильно причому збурений рух значно відрізняється від незбуреного, якими б малими не були самі збурювальні сили. Тому рухи першого роду називатимемо стійкими, рухи другого роду – нестійкими. Отже, теорія стійкості руху і займається встановленням ознак, що дозволяють робити висновок про те, чи буде даний рух стійким або нестійким.

4.7.4. Визначення стійкості руху

Нехай рух матеріальної системи описується системою диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (4.516)$$

де y_s – деякі параметри, пов'язані з рухом системи, наприклад, координати, швидкості.

Праві частини системи (4.516) є відомими функціями часу t та змінних y_1, y_2, \dots, y_n .

Розглянемо будь-який частинний рух системи, що підлягає дослідженню на стійкість. Цей рух назовемо незбуреним на відміну від інших рухів системи. Нехай незбуреному руху системи відповідає деякий частинний розв'язок рівнянь (4.516):

$$y_1 = f_1(t), \quad y_2 = f_2(t), \dots, \quad y_n = f_n(t). \quad (4.517)$$

Якщо $t = t_0$, то розв'язок системи задовольняє початкові умови:

$$y_1 = f_1(t_0), \quad y_2 = f_2(t_0), \dots, \quad y_n = f_n(t_0). \quad (4.518)$$

Далі надамо початковим значенням y_1, y_2, \dots, y_n невеликі прирости $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$:

$$t = t_0 : y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad y_2 = f_2(t_0) + \varepsilon_2, \dots, \quad y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (4.519)$$

Рух системи, що відповідає зміненим початковим умовам (4.519), називається збуреним рухом, а величини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – збуреннями.

Для виведення диференціальних рівнянь збуреного руху нам знадобиться різниця вигляду:

$$x_i = y_i(t) - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.520)$$

Ці різниці називаються збуреннями або варіаціями. Якщо всі збурення рівні нулю, то збурений рух буде співпадати з незбуреними рухами.

4.7.5. Диференціальні рівняння збуреного руху

Для дослідження стійкості руху системи необхідно перетворити рівняння Коші до нових змінних.

З виразу (4.520) змінні $y_i(t)$ запишемо:

$$y_i(t) = f_i(t) + x_i(t). \quad (4.521)$$

Підставивши цей вираз у диференціальні рівняння (4.516), отримаємо:

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = y_i(t, f + x_1, f_2 + x_2, \dots, f + x_n). \quad (4.522)$$

Зазначимо, що функція $f_i(t)$ є частинним розв'язком рівнянь (4.516), тому маємо:

$$\frac{df_i}{dt} = y_i(t, f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (4.523)$$

Отже:

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i(t, f_1 + x_1, f_2 + x_2, \dots, f_n + x_n) - y_i(t, f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (4.524)$$

У підсумку отримуємо диференціальні рівняння збуреного руху:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.525)$$

Незбуреному руху системи відповідає тривіальний розв'язок рівнянь (4.525) $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

У загальному випадку функції X_i залежать явно від збурень x_1, x_2, \dots, x_n і часу t (неавтономні системи). Якщо ж функції X_i від часу явно не залежать, то системи називаються автономними, залежно від цього руху називаються усталені і неусталені.

Відповідно до цього диференціальні рівняння збуреного руху для автономної системи мають вигляд:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.526)$$

а для неавтономної:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.527)$$

Диференціальні рівняння збуреного руху (4.526) є найбільш простими і водночас до них зводиться багато технічних задач.

4.7.6. Канонічні рівняння збуреного руху

Нехай рівняння руху системи задані в канонічній формі:

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.528)$$

де H — функція Гамільтона.

Функція Гамільтона є задана функція часу t , узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_n і узагальнених імпульсів p_1, p_2, \dots, p_n :

$$H = H(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (4.529)$$

Допустимо, що відомо деякий частинний розв'язок системи (4.518):

$$q_i = f_i(t); \quad p_i = \varphi_i(t), \quad (4.530)$$

що визначає незбурений рух системи.

Далі поставимо задачу про стійкість цього руху щодо величин:

$$q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Для виведення канонічних рівнянь збуреного руху знадобляться різниці:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 - f_1(t), \quad x_2 = q_2 - f_2(t), \quad \dots, \quad x_n = q_n - f_n(t); \\ y_1 &= p_1 - \varphi_1(t), \quad y_2 = p_2 - \varphi_2(t), \quad \dots, \quad y_n = p_n - \varphi_n(t). \end{aligned} \quad (4.531)$$

Диференціюючи ці різниці за часом, знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dq_1}{dt} - \frac{df_1(t)}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dq_2}{dt} - \frac{df_2(t)}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{dq_n}{dt} - \frac{df_n(t)}{dt}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dp_1}{dt} - \frac{d\varphi_1(t)}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dp_2}{dt} - \frac{d\varphi_2(t)}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{dy_n}{dt} = \frac{dp_n}{dt} - \frac{d\varphi_n(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (4.532)$$

Вирази (4.532) можна записати скорочено:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt} - \frac{df_i(t)}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{d\varphi_i(t)}{dt}. \quad (4.533)$$

Замінюючи в функції Гамільтона H величини q_i і p_i їх виразами з формули (4.531), маємо:

$$H = H(t, f_1 + x_1, f_2 + x_2, \dots, f_n + x_n; \varphi_1 + y_1, \varphi_2 + y_2, \dots, \varphi_n + y_n). \quad (4.534)$$

Тепер, беручи до уваги вирази (4.533) і маючи на увазі рівняння (4.518), отримуємо:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} - \dot{f}_i(t); \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{\varphi}_i(t). \quad (4.535)$$

Вирази (4.535) є диференціальними рівняннями збуреного руху в канонічній формі.

4.7.7. Стійкість руху за Ляпуновим

Раніше було прийнято, що відхилення збуреного руху від незбуреного характеризується величинами x_i . В якості міри відхилення збуреного руху від незбуреного можна вибрати суму квадратів цих величин:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (4.536)$$

Якщо всі x_i малі за модулем, то буде малою й сума (4.536). При цьому необхідно мати на увазі, якщо саме відхилення хоча б однієї координати буде великим, то сума $\sum_{i=1}^n x_i^2$ буде теж великою.

На основі рівностей (4.519) і (4.520) маємо, якщо:

$$t = t_0 : \text{ то } x_i = x_{0i} = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.537)$$

Отже, початкові відхилення x_{0i} характеризують збурення цієї системи.

Стійкість незбуреного руху у сенсі Ляпунова можна визначити так:

якщо за будь-яким додатним числом ε , яким би малим воно не було, можна знайти таке додатне число δ , що за будь-яких збурень x_{0i} , що задовольняють умову:

$$\sum x_{0i}^2 \leq \delta, \quad (4.538)$$

i за будь-якого $t \geq t_0$ буде виконуватися нерівність:

$$\sum x_i^2 < \varepsilon, \quad (4.539)$$

то незбурений рух є стійкий, у протилежному випадку – нестійкий.

4.7.8. Методи вирішення задачі про стійкість руху

Якщо диференціальні рівняння збуреного руху вдається інтегрувати в замкненому вигляді, то питання про дослідження стійкості незбуреного руху вирішується порівняно просто. Проте, слід зазначити, що пошук таких розв'язків можливий лише у виняткових випадках. Тому зусилля вчених були направлені на те, щоб розробити методи дослідження стійкості руху без інтегрування диференціальних рівнянь.

Ці методи дослідження стійкості руху, коли не вдається інтегрувати диференціальні рівняння збуреного руху, називають якісним розв'язком рівнянь.

Наприкінці XIX ст. О.М. Ляпунов запропонував два методи дослідження стійкості руху.

Перший метод Ляпунова полягає в дослідженні стійкості руху за допомогою лінеаризованих диференціальних рівнянь збуреного руху, тобто, дослідження стійкості руху за першим наближенням.

Другий метод Ляпунова є якісним методом, оскільки не потребує пошуку частинних розв'язків ні основних рівнянь, ні рівнянь першого наближення. Цей метод базується на вивченні властивостей спеціальних функцій, так званих, функцій Ляпунова. За допомогою цих функцій проводять дослідження стійкості руху систем.

4.7.9. Приклади складання диференціальних рівнянь збуреного руху

Приклад 4.49

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху колісного екіпажу (рис. 4.49). Положення екіпажу в процесі руху характеризується сімома координатами:

y_1 – вертикальне переміщення центра ваги кузова;

y_2, y_3, y_4, y_5 – вертикальні переміщення центрів ваги коліс;

θ – кут повороту кузова відносно поперечної осі екіпажу;

φ – кут повороту кузова відносно поздовжньої осі.

Оскільки розподіл мас екіпажу майже симетричний відносно поздовжньої осі, то в подальшому будемо ігнорувати деяку асиметрію системи, тому загальний процес руху можна розглядати таким, що складається з двох взаємно не пов'язаних найважливіших процесів, а саме:

1) поздовжніх коливань, що характеризуються вертикальним переміщенням кузова y_1 , поворотом кузова навколо поперечної осі θ , рівними зміщеннями обох передніх коліс $y_2=y_4$ і рівними зміщеннями обох задніх коліс $y_3=y_5$ (рис. 4.49а);

2) поперечних коливань, що характеризуються поворотом кузова φ навколо поздовжньої осі і попарно рівними зміщеннями обох лівих $y_2=y_3$ і обох правих $y_4=y_5$ коліс (рис. 4.49б).

Внаслідок цього поздовжні коливання описуються чотирма диференціальними рівняннями, а поперечні коливання – трьома. Практика і розрахунки свідчать, що найбільше значення мають поздовжні коливання, які розглядаються нижче.

Сумарна кінетична енергія кузова і коліс:

$$T = \frac{1}{2} [m(\dot{y}_1^2 + r^2\dot{\theta}^2) + 2m_k(\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2)],$$

де m – маса кузова,

m_k – маса коліс,

r – радіус інерції кузова відносно поперечної осі, що проходить через центр ваги (центр мас).

Сумарна потенціальна енергія деформації ресор і шин:

$$\Pi = c_n(y_1 - y_2 + a\theta)^2 + c_3(y_1 - y_3 - b\theta)^2 + c_m(y_2^2 - y_3^2),$$

де c_n і c_3 – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор,
 c_m – коефіцієнт жорсткості шин.

Рівняння Лагранжа в цьому випадку:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} &= 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_3} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_3} &= 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

У підсумку підстановки похідних від T і Π в рівняння Лагранжа отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху колісного екіпажа:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) + 2c_3(y_1 - y_3 - b\theta) &= 0; \\ 2m_k\ddot{y}_2 - 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta) + 2c_m y_2 &= 0; \\ 2m_k\ddot{y}_3 - 2c_3(y_1 - y_3 - b\theta) + 2c_m y_3 &= 0; \\ mr^2\dot{\theta} + 2c_n(y_1 - y_2 + a\theta)a - 2c_3(y_1 - y_2 - b\theta)b &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Зведемо диференціальні рівняння збуреного руху (а) до нормального виду Коші. Для цього:

$$\begin{aligned} \theta &= x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad y_1 = x_3, \quad \dot{y}_1 = x_4, \quad \dot{x}_3 = x_4; \\ y_2 &= x_5, \quad \dot{y}_2 = x_6, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad y_3 = x_7, \quad \dot{y}_3 = x_8, \quad \dot{x}_7 = x_8; \end{aligned}$$

Вносячи ці вирази в рівняння (а), отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху в формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \quad \dot{x}_4 = -\frac{1}{m} [2c_n(x_3 - x_5 + ax_1) + 2c_3(x_3 - x_7 - bx_1)]; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \quad \dot{x}_6 = \frac{1}{m_k} [c_n(x_3 - x_5 + ax_1) - c_m x_5]; \\ \dot{x}_5 &= x_6; \quad \dot{x}_8 = \frac{1}{m_k} [c_3(x_3 - x_7 - bx_1) - c_m x_7]; \end{aligned}$$

$$\dot{x}_7 = x_8; \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{mr^2} [2c_{\text{п}}(x_3 - x_5 + ax_1)a - 2c_3(x_3 - x_7 - bx_1)b].$$

Приклад 4.50

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху колісного трактора.

Трактор на пневматичних шинах представляє собою коливальну систему, в якій роль демпфірувальних елементів виконують шини (див. рис. 4.50).

Розглянемо той випадок, коли передня вісь трактора є підресореною.

Сумарна кінетична енергія остова трактора з колесами:

$$T = \frac{1}{2} [m(\dot{y}_1^2 + r^2\dot{\theta}^2) + 2(m_1\dot{y}_2^2 + m_2\dot{y}_3^2)],$$

де m – маса остова трактора; m_1 і m_2 – сумарні маси передніх і задніх коліс.

Сумарна потенціальна енергія деформації передніх ресор і шин

$$\Pi = c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + a\theta)^2 + c'_{\text{ш}} y_2^2 + c''_{\text{ш}} y_3^2,$$

де $c_{\text{п}}$ – коефіцієнт жорсткості передніх ресор; $c'_{\text{ш}}$ і $c''_{\text{ш}}$ – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх шин.

Підставивши значення похідних від T і Π в рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху колісного трактора:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + 2c_{\text{п}} (y_4 - y_2 + a\theta) &= 0; \\ 2m_1\ddot{y}_2 - 2c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + a\theta) + 2c'_{\text{ш}} y_2 &= 0; \\ 2m_2\ddot{y}_3 + 2c''_{\text{ш}} y_3 &= 0; \\ mr^2\ddot{\theta} + c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + a\theta)a &= 0. \end{aligned}$$

Диференціальні рівняння збуреного руху колісного трактора в формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{mr^2} [2c_{\text{п}} (x_3 - x_5 + ax_1)a]; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \quad \dot{x}_4 = -\frac{1}{m} [2c_{\text{п}} (x_3 - x_5 + ax_1)]; \\ \dot{x}_5 &= x_6; \quad \dot{x}_6 = \frac{1}{m_1} [c_{\text{п}} (x_3 - x_5 + ax_1) - c_{\text{ш}}'x_5]; \\ \dot{x}_7 &= x_8; \quad \dot{x}_8 = -\frac{1}{m_2} c_{\text{ш}}''x_7. \end{aligned}$$

Приклад 4.51

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху гусеничного трактора.

Коливальна система гусеничного трактора (рис. 4.48а) може бути в першому наближенні замінена еквівалентною схемою пружно-балансирної підвіски.

На рис. 4.48б пружно-балансирна підвіска трактора замінена двома котками 1 і 2, підвішеними до остова трактора пружинами 3 і 4; осі пружин проходять через осі підвісу кареток.

Котки 1 і 2 імітують всі не підресорені маси балансирних кареток. Амортизатори 5 імітують гасіння коливань; обумовлене наявністю тертя в шарнірах підвіски.

Диференціальні рівняння руху гусеничного трактора:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_1 \frac{dy}{dt} + c_1 (y - b\theta) + c_2 (y + a\theta) &= 0; \\ mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + k_2 \frac{d\theta}{dt} - c_1 (y - b\theta)b + c_2 (y + a\theta)a &= 0, \end{aligned} \tag{a}$$

де k_1 і k_2 – коефіцієнти опору амортизаторів,

c_1 і c_2 – коефіцієнти жорсткості пружин.

Ці рівняння руху приймаємо за диференціальні рівняння збуреного руху гусеничного трактора і приводимо їх до нормальної форми Коші, допускаючи:

$$\begin{aligned} y &= x_1, \quad \dot{y} = x_2, \quad \dot{x}_1 = x_2, \\ \theta &= x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad \dot{x}_3 = x_4. \end{aligned}$$

Вносячи ці вирази в рівняння (а), отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху у формі Коші:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{m}[k_1x_2 + c_1(x_1 - bx_3) + c_2(x_1 + ax_3)]; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{mr^2}[k_2x_4 - c_1(x_1 - bx_3)b + c_2(x_1 + ax_3)a].\end{aligned}$$

Приклад 4.52

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху самохідного комбайна.

Комбайн на пневматичних шинах представляє собою коливальну систему, в якій роль демпфірувальних елементів виконують шини, а озов комбайна є не підресореною масою.

На рис. 4.51 наведено коливальну систему комбайна.

Сумарна кінетична енергія озова комбайна і коліс:

$$T = \frac{1}{2}[m(\dot{y}_1^2 + r^2\dot{\theta}^2) + 2(m_1\dot{y}_2^2 + m_2\dot{y}_3^2)].$$

Потенціальна енергія деформації шин:

$$\Pi = c_{ш}(y_2^2 + y_3^2),$$

де $c_{ш}$ – жорсткість шин.

Підставивши значення відповідних похідних від кінетичної і потенціальної енергій у рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху комбайна:

$$\begin{aligned}m\ddot{y}_1 &= 0; \\ 2m_1\ddot{y}_2 + 2c_{ш}y_2 &= 0; \\ 2m_2\ddot{y}_3 + 2c_{ш}y_3 &= 0; \\ mr^2\ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Диференціальні рівняння збуреного руху комбайна в формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_5 = x_6; \quad m\dot{x}_4 = 0; \quad \dot{x}_8 = -\frac{1}{m_1}c_m x_7;$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_7 = x_8; \quad \dot{x}_6 = -\frac{1}{m_2}c_m x_5; \quad mr^2 \dot{x}_2 = 0.$$

Приклад 4.53

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху одновісного причепа.

Розрахункову схему одновісного причепа, відхиленого від нейтрального положення вліво за ходом, що здійснює поперечний горизонтальний рух проти годинникової стрілки, зображено на рис. 4.47. Причеп представлений у вигляді системи, що складається з двох мас: не підресорена маса m_a , зосереджена в середині ходової осі (точка A); підресорена маса m_c – в точці C на висоті h_c від рівня опорної поверхні. Внаслідок дії знакозмінних сил інерції або у випадку виляння причепа рама, зв'язана з дишлом, може здійснювати поперечні коливання на підвісі.

Кінетична енергія двомасової системи причепа під час обертального руху навколо осі $O_k O'_k$:

$$T = \frac{1}{2}(I_a \dot{\varphi}_a^2 + I_c \dot{\varphi}_c^2),$$

де I_A і I_C – моменти інерції мас A і C відносно вертикальної осі, що проходить через точку зчипки O_k ;

φ_a і φ_c – кути відхилення мас A і C від нейтрального положення.

Потенціальна енергія підвіски причепа:

$$\Pi = \frac{1}{2}L^2 c_{зв} (\varphi_a - \varphi_c)^2,$$

де $c_{зв}$ – зведений коефіцієнт поперечної жорсткості пружного елемента підвіски.

Дисипативна функція для системи, що розглядається:

$$\Phi = \frac{1}{2}L^2 \zeta_{зв}^2 (\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c)^2,$$

де ξ_{3B} – зведений коефіцієнт опору підвіски; $L = a_c + b_c$.

Рівняння Лагранжа для цього випадку:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_a} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_a} = Q_{\varphi_a} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_a};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_c} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_c} = Q_{\varphi_c} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_c},$$

де Q_{φ_a} і Q_{φ_c} – узагальнені сили, які обчислюються як суми коефіцієнтів у рівнянні елементарної роботи за узагальненим переміщенням. Ці узагальнені сили запишуться:

$$Q_{\varphi_a} = -L^2 \left[\frac{\varphi_a}{v_0} + \frac{\varphi_a}{L} - \frac{v}{H} (\varphi_a - \varphi_c) \right], \quad Q_{\varphi_c} = 0,$$

де v – коефіцієнт, що враховує вплив кута крену на зміщення ходової осі.

Підставивши вирази похідних від кінетичної і потенціальної енергій, дисипативної функції і узагальнених сил у рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху одновісного причепа:

$$I_a \ddot{\varphi}_a + L^2 \left(\frac{k}{v_0} + \xi_{3B} \right) \dot{\varphi}_a + L^2 \left[\left(c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} \right) + \left(1 - v \frac{L}{H} \right) \frac{k}{L} \right] \varphi_a -$$

$$- L^2 \xi_{3B} \dot{\varphi}_c - L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} - k \frac{v}{H} \right] \varphi_c = 0; \quad (m)$$

$$I_c \ddot{\varphi}_c + L^2 \xi_{3B} \dot{\varphi}_c + L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} \right] \varphi_c -$$

$$- L^2 \xi_{3B} \dot{\varphi}_a - L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} \right] \varphi_a = 0, \quad (n)$$

де $\beta = \frac{a_c}{L}$.

Зведемо диференціальні рівняння збуреного руху одновісного причепа до нормальної форми Коші:

$$\begin{aligned}\varphi_a &= x_1; \dot{\varphi}_a = x_2; \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{\varphi}_c &= x_3; \varphi_c = x_4; \dot{x}_3 = x_4.\end{aligned}$$

Вносячи ці припущення в рівняння m, n , отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху причепа у формі Коші:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \dot{x}_2 = -\frac{1}{I_a} [Ax_2 + Bx_1 - C - Dx_3]; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \dot{x}_4 = -\frac{1}{I_c} [Kx_4 + Fx_3 - Nx_2 - \Phi x_1],\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}A &= L^2 \left(\frac{k}{v_0} + \xi_{3B} \right); B = L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} + \left(1 - \frac{L}{H} v \right) \frac{k}{L} \right]; \\ C &= L^2 \xi; D = L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{P^2}{H} - \frac{v}{H} k \right]; \\ K &= L^2 \xi_{3B}; F = L^2 \left[c_{3B} - m_c g \frac{\beta^2}{H} \right]; \\ N &= L^2 \xi; \Phi = L^2 \left[c_{3B} - m_c \frac{\beta^2}{H} \right].\end{aligned}$$

Приклад 4.54

Написати диференціальні рівняння збуреного руху двовісного причепа (рис. 4.91).

Диференціальні рівняння поперечних коливань двовісного причепа мають наступний вигляд:

$$v_0 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \beta v_0 x_2 + v \dot{\varphi}_2 + \varepsilon v_0 \varphi_2 = 0; \quad (c)$$

$$v_0 \ddot{\varphi}_2 + \alpha_1 \dot{\varphi}_2 + \beta_1 v_0 \varphi_2 + v_1 \dot{x}_2 + \varepsilon_1 v_0 x_2 = 0. \quad (d)$$

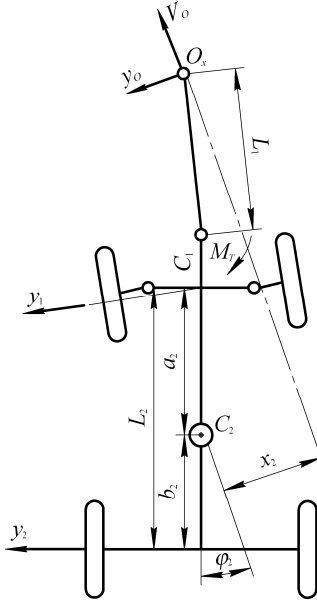


Рис. 4.91

Тут прийняті такі позначення:

$$\alpha = \frac{1}{m_n}(k_1 + k_2); \quad \beta = \left(2 - \frac{1}{i_0}\right) \frac{k_1}{m_n L_1};$$

$$v = \frac{1}{m_n}(b_2 k_2 - a_2 k_1); \quad \alpha_1 = \frac{1}{m_n r_n^2}(b_2^2 k_2 - a_2^2 k_1);$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m_n} \left\{ \left[\left(2 - \frac{1}{i_0}\right) \frac{a_2 + c_1}{L_1} + 1 - \frac{1}{i_0} \right] k_1 + k_2 \right\}; \quad \varepsilon_1 = \left(2 - \frac{1}{i_0}\right) \frac{a_2 k_1}{m_n r_n^2 L_1};$$

$$v_1 = \frac{1}{m_n r_n^2}(b_2 k_2 - a_2 k_1); \quad \beta_1 = \frac{1}{m_n r_n^2} \left\{ \left[\left(2 - \frac{1}{i_0}\right) \frac{a_2 + c_1}{L_1} + 1 - \frac{1}{i_0} \right] a_2 k_1 + b_2 k_2 \right\},$$

де k_1 і k_2 – коефіцієнти опору боковому зміщенню передньої і задньої осей причепа, відповідно.

Зводимо диференціальні рівняння збуреного руху двоосного причепа до нормальної форми Коші. Для цього позначимо:

$$\begin{aligned}x_2 &= z_1; & \dot{x}_2 &= z_2; & \dot{z}_1 &= z_2; \\ \varphi_2 &= z_3; & \dot{\varphi}_2 &= z_4; & \dot{z}_3 &= z_4.\end{aligned}$$

Вносячи ці вирази в рівняння (с) і (d), отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху у формі Коші:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2; \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{\nu_0} [\alpha z_2 + \beta \nu_0 z_1 + \gamma z_4 + \varepsilon \nu_0 z_3]; \\ \dot{z}_3 &= z_4; \\ \dot{z}_4 &= -\frac{1}{\nu_0} [\alpha_1 z_4 + \beta_1 \nu_0 z_3 + \nu_1 z_2 + \varepsilon_1 \nu_0 z_1].\end{aligned}$$

Приклад 4.55

Скласти диференціальні рівняння збуреного руху причіпного культиватора (рис. 4.18).

Розглянемо найбільш простий випадок роботи причіпного культиватора, коли агрегат складається із трактора і одного причіпного культиватора (див. приклад 4.11). Допустимо, що сумарний опір \bar{R} агрегату весь час залишається сталим, швидкість руху агрегату вважається сталою V_0 . Крім цього, вважаємо, що агрегат симетричний і його центр ваги лежить на лінії, що збігається з напрямом сили тяги трактора.

Кінетична енергія культиватора:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2. \quad (a)$$

Проекції швидкості руху центра ваги культиватора:

$$\dot{x} = l_0 \dot{\theta} \cos \theta; \quad \dot{y} = \nu_0 + l_0 \dot{\theta} \sin \theta.$$

Підставивши проекції швидкості руху у вираз (a), маємо:

$$T = \frac{1}{2} m(l_0^2 \dot{\theta}^2 + \nu_0^2 + 2l_0 \nu_0 \dot{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,$$

де I – момент інерції культиватора відносно центра ваги;
 m – маса культиватора.

Оскільки система має один ступінь вільності θ , то рівняння

Лагранжа буде таким:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q,$$

де Q – узагальнена сила.

Узагальнена сила визначається з виразу віртуальної роботи прикладених сил:

$$\delta W = L \delta \theta,$$

де $L = R(r - l\theta)$.

Звідси, узагальнена сила:

$$Q = R(r - l\theta).$$

Підставивши значення T і Q в рівняння Лагранжа, отримаємо:

$$(ml_0^2 + I)\ddot{\theta} = R(r - l\theta).$$

Після деяких перетворень дістанемо диференціальне рівняння збуреного руху причіпного культиватора:

$$\ddot{\theta} + \lambda^2 \theta = \lambda^2 k,$$

де

$$\lambda = \frac{Rl}{ml_0^2 + I}, \quad k = \frac{r}{l}.$$

Опишемо стан руху культиватора за допомогою системи диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші як рівнянь першого порядку.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\lambda^2 x_1 + \lambda^2 k. \end{aligned}$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якими умовами визначається стійкість рівноваги системи?
2. Якими умовами визначається стійкість руху системи?
3. Як формулюється визначення стійкості руху за Ляпуновим?

4. Що представляють собою диференціальні рівняння збуреного руху?
5. Що представляють собою канонічні рівняння збуреного руху?
6. Якими методами досліджується стійкість руху системи?

4.7.10. Стійкість руху за першим наближенням

У багатьох технічних задачах стійкість руху досліджується за рівняннями першого наближення. Іноді рівняння першого наближення можуть дати зовсім неправильні висновки про стійкість руху системи, тому потрібно визначити умови, у разі виконання яких рівняння першого наближення дають правильну відповідь про стійкість руху. Ці умови вперше сформулював Ляпунов (перший метод).

4.7.11. Диференціальні рівняння першого наближення

Розглянемо випадок стаціонарного незбуреного руху, для якого диференціальні рівняння збуреного руху будуть:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.540)$$

Розкладемо перші частини рівнянь (4.540) в ряд Тейлора за степенями x_i

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.541)$$

де a_{in} – сталі коефіцієнти; $\bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – сукупність членів не нижче другого степеня відносно змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) . Якщо відкинути члени $\bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в рівняннях (4.541), то отримуємо систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

першого наближення недостатньо. Тоді необхідно розглянути вплив нелінійних членів.

4.7.13. Критерій Гурвіца

З попереднього підрозділу зрозуміло, що для характеристики стійкості руху мають велике значення знаки дійсних частин коренів характеристичного рівняння.

Наприклад, дуже важливо знати необхідні і достатні умови, за яких всі корені рівняння мають від'ємні дійсні частини.

Згадані умови повинні задовольняти критерій Гурвіца.

Розкриємо характеристичний визначник (4.546) і групуємо члени за степенями λ :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (4.547)$$

Для визначення стійкості руху за рівняннями першого наближення необхідно наперед знати, коли дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння будуть від'ємні. Тому найбільший інтерес мають розв'язки задачі про стійкість руху, не пов'язані з обчисленням коренів характеристичного рівняння (4.547).

Побудуємо з коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n характеристичного рівняння (4.547) матрицю Гурвіца:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (4.548)$$

Складемо з матриці (4.548) головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (4.549)$$

Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (4.547) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори (4.549) були додатні:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0. \quad (4.550)$$

4.7.14. Приклади складання диференціальних рівнянь першого наближення

Приклад 4.56

Скласти рівняння першого наближення для математичного маятника. Нехай довжина його l , а кут відхилення від вертикалі φ (рис. 4.92).

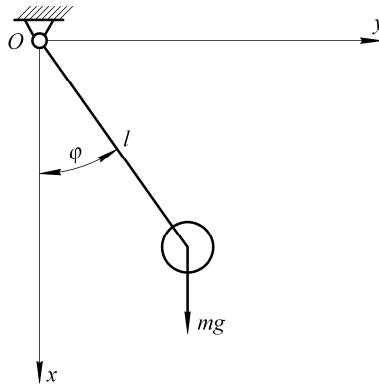


Рис. 4.92

Коливання математичного маятника описуються диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\varphi. \quad (a)$$

Потрібно дослідити стійкість руху за початковими умовами:

$$\varphi(0) = \alpha, \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = 0.$$

Нехай частинний розв'язок рівняння (а) має вигляд $\varphi = f(t)$, де $f(t)$ – деяка періодична функція.

Збурений рух маятника характеризується кутом:

$$\varphi = f(t) + x.$$

Підставивши це значення кута у вихідне рівняння, отримаємо:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin[f(t) + x].$$

Раніше було сказано, що в незбуреному русі функція $f(t)$ має задовольняти рівняння:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin f(t).$$

У результаті отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху маятника у формі:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin[f(t) + x] + \frac{g}{l} \sin f(t).$$

Розкладемо останній вираз у ряд за степенями x :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x \cos f(t) + \frac{g}{2l} x^2 \sin f(t) + \dots$$

Відкидаючи нелінійні члени, отримаємо рівняння першого наближення:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x \cos f(t).$$

Це рівняння можна записати у вигляді системи двох рівнянь у формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} x_1 \cos f(t).$$

Приклад 4.57

Скласти рівняння руху першого наближення конічного маятника, схему якого показано на рис. 4.93. Число ступенів вільності конічного маятника дорівнює двом.

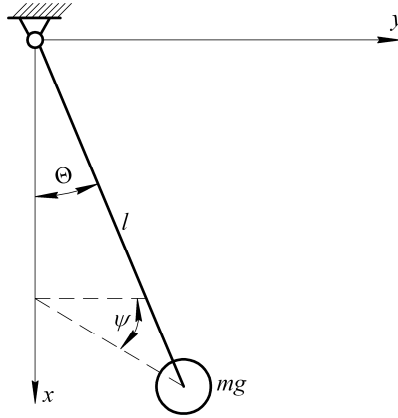


Рис. 4.93

Кінетична і потенціальна енергії конічного маятника:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\Theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \sin^2 \Theta). \quad \Pi = -mgl \cos \Theta.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Підставивши в ці рівняння значення T і Π , отримаємо:

$$ml^2 \ddot{\Theta} - ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta + mgl \sin \Theta = 0;$$

$$ml^2 \ddot{\psi} \sin^2 \Theta + 2ml^2 \dot{\Theta} \dot{\psi} \sin \Theta \cos \Theta = 0.$$

Це диференціальні рівняння руху конічного маятника. Представимо ці рівняння в нормальній формі Коші:

$$\dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin y_1 + y_3^2 \sin y_1 \cos y_1; \quad \dot{y}_3 = -2y_2 y_3 \operatorname{ctg} y_1.$$

Розглянемо стаціонарний рух конічного маятника.

$$\Theta = y_1 = \alpha = \text{const}; \quad \dot{\Theta} = y_2 = 0; \quad \dot{\psi} = y_3 = \omega = \text{const},$$

де ω – кутова швидкість під час обертання конічного маятника. Підставивши значення для y_1, y_2, y_3 у рівняння Коші, отримуємо:

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l}.$$

Цій умові мають задовольняти параметри конічного маятника.

За незбурений рух конічного маятника приймемо стаціонарний рух.

Відповідно до загальної теорії у збуреному русі маятника допустимо:

$$y_1 = \alpha + x_1; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = \omega + x_3.$$

Внесемо ці допущення для y_1, y_2, y_3 у рівняння Коші і отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху в нормальній формі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}(\alpha + x_1) + (\omega + x_3)^2 \sin(\alpha + x_1) \cos(\alpha + x_1); \\ \dot{x}_3 = -2x_2(\omega + x_3) \text{ctg}(\alpha + x_1). \end{aligned}$$

Відповідно до загальної теорії праві частини цих рівнянь перетворюються, якщо $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, в нулі.

Розкладаючи праві частини в ряди за степенями x_1, x_2, x_3 і обмежуючись тільки членами першого порядку мализни, отримуємо рівняння першого наближення:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \left(\omega^2 \cos^2 \alpha - \frac{g}{l} \cos \alpha \right) x_1 + \omega \sin 2\alpha \cdot x_3; \\ \dot{x}_3 = -2\omega \text{ctg} \alpha \cdot x_2. \end{aligned}$$

Приклад 4.58

Скласти рівняння першого наближення фізичного конічного маятника, що представляє собою однорідний диск масою m і радіусом r , жорстко закріплений до кінця стрижня довжиною l .

Інший кінець стрижня є точкою підвісу (рис. 4.94). Масою стрижня знехтувати.

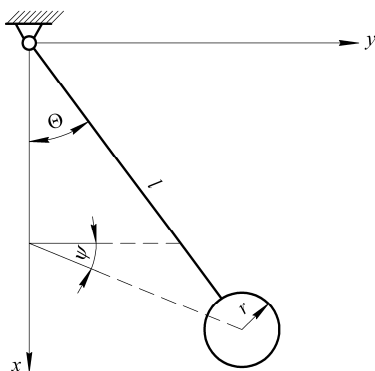


Рис. 4.94

Система має два ступеня вільності. За узагальнені координати прийемо кути Θ , ψ . Кінетична енергія маятника дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m(l+r)^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta,$$

де I_0 – момент інерції диска відносно точки підвісу. Потенціальна енергія маятника:

$$\Pi = -mg(l+r)\cos\Theta.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Підставимо в останні рівняння похідні від T і Π і отримаємо диференціальні рівняння руху маятника:

$$I_0 \ddot{\Theta} - m(l+r)^2 \dot{\psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta + mg(l+r) \sin \Theta = 0;$$

$$\ddot{\psi} + 2\dot{\Theta}\dot{\psi}\operatorname{ctg}\Theta = 0.$$

Запишемо ці рівняння в нормальній формі Коші:

$$\dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_2 = -\frac{mg}{I_0}(l+r)\sin y_1 + \frac{m}{I_0}(l+r)^2 y_3^2 \sin y_1 \cos y_1; \quad \dot{y}_3 = -2y_2 y_3 \operatorname{ctg} y_1.$$

За стаціонарним рухом фізичного маятника маємо:

$$\Theta = y_1 = \alpha = \operatorname{const}; \quad \dot{\Theta} = y_2 = 0; \quad \dot{\psi} = y_3 = \omega = \operatorname{const},$$

де ω – кутова швидкість фізичного маятника.

Підставивши ці значення для y_1, y_2, y_3 в рівняння Коші, отримаємо:

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l+r}.$$

Ці умови мають задовольняти параметри фізичного маятника. У збуреному русі фізичного конічного маятника відповідно до загальної теорії матимемо:

$$y_1 = \alpha + x_1; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = \omega + x_3.$$

Внесемо ці значення для y_1, y_2, y_3 у рівняння Коші і отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху фізичного маятника в нормальній формі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{I_0}(l+r)\sin(\alpha + x_1) + \frac{m}{I_0}(\omega + x_3)^2(l+r)^2 \cdot \sin(\alpha + x_1) \cdot (\cos \alpha + x_1); \\ \dot{x}_3 &= -2x_3(\omega + x_3)\operatorname{ctg}(\alpha + x_1). \end{aligned}$$

Розкладаючи праві частини в ряди за степенями x_1, x_2, x_3 і обмежуючись тільки членами першого порядку мализни, отримаємо диференціальні рівняння першого наближення фізичного маятника:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \frac{m(l+r)^2}{I_0} \left[\left(\omega^2 \cos 2\alpha - \frac{g}{l+r} \cos \alpha \right) x_1 + \omega \sin 2\alpha \cdot x_3 \right]; \\ \dot{x}_3 &= -2\omega \operatorname{ctg} \alpha \cdot x_3. \end{aligned}$$

Приклад 4.59

Скласти рівняння руху першого наближення відцентрового регулятора, схему якого показано на рис. 4.95, де m – маси куль, M – маса муфти.

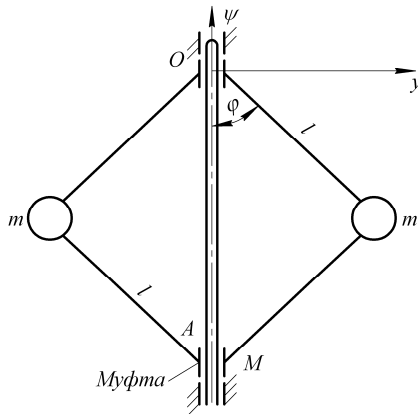


Рис. 4.95

За узагальнені координати оберемо кут повороту стрижня φ і кут обертання регулятора ψ .

Кінетична і потенціальна енергії регулятора:

$$T = l^2(m + 2M \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \varphi; \quad \Pi = -2(m + M)gl \cos \varphi;$$

Рівняння Лагранжа другого роду для системи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \psi}.$$

Підставивши в ці рівняння значення T і Π , отримаємо диференціальні рівняння руху відцентрового регулятора:

$$\begin{aligned} & (m + 2M \sin^2 \varphi)\ddot{\varphi} + 2M\dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - \\ & - m\dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{l}(m + M)\sin \varphi = 0; \\ & \ddot{\psi} + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \operatorname{ctg} \varphi = 0. \end{aligned}$$

Подамо ці рівняння в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= \frac{-\left[2My_2^2 \sin y_1 \cos y_1 - my_3^2 \sin y_1 \cos y_1 - \frac{g}{l}(m+M)\sin y_1\right]}{(m+2M \sin^2 y_1)}; \\ \dot{y}_3 &= -2y_2 y_3 \operatorname{ctg} y_1; \end{aligned}$$

Розглянемо стаціонарний рух регулятора. В цьому випадку маємо:

$$\varphi = y_1 = \alpha = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = y_2 = 0, \quad \dot{\psi} = y_3 = \omega = \text{const},$$

де ω – кутова швидкість обертання регулятора.

Підставивши ці значення для y_1, y_2, y_3 в рівняння Коші, отримаємо:

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{m+M}{m} \cdot \frac{g}{l}.$$

Цю умову мають задовольняти параметри регулятора. За незбурений рух відцентрового регулятора прийемо його стаціонарний рух.

У збуреному русі регулятора відповідно до загальної теорії маємо:

$$y_1 = \alpha + x_1; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = \omega + x_3.$$

Внесемо ці значення для y_1, y_2, y_3 у рівняння Коші і отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху в нормальній формі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{[m+2M \sin^2(\alpha+x_1)]} [2Mx_2^2 \sin(\alpha+x_1)\cos(\alpha+x_1) - \\ &\quad - m(\omega+x_3)^2 \sin(\alpha+x_1)\cos(\alpha+x_1) + \frac{g}{l}(m+M)\sin(\alpha+x_1)]; \\ \dot{x}_3 &= -2x_2(\omega+x_3)\operatorname{ctg}(\alpha+x_1). \end{aligned}$$

Відповідно до загальної теорії праві частини цих рівнянь перетворюються, якщо $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Розкладаючи праві частини в ряди за степенями x_1, x_2, x_3 і обмежуючись тільки членами першого порядку мализни,

отримаємо рівняння першого наближення у формі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{(m + 2M \sin^2 \alpha)} \{ (m + 2M \sin^2 \alpha) [m\omega^2 \cos 2\alpha - \\ &\quad - \frac{g}{l} (m + M) \cos \alpha] - mM\omega^2 \sin^2 2\alpha + \\ &\quad + \frac{g}{l} M(M + m) \sin \alpha \} x_1 + \frac{m\omega \sin 2\alpha}{m + 2M \sin^2 \alpha} x_3; \\ \dot{x}_3 &= -2\omega x_2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Приклад 4.60

Скласти рівняння першого наближення для тіла, що обертається навколо нерухомої точки за інерцією.

Прийmemo за осі координат головні осі інерції в закріпленій точці (рис. 4.96).

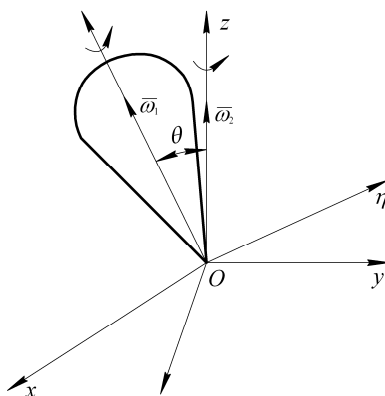


Рис. 4.96

Диференціальні рівняння руху тіла навколо нерухомої точки мають вигляд:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0;$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0;$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

де p, q, r – проєкції миттєвої кутової швидкості на рухомі осі координат, які збігаються з головними осями інерції тіла;
 A, B, C – моменти інерції відносно цих осей.
 Нехай ці диференціальні рівняння мають частинний розв'язок:

$$p = \omega = \text{const}; \quad q = 0; \quad r = 0.$$

Приймаючи цей рух за незбурений, допустимо, що:

$$x = p - \omega; \quad y = q; \quad z = r.$$

Підставивши ці вирази у вихідні рівняння, отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху:

$$A \frac{dx}{dt} + (C - B)yz = 0; \quad B \frac{dy}{dt} + (A - C)(x + \omega)z = 0; \quad C \frac{dz}{dt} + (B - A)(x + \omega)y = 0.$$

Рівняння першого наближення набудуть вигляду:

$$A \frac{dx}{dt} = 0; \quad B \frac{dy}{dt} + (A - C)\omega z = 0; \quad C \frac{dz}{dt} + (B - A)\omega y = 0.$$

Частиний розв'язок цієї системи шукаємо у формі:

$$x = A_1 e^{\lambda t}; \quad y = A_2 e^{\lambda t}; \quad z = A_3 e^{\lambda t}.$$

Диференціюючи ці вирази за часом, маємо:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A_1 e^{\lambda t}; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda A_2 e^{\lambda t}; \quad \frac{dz}{dt} = \lambda A_3 e^{\lambda t}.$$

Внесемо вирази для x, y, z і вирази похідних $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ у рівняння першого наближення:

$$\lambda A_1 = 0; \quad -\lambda A_2 + \frac{(C - B)\omega}{B} A_3 = 0; \quad \frac{(A - B)\omega}{C} A_2 - \lambda A_3 = 0;$$

Складемо характеристичний визначник системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{(C-A)\omega}{B} \\ 0 & \frac{(A-B)\omega}{C} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - \frac{(A-B)(C-B)}{BC} \omega^2 \lambda = 0.$$

Таким чином, маємо один корінь, рівний нулю, а два інших кореня визначаємо за формулою:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{(A-B)(C-B)}{CB}}.$$

Звідси, якщо $C < A < B$ або $C > A > B$, тобто, обертання відбувається навколо середньої осі інерції, то обидва кореня будуть дійсні, причому один з них буде обов'язково додатним, тому незбурений рух нестійкий.



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що представляють собою рівняння першого наближення?
2. У чому полягає метод складання характеристичного рівняння?
3. Чому відповідає кількість коренів характеристичного рівняння?
4. Як формулюється теорема Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням?
5. Як формулюється теорема Ляпунова про нестійкість руху за першим наближенням?
6. У чому полягає критерій Гурвіца?
7. Як застосовується прямий метод Ляпунова до дослідження рівнянь першого наближення?

4.7.15. Прямий метод Ляпунова. Функції Ляпунова. Критерій Сильвестра

Другий або прямий метод А.М. Ляпунова є якісним методом, оскільки він не потребує отримання частинних розв'язків ні основних, ні спрощених рівнянь руху. Цей метод заснований на вивченні властивостей деяких функцій координат і часу – так званих функцій Ляпунова, за допомогою яких і виконується дослідження стійкості руху.

Вивчаючи прямий метод, розглядають деякі дійсні функції $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначені в області:

$$\sum x_j^2 \leq \mu, \quad (4.551)$$

де μ –стале додатне число.

Допускають, що в області D ці функції однозначні, неперервні і перетворюються в нуль, коли всі (x_1, x_2, \dots, x_n) рівні нулю:

$$V(0) = 0. \quad (4.552)$$

У теорії стійкості руху Ляпунова прямий (другий) метод вважається основним. При цьому виходять із сукупності теорем, які дозволяють дослідити стійкість руху, не розв'язуючи диференціальних рівнянь, а розглядаючи властивості «пробних» функцій, функцій Ляпунова.

Найпростішим прикладом «пробної» функції може слугувати потенціальна енергія системи, за допомогою якої можна встановити стійкість або нестійкість рівноваги.

Відповідно до теореми Ляпунова – Лагранжа – Дирихле в положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія системи має ізольований мінімум, а в положенні нестійкої рівноваги – ізольований максимум, що визначається квадратними членами.

Розглянемо стійкість незбурених рухів, що встановилися, вважаючи, що рівняння збуреного руху автономні:

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.553)$$

Пробні функції Ляпунова і їх похідні за часом повинні мати властивості знаковизначеності або знакосталості в деякому околі початку координат або частини цього околу. Будемо розглядати функції $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначені в фазовому просторі змінних x_1, x_2, \dots, x_n , неперервні в деякій області D , що включає початок координат. Нехай ці функції мають в області D неперервні частинні похідні за всіма змінними і перетворюються в нуль на початку координат $V(0, 0, \dots, 0) = 0$. Введемо наступні визначення.

1. **Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається знаковизначеною** в області D , якщо ні в одній точці цієї області вона не має нульового значення і в усій області має величини одного знака. Звідси, знаковизначені функції в області D можуть бути додатновизначеними і від'ємновизначеними.

2. **Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається знакопостійною** в області D , якщо в деяких точках цієї області вона має нульові значення, а в решті точок області має величини одного знака. Знакопостійні функції в області D можуть бути не від'ємними і не додатними.

3. **Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається знакозмінною** в області D , якщо в цій області вона має і додатні і від'ємні значення.

Оскільки будемо розглядати тільки такі функції, які неперервні в деяких областях простору x_1, x_2, \dots, x_n і мають нульові значення на початку координат, наведемо видозмінені визначення наступним чином.

Наприклад, функція:

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

в тривимірному просторі, безумовно, додатна в області D , що співпадає з усім простором. Функція:

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$$

знакопостійна у тривимірному просторі, оскільки вона перетворюється на нуль не тільки, якщо $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$; але й

якщо $x_3 = 0$; і $x_1 = -x_2$.

Функція:

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

знакопостійна у тривимірному просторі, оскільки перетворюється в нуль, якщо $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; і довільна x_3 , але знаковмінна у двовимірному просторі змінних x_1, x_2 .

Функція:

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

очевидно, знаковмінна.

Функціями Ляпунова називаються функції змінних x_1, x_2, \dots, x_n кожна з яких в деякій n -мірній області, що містить початок координат цього простору, є знаковизначеною, знакопостійною або знаковмінною в сенсі вище наведених визначень 1, 2, 3 і в цій області має безперервні частинні похідні першого порядку за змінними x_1, x_2, \dots, x_n .

Функції Ляпунова позначаємо $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Виходячи з безперервності частинних похідних, зазначимо такі найважливіші **властивості функцій Ляпунова**.

1) Кожна **функція Ляпунова** диференційована в області, що розглядається, тобто, **в кожній точці цієї області має повний диференціал**.

2) Позначаючи одиничні вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ (орти) осей x_1, x_2, \dots, x_n , можемо написати:

$$\text{grad}V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \bar{e}_n.$$

В усій області, що розглядається, градієнт функції Ляпунова є безперервною векторною функцією. Вектори градієнта функції, як відомо, напрямлені за нормаллю до ліній або поверхонь рівня цієї функції у бік її зростання.

Таким чином, питання про стійкість незбуреного руху вирішується на основі дослідження поведінки функцій $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і їхніх похідних за часом.

При цьому слід враховувати, що змінні x_1, x_2, \dots, x_n є

розв'язками диференціальних рівнянь збуреного руху.

Вивчення поведінки функцій $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вздовж траєкторій точок дозволяє дійти висновку про поведінку траєкторій досліджуваної динамічної системи, тобто, вирішувати питання про стійкість або нестійкість руху.

Нехай функція $V=V(x)$ неперервна разом із похідними першого порядку, крім того, допустимо, що вона знаковизначена. Тоді, якщо $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$, вона матиме ізольований екстремум, звідси, всі частинні похідні першого порядку, обчислені в цій точці, будуть рівні нулю (необхідні умови існування екстремуму):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (4.554)$$

Розкладемо функцію Ляпунова V в ряд Маклорена за степенями x_1, x_2, \dots, x_n

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right)_0 x_k x_i + \dots,$$

де точками позначені члени вищого порядку. Враховуючи співвідношення (4.552) і (4.554), отримаємо:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ki} x_k x_i + \dots \quad (4.555)$$

Тут стали числа $C_{ki} = C_{ik}$ визначені рівностями:

$$C_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right)_0. \quad (4.556)$$

Формула (4.555) свідчить, що розкладання знаковизначеної функції V в ряд за степенями x_1, x_2, \dots, x_n не містить членів першого степеня.

Загальних критеріїв для визначення знаковизначеності і знаковмінності функцій немає. Порівняно просто вирішується це питання у випадку однорідних функцій. Як відомо, однорідною

функцією або формою порядку m називають функцію, для якої має місце рівність:

$$V(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k^m V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо функція V буде знаковизначеною в околі початку координат, то вона знаковизначена в усьому просторі.

Форма може бути тільки знаковизначеною, якщо m парне, звідси, форма парного порядку завжди є знаковмінною функцією.

Особливо просто вирішується питання про знаковизначеність квадратичних форм.

Нехай квадратична форма:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_{kl} x_k x_l \quad (4.557)$$

приймає додатні значення і перетворюється в нуль, якщо тільки $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Тоді незалежно від членів вишого порядку за достатньо малими за модулем x_i функція V буде приймати теж додатні значення і на нуль вона буде перетворюватись, якщо тільки $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Таким чином, якщо квадратична форма (4.557) строго додатна, то й функція V теж саме буде строго додатна.

Розглянемо матрицю коефіцієнтів квадратичної форми (4.557):

$$\left\| \begin{array}{cccc} \boxed{C_{11}} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \boxed{C_{22}} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & \boxed{C_{33}} & \dots & C_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{array} \right\|$$

і складемо з неї n головних діагональних мінорів (у матриці вони окантовані пунктиром):

$$\Delta_1 = C_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.558)$$

Відповідно до критерію Сильвестра, щоб квадратична форма була строго додатна, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ матриці її коефіцієнтів були додатні:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (4.559)$$

Квадратична форма буде строго від'ємною, якщо

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots \quad (4.560)$$

Оскільки питання про знаковизначеність квадратичної форми вирішується достатньо просто, то під час побудов функцій Ляпунова за основу зазвичай беруть знаковизначену квадратичну форму, а у випадку необхідності додають до неї форми більш високих порядків. Отримана таким чином функція буде мати ті ж властивості знаковизначеності, що й вихідна квадратична форма. Можна також додавати і будь-яку квадратичну форму з достатньо малими коефіцієнтами.

Розглянемо функцію:

$$V = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2).$$

Розкладемо цю функцію в ряд за степенями x_1 і x_2 :

$$\sin^2 x_1 = x_1^2 + \dots, \cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots,$$

де точками позначені члени, що містять x_1, x_2 в степені вище другої.

Вносячи ці вирази для $\sin^2 x_1$ і $\cos(x_1 - x_2)$ в функцію V , отримуємо:

$$V = 1 + x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots \Rightarrow V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \dots$$

Складемо матрицю коефіцієнтів квадратичної частини функції V (за головною діагоналлю стоять коефіцієнти до квадратів змінних), елементи C_{12} и C_{31} рівні половині коефіцієнта до добутку $x_1 \cdot x_2$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо тепер головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Оскільки всі $\Delta_i > 0$, то нерівності Сильвестра виконані, і функція V , що розглядається, буде строго додатна.

4.7.16. Геометрична інтерпретація функцій Ляпунова

Функції Ляпунова є додатновизначеними скалярними функціями $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і мають, як відомо, наступні властивості:

а) функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ безперервна разом із усіма своїми частинними похідними першого порядку в деякій відкритій області D , що містить початок координат;

б) $V(0) = 0$;

в) всюди всередині області D , крім початку координат, функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ додатна.

Таким чином, функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не від'ємна всюди всередині D і перетворюється на нуль тільки на початку координат, де має ізольований мінімум.

Оскільки $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має частинні похідні першого порядку, то існує $\text{grad}V$. Вздовж траєкторії системи виконується рівність:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= x \cdot \text{grad}V. \\ \text{grad}V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right), \\ X = \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) = v \end{aligned}$$

Вектор X є вектором швидкості, з якою зображувальна точка рухається за фазовою траєкторією (рис. 4.97).

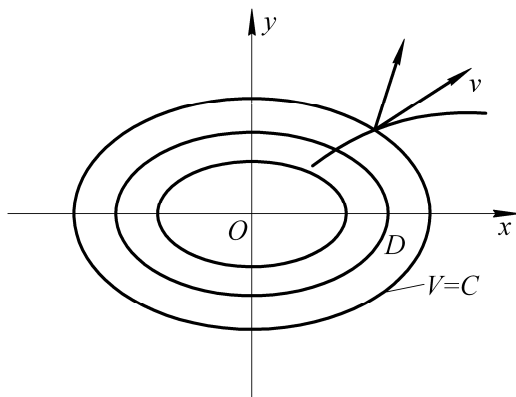


Рис. 4.97

Таким чином,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Оскільки скалярний добуток двох векторів рівний добутку довжини одного з векторів на проекцію другого вектора за напрямом першого, то, очевидно, напрям вектора $\text{grad}V$ збігається з напрямом зовнішньої нормалі до поверхні однакового рівня $V = C$ (рис. 4.97).

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad}V |v_n|,$$

де V_n – проекція швидкості V на нормаль до поверхні однакового рівня.

Крім наведених вище властивостей функції Ляпунова за позначками a , b , в справедлива ще і четверта властивість:

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \text{ всюди в області } D.$$

Щоб з'ясувати геометричний зміст функції $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, введемо нову координату $z=V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і розглянемо цю поверхню

у просторі змінних x_1, x_2, \dots, x_n, z , або, коротше, в $\sum_{x,z}^{n+1}$. Для наочності розглянемо випадок $n=2$ і координати x_1, x_2 позначимо через x, y . Опишемо тепер поведження поверхні $z=V(x, y)$ поблизу початку координат припустивши, що V – додатновизначена функція. Оскільки $V \geq 0$ для малих x, y , і $V=0$ тільки для $x=y=0$, то поверхня $V(x, y)$ нагадує в загальних рисах ввігнуте вверх параболічне дзеркало або піалу, що стоїть на столі. Для стислості назвемо таку поверхню чашею (рис. 4.98). Якщо V від’ємновизначена функція, то чаша розташована вверх дном (таким було б відображення піали, що стоїть на дзеркальному столі). У випадку n -мірного простору буде аналогічне положення, причому поверхня $z = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ буде n -мірною чашею.

Можна ще наступним чином тлумачити функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Нехай знову $n=2$, а x і y – звичайні декартові координати. Тоді лінії рівня $V(x,y)=C$ представляють собою сімейство замкнених кривих, що оточують початок координат (рис. 4.98).

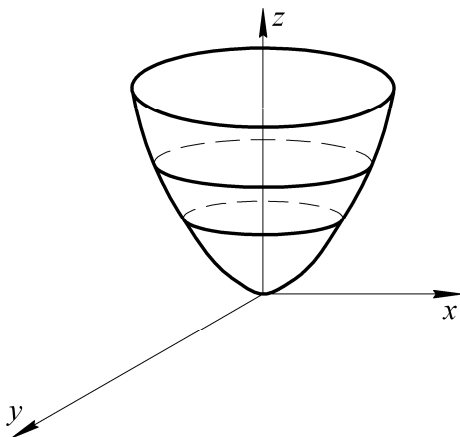


Рис. 4.98

Ці криві можна уявити як проекції на площину x, y (тобто, на площину $z = 0$) ліній перетину описаної вище чаші

горизонтальними площинами. Якщо $n > 2$ інтерпретація буде такою самою.

4.7.17. Перша теорема Ляпунова про стійкість руху

Якщо для системи (4.553) рівнянь збуреного руху можна знайти знаковизначену в області D функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, повна похідна якої за часом, взята в силу рівнянь збуреного руху, є знакопостійною функцією знака, протилежного знаку функції V , або тотожно рівна нулю, то незбурений рух є стійкий.

Нехай функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є знаковизначеною і додатною, а виходячи з умов теореми, повна похідна функції V за часом, взята в силу рівнянь збуреного руху, знакопостійна, від'ємна:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i \leq 0.$$

За достатньо малими значеннями C поверхні однакового рівня $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ в цьому випадку є замкненими. Якщо $C_j \leq C_k$, то поверхня $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежить всередині поверхні $V = C_k$.

Оскільки $\frac{dV}{dt} \leq 0$, то проекція v_n швидкості зображувальної точки на нормаль до поверхні також або від'ємна, або рівна нулю $v_n \leq 0$.

Таким чином, вектор v швидкості руху зображувальної точки за фазовою траєкторією напрямлений або всередину поверхні рівня, або за дотичною до цієї поверхні.

Звідси, зображувальна точка, яка знаходиться на поверхні $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, буде рухатися на поверхні або всередину поверхні, наближаючись до початку координат.

На рис. 4.99 показані поверхні однакового рівня у випадку, коли $n = 2$. У точці A_1 $v_n < 0$ і вектор V напрямлений всередину поверхні $V = C_k$. У точці A_2 $v_n = 0$ вектор V напрямлений за дотичною до поверхні $V = C_j$.

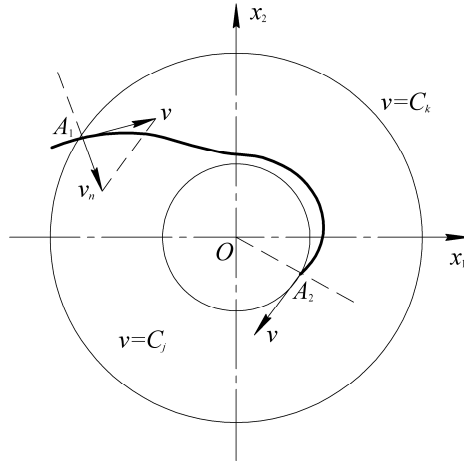


Рис. 4.99

За достатньо малого C можна зробити норму $\|x\|$ вектора x скільки завгодно малою¹. Таким чином, в даному випадку незбурений рух є стійкий.

Ця теорема не дозволяє судити про характер стійкості: чи буде рух просто стійкий або асимптотично стійкий.

4.7.18. Друга теорема Ляпунова про стійкість руху

Якщо для системи (4.553) диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти знаковизначену в області D функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, повна похідна якої за часом, взята в силу рівнянь збуреного руху, є функція також знаковизначена, знака, протилежного знаку функції V , то незбурений рух стійкий асимптотично.

¹ Норма вектора x дає можливість визначити близькість точок у фазовому просторі. Як норму можна взяти, наприклад, довжину вектора $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ або інші величини, наприклад, $\|x\| = \max |x_i|$, $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Нехай $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є чітко додатною функцією. Тоді за умови теореми повна похідна від V за часом так само строго додатна:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i < 0.$$

Звідси, проекція швидкості v зображувальної точки на нормаль до поверхні однакового рівня від'ємна: $v_n < 0$ (знак рівності виключається). Зображувальна точка рухається всередину поверхонь $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_k$, наближаючись необмежено до початку координат. Рис. 4.100 відповідає цьому випадку для двовимірного фазового простору.

Норма $\|x\|$ вектора x наближається до нуля і незбурений рух є асимптотично стійкий.

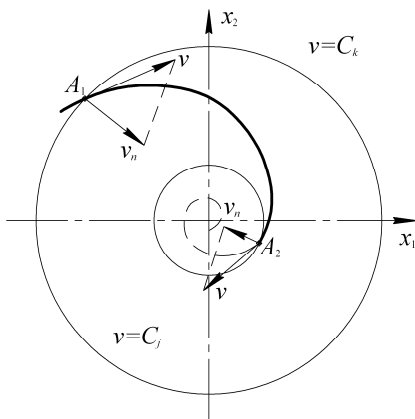


Рис. 4.100

4.7.19. Перша теорема Ляпунова про нестійкість руху

Якщо для системи (4.553) диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти таку функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що її повна похідна за часом, взята в силу рівнянь збуреного руху, є функція знаковизначена, а сама функція V не є знакосталою, знака, протилежного знаку $\frac{dV}{dt}$, то незбурений рух нестійкий.

Допустимо, що повна похідна від V за часом t , взята в силу рівнянь збуреного руху, буде знаковизначеною додатною функцією:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i > 0$$

і функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у деякій області, що має границю, яка проходить через початок координат, також додатна. Тоді поверхні однакового рівня $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_k$ розміщуються так, як це зображено для двовимірного простору на рис. 4.101.

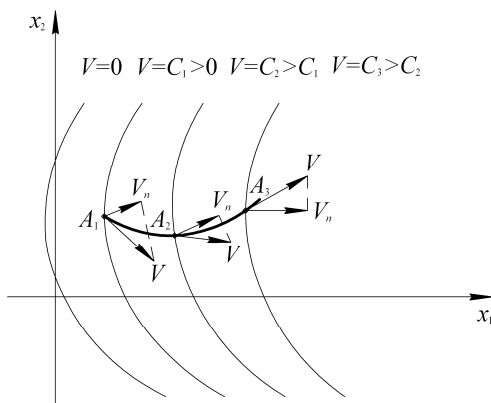


Рис. 4.101

Приймаємо, що $0 < C_1 < C_2 < C_3 < \dots$. Відповідно до теореми можна дійти висновку, що v_n напрямлена в бік збільшення значень функцій V , якщо початкове положення зображувальної точки знаходиться в області $V > 0$. Зображувальна точка переміщується з поверхні $V = C_1$ на поверхню $V = C_2$, з поверхні C_2 на поверхню C_3 і т. д. Звідси, ця точка необмежено віддаляється від початку координат і норма $\|x\|$ вектора x зростає. Звідси, незбурений рух є нестійкий.

4.7.20. Друга теорема Ляпунова про нестійкість руху

Якщо існує обмежена функція V , похідна якої зводиться до вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = \sigma V + W,$$

де σ – додатна стала, а W або тотожна нулю, або знакопостійна, і якщо в останньому випадку при $t = t_0$ і довільному малому $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ знайдуться точки x , для яких V має знак W , то незбурений рух є нестійкий².

Тут W розглядається як функція часу t в якому-небудь збуреному русі:

$$V = e^{\sigma(t-t_0)} \left[\int_{t_0}^t \bar{e}^{\sigma(t-t_0)} W dt + V_0 \right]. \quad (4.561)$$

4.7.21. Приклади побудови функцій Ляпунова

Приклад 4.61

Дослідимо стійкість рівноваги колісного екіпажа. Маса системи m , а момент інерції відносно поперечної осі, що проходить через центр мас, рівний mr^2 .

Спочатку складемо канонічні рівняння збуреного руху екіпажа, розглядаючи тільки поздовжні коливання. Під час коливання його положення визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра ваги і кутом повороту кузова Θ (рис. 4.36).

Кінетична енергія колісного екіпажа:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2).$$

Потенціальна енергія деформації ресор:

$$\Pi = c_{\Pi} (y + a\Theta)^2 + c_3 (y - b\Theta)^2.$$

² За t_0 обирають момент часу, з якого виконується знакопостійність W .

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) - [c_n(y + a\Theta)^2 + c_3(y - b\Theta)^2].$$

Обчислимо узагальнені імпульси

$$p_1 = \frac{dL}{d\dot{y}} m\dot{y}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mr^2\dot{\Theta}.$$

Функція Гамільтона за формулою:

$$H = p_1\dot{y} + p_2\dot{\Theta} - \left\{ \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) - [c_n(y + a\Theta)^2 + c_3(y - b\Theta)^2] \right\}.$$

Підставимо в цей вираз значення імпульсів p_1 і p_2 :

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + [c_n(y + a\Theta)^2 + c_3(y - b\Theta)^2].$$

Звідси, канонічні рівняння збуреного руху колісного екіпажа запишуться у формі:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \dot{y} = \frac{p_1}{m}; \quad \dot{p}_1 = -2[c_n(y + a\Theta) + c_3(y - b\Theta)]; \\ \dot{\Theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta}; \quad \dot{\Theta} = \frac{p_2}{mr^2}; \quad \dot{p}_2 = -2[c_n(y + a\Theta)a - c_3(y - b\Theta)b]. \end{aligned}$$

За функцію Ляпунова оберемо гамільтоніан

$$V = H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + [c_n(y + a\Theta)^2 + c_3(y - b\Theta)^2].$$

Візьмемо повну похідну від $V = H$ за часом

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2.$$

За канонічними рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = -4 \left\{ \frac{p_1}{m} [c_{\Pi}(y + a \Theta) + c_3(y - b \Theta)] + \right. \\ \left. + \frac{p_2}{mr^2} \cdot [c_{\Pi}(y + a \Theta)a - c_3(y - b \Theta)b] \right\}$$

або

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

З першої теореми Ляпунова випливає, що незбурений рух колісного екіпажа стійкий.

Приклад 4.62

Досліджуємо стійкість руху колісного трактора на пневматичних шинах. Розглянемо випадок, коли передня вісь трактора є підресореною (рис. 4.50), а деформація шин не враховується.

Кінетична енергія колісного трактора:

$$T = \frac{m}{2} (y^2 + r^2 \dot{\Theta}^2).$$

Потенціальна енергія деформації передніх ресор:

$$P = c_{\Pi} (y + a \Theta)^2,$$

де a – відстань центра ваги трактора від передніх коліс.

Функція Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2) - c_{\Pi} (y + a \Theta)^2.$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mr^2 \dot{\Theta}.$$

Функція Гамільтона:

$$H = p_1 \dot{y} + p_2 \dot{\Theta} - \left[\frac{m}{2} (\dot{y}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2) - c_{\Pi} (y + a \Theta)^2 \right].$$

Після деяких перетворень, отримуємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + c_n(y + \Theta a)^2.$$

Канонічні рівняння збуреного руху колісного трактора:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \dot{y} = \frac{p_1}{m}; \quad \dot{p}_1 = -2c_n(y + a\Theta); \\ \dot{\Theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta}; \quad \dot{\Theta} = \frac{p_2}{mr^2}; \quad \dot{p}_2 = -2c_n(y + a\Theta)a. \end{aligned}$$

За функцію Ляпунова оберемо гамільтоніан:

$$V = H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + c_n(y + a\Theta)^2.$$

Повна похідна від V за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2.$$

За канонічними рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = -4c_n \left[\frac{p_1}{m} + \frac{ap_2}{mr^2} \right] (y + a\Theta) \text{ або } \frac{dV}{dt} < 0.$$

Звідси, незбурений рух колісного трактора стійкий.

Приклад 4.63

Досліджуємо стійкість руху комбайна (рис. 4.51).

Раніше зазначалося, що остов комбайна є не підресореною масою, а шини його виконують роль демпфірувальних елементів.

Складемо канонічні рівняння збуреного руху комбайна.

Кінетична енергія комбайна:

$$T = \frac{1}{2} [m(\dot{y}_1^2 + r^2\dot{\Theta}^2) + 2m_1\dot{y}_2^2 + 2m_2\dot{y}_3^2].$$

Потенціальна енергія деформації шин:

$$\Pi = c_{\text{ш}} \left(y_2^2 + y_3^2 \right)^2,$$

де $c_{\text{ш}}$ – коефіцієнт жорсткості шин.

Функція Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \left[m \left(\dot{y}_1^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 \right) + 2m_1 \dot{y}_2^2 + 2m_2 \dot{y}_3^2 \right] - c_{\text{ш}} \left(y_2^2 + y_3^2 \right)$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m \dot{y}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mr^2 \dot{\Theta}; \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = 2m_1 y_2; \quad p_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = 2m_2 y_3.$$

Функцію Гамільтона визначаємо за формулою:

$$H = p_1 \dot{y}_1 + p_2 \dot{\Theta} + p_3 \dot{y}_2 + p_4 \dot{y}_3 - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\dot{y}_1^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 \right) m + 2m_1 \dot{y}_2^2 + 2m_2 \dot{y}_3^2 \right] - c_{\text{ш}} \left(y_2^2 + y_3^2 \right) \right\}.$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{p_3^2}{m_k} + \frac{p_4^2}{m_k} + c_{\text{ш}} \left(y_2^2 + y_3^2 \right).$$

Звідси, канонічні рівняння збуреного руху комбайна:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}; & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0; \\ \dot{\Theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2}; & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0; \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_k}; & \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -2c_{\text{ш}} y_2; \\ \dot{y}_3 &= \frac{\partial H}{\partial p_4} = \frac{p_4}{m_k}; & \dot{p}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial y_3} = 2c_{\text{ш}} y_3. \end{aligned}$$

За функцію Ляпунова візьмемо гамільтоніан:

$$V = H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{p_3^2}{m_k} + \frac{p_4^2}{m_k} + c_{\text{ш}} \left(y_2^2 + y_3^2 \right).$$

Повна похідна від V за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial H}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial H}{\partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial H}{\partial y_3} \dot{y}_3 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3} \dot{p}_3 + \frac{\partial H}{\partial p_4} \dot{p}_4.$$

За канонічними рівняннями збуреного руху отримаємо:

$$\frac{dV}{dt} = -4 \frac{c_{\text{ш}}}{m} (p_3 y_2 + p_4 y_3) \text{ або } \frac{dV}{dt} < 0.$$

Звідси, незбурений рух комбайна стійкий.

Приклад 4.64

Дослідити стійкість руху ротора електричного генератора з приводом (рис. 4.102).

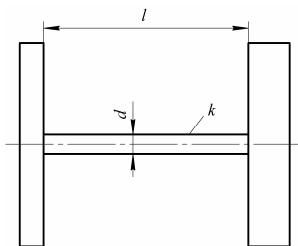


Рис. 4.102

Момент інерції маси ротора генератора I_1 , а момент інерції привода I_2 . Узагальнені координати: кути повороту ротора генератора і привода від положення рівноваги Θ_1 і Θ_2 . Коефіцієнт

крутильної жорсткості вала на ділянці між дисками $k = \frac{GI_p}{l}$,

де I_p – полярний момент інерції поперечного перетину вала.

Кінетична енергія системи генератор – привід:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}_2^2.$$

Потенціальна енергія кручення вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k (\Theta_2 - \Theta_1)^2.$$

Функція Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\Theta}_1^2 + I_2 \dot{\Theta}_2^2] - \frac{k}{2} (\Theta_2 - \Theta_1)^2.$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} = I_1 \dot{\Theta}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} = I_2 \dot{\Theta}_2.$$

Функція Гамільтона за формулою:

$$H = p_1 \dot{\Theta}_1 + p_2 \dot{\Theta}_2 - \left[\frac{1}{2} (I_1 \dot{\Theta}_1^2 + I_2 \dot{\Theta}_2^2) - \frac{k}{2} (\Theta_2 - \Theta_1)^2 \right].$$

Підставимо в останній вираз значення імпульсів p_1 і p_2 . Після деяких перетворень дістанемо:

$$H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{k}{2} (\Theta_2 - \Theta_1)^2.$$

Звідси, система канонічних рівнянь:

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \dot{\Theta}_1 = \frac{p_1}{I_1}; \quad \dot{p}_1 = k(\Theta_2 + \Theta_1);$$

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \dot{\Theta}_2 = \frac{p_2}{I_2}; \quad \dot{p}_2 = -k(\Theta_2 + \Theta_1).$$

За функцію Ляпунова оберемо гамільтоніан:

$$V = H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{k}{2} (\Theta_2 - \Theta_1)^2.$$

Повна похідна від V за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Theta_1} \dot{\Theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \Theta_2} \dot{\Theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2.$$

За канонічними рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Звідси, незбурений рух системи генератор – привод є стійкий.

Приклад 4.64

Дослідити стійкість руху трансмісійного вала з вільними кінцями, що несе три зосереджених махових маси з моментами інерції I_1, I_2, I_3 (рис. 4.39). Коефіцієнт жорсткості окремих ділянок вала k_1, k_2 , відповідно. Під час руху махові маси повертаються від положення рівноваги на кути $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ (узагальнені координати).

Кінетична енергія обертових мас:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\Theta}_3^2.$$

Потенціальна енергія кручення ділянок вала:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\Theta_2 - \Theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Theta_3 - \Theta_2)^2.$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\Theta}_1^2 + I_2 \dot{\Theta}_2^2 + I_3 \dot{\Theta}_3^2] - \frac{1}{2} [k_1 (\Theta_2 - \Theta_1)^2 + k_2 (\Theta_3 - \Theta_2)^2].$$

Узагальнені імпульси:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} = I_1 \dot{\Theta}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} = I_2 \dot{\Theta}_2; \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_3} = I_3 \dot{\Theta}_3.$$

Функція Гамільтона за виразом:

$$H = p_1 \Theta_1 + p_2 \Theta_2 + p_3 \Theta_3 - \left\{ \frac{1}{2} (I_1 \dot{\Theta}_1^2 + I_2 \dot{\Theta}_2^2 + I_3 \dot{\Theta}_3^2) - \frac{1}{2} [k_1 (\Theta_2 - \Theta_1)^2 + k_2 (\Theta_3 - \Theta_2)^2] \right\}.$$

Підставимо замість імпульсів p_1, p_2, p_3 їх значення. Після деяких перетворень отримаємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{p_3^2}{2I_3} + \frac{1}{2} [k_1 (\Theta_2 - \Theta_1)^2 + k_2 (\Theta_3 - \Theta_2)^2].$$

Звідси, система канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{I_1}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta_1} = -k_1(\Theta_2 - \Theta_1); \\ \dot{\Theta}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I_2}; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta_2} = -k_1(\Theta_2 - \Theta_1) - k_2(\Theta_3 - \Theta_2); \\ \dot{\Theta}_3 &= \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{I_3}; \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta_3} = -k_2(\Theta_3 - \Theta_2).\end{aligned}$$

Як функцію Ляпунова візьмемо гамільтоніан:

$$V = H = \frac{p_1^2}{2I_1} + \frac{p_2^2}{2I_2} + \frac{p_3^2}{2I_3} + \frac{1}{2} [k_1(\Theta_2 - \Theta_1)^2 + k_2(\Theta_3 - \Theta_2)^2].$$

Повна похідна від V за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Theta_1} \dot{\Theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \Theta_2} \dot{\Theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial \Theta_3} \dot{\Theta}_3 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3} \dot{p}_3.$$

За канонічними рівняннями збуреного руху маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -2 \left\{ \frac{p_1}{I_1} k_1(\Theta_2 - \Theta_1) + \frac{p_2}{I_2} [k_1(\Theta_2 - \Theta_1) + k_2(\Theta_3 - \Theta_2)] + \frac{p_3}{I_3} k_2(\Theta_3 - \Theta_2) \right\} \\ &\quad \frac{dV}{dt} < 0.\end{aligned}$$

Отже, незбурений рух трансмісійного вала є стійкий.

Приклад 4.65

Перевірити стійкість руху циліндричного вала з диском, один кінець якого закріплений нерухомо (рис. 4.103).

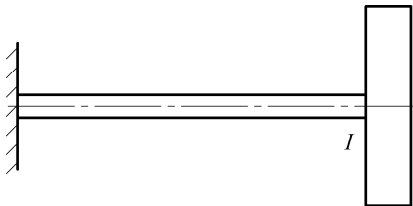


Рис. 4.103

Момент інерції диска I , а коефіцієнт жорсткості вала на кручення k . За узагальнену координату прийемо кут повороту диска Θ .

Кінетична і потенціальна енергії:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} k \Theta^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}.$$

Підставляючи значення похідних від T і Π , маємо:

$$\ddot{\Theta} + \frac{k}{I} \Theta = 0.$$

Отримано диференціальне рівняння коливального руху вала з диском. Допустимо, що $\Theta = x_1$; $\dot{\Theta} = x_2$. Тоді в нових змінних диференціальне рівняння збуреного руху вала з диском буде еквівалентне системі двох рівнянь першого порядку (рівняння Коші):

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{I} x_1.$$

Як функцію Ляпунова візьмемо повну механічну енергію системи:

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} k \Theta^2.$$

Запишемо функцію Ляпунова в нових змінних:

$$V = \frac{1}{2} I x_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2.$$

Повна похідна від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2.$$

За рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Відповідно до теореми Ляпунова рух вала з диском є стійкий.

Приклад 4.66

Перевірити стійкість руху тіла, закріпленого пружиною до нерухомої точки A (рис. 4.33).

Пряма, на якій рухається тіло M , абсолютно гладка. Маса тіла m , а коефіцієнт жорсткості пружини c . За узагальнену координату прийнято відстань x .

Кінетична енергія тіла:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Потенціальна енергія пружини:

$$\Pi = \frac{1}{2} c x^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Після підстановки значень похідних від T і Π маємо диференціальне рівняння руху тіла:

$$m \ddot{x} + cx = 0.$$

Замінімо це рівняння системою двох рівнянь збуреного руху в канонічній формі:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{c}{m} x_1.$$

Як функцію Ляпунова візьмемо повну механічну енергію системи:

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c x^2.$$

Функція Ляпунова в нових змінних:

$$V = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}cx_1^2.$$

Повна похідна від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2.$$

За рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Звідси, за Ляпуновим, рух тіла є стійкий.

Приклад 4.67

Перевірити стійкість руху котка, закріпленого на пружині до нерухокої точки A (рис. 104). Кочення котка відбувається без ковзання. Маса котка m , жорсткість пружини c . Система має один ступінь вільності, за узагальнену координату приймаємо відстань x .

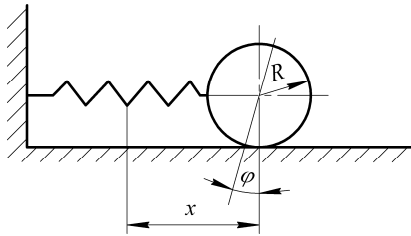


Рис. 104

Кінетична енергія плоского руху котка:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$

де I – момент інерції котка відносно осі обертання.

Потенціальна енергія пружини:

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду для цієї системи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Підставляючи в останнє рівняння похідні від T і Π , маємо:

$$\left(\frac{I}{R^2} + m \right) \ddot{x} + cx = 0.$$

Представимо це рівняння в нормальній формі Коші і дістанемо диференціальні рівняння збуреного руху

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-c}{\frac{I}{R^2} + m} x_1.$$

Як функцію Ляпунова візьмемо повну механічну енергію системи:

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} cx^2.$$

Запишемо функцію Ляпунова в нових змінних:

$$V = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) x_2^2 + \frac{1}{2} cx_1^2.$$

Повна похідна від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2.$$

За рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Звідси, за Ляпуновим, рух котка є стійкий.

Приклад 4.68

Дослідити стійкість руху колісного екіпажа. Будемо розглядати тільки поздовжні коливання екіпажа. В процесі коливань його положення визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра ваги і кутом повороту кузова Θ (рис. 4.36). Коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор c_{II}, c_3 .

Кінетична енергія колісного екіпажа під час коливального руху:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2),$$

де r – радіус інерції кузова відносно поперечної осі.

Потенціальна енергія деформації ресор підвіски:

$$\Pi = c_{II}(y + a\Theta)^2 + c_3(y + b\Theta)^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}. \end{aligned}$$

Підставляючи значення похідних від T і Π у ці рівняння, отримаємо диференціальні рівняння руху екіпажа:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + 2c_{II}(y + a\Theta) + 2c_3(y - b\Theta) &= 0; \\ mr^2\ddot{\Theta} + 2c_{II}(y + a\Theta)a + 2c_3(y - b\Theta)b &= 0. \end{aligned}$$

Подамо ці рівняння в нормальній формі Коші і отримаємо диференціальні рівняння збуреного руху екіпажа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}[2c_{II}(x_1 + ax_3) + 2c_3(x_2 - bx_3)]; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \quad \dot{x}_4 = -\frac{1}{mr^2}[2c_{II}(x_1 + ax_3)a - 2c_3(x_1 - bx_3)b]. \end{aligned}$$

За функцію Ляпунова оберемо повну механічну енергію:

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) + c_n(y + a\Theta)^2 + c_3(y - b\Theta)^2.$$

Запишемо функцію Ляпунова в нових змінних:

$$V = \frac{1}{2}m(x_2^2 + r^2x_4^2) + c_n(x_1 + ax_3)^2 + c_3(x_1 - bx_3)^2.$$

Повна похідна від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial V}{\partial x_4}\dot{x}_4.$$

За рівняннями збуреного руху маємо:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \text{ (рух стійкий).}$$

Приклад 4.69

Дослідимо стійкість стаціонарного руху регулятора прямої дії (рис. 4.95) за допомогою теореми Рауса [20] і другої теореми про нестійкість руху Ляпунова.

Кінетична енергія регулятора виражається формулою:

$$T = I^2(m + 2M \sin^2 \Theta) \dot{\Theta}^2 + ml^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta.$$

Потенціальна енергія регулятора:

$$\Pi = -2(m + M)gl \cos \Theta.$$

Координата ψ є циклічною, оскільки вона не входить у вирази кінетичної і потенціальної енергій. Складемо циклічний інтеграл:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2ml^2\dot{\psi} \sin^2 \Theta = C.$$

Звідси, знайдемо циклічну швидкість:

$$\dot{\psi} = \frac{C}{2ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Виключаємо циклічну швидкість із формули кінетичної енергії:

$$T = l^2(m + 2M \sin^2 \Theta) \dot{\Theta}^2 + \frac{C^2}{4ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Складемо функцію Рауса за формулою:

$$R = T - C\dot{\psi}.$$

Підставивши в цю формулу значення \bar{T} і $\dot{\psi}$, отримаємо:

$$R = l^2(m + 2M \sin^2 \Theta) \dot{\Theta}^2 - \frac{C^2}{4ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Відповідно до загальної теорії маємо:

$$R_2 = l^2(m + 2M \sin^2 \Theta) \dot{\Theta}^2; R_1 = 0; R_0 = -\frac{C^2}{4ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Складемо потенціальну енергію зведеної системи:

$$W = \Pi - R_0 = -2(m + M)gl \cos \Theta + \frac{C^2}{4ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Для стаціонарного руху регулятора маємо:

$$\Theta = \alpha, \quad \dot{\psi} = \omega.$$

Умова здійснення стаціонарного руху:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\alpha} = 2(m + M)gl \sin \alpha - \frac{C^2 \cos \alpha}{2ml^2 \sin^2 \alpha} = 0,$$

звідси після перетворень знайдемо:

$$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{C^2}{4(m+M)ml^3 g}.$$

Кутова швидкість відцентрового регулятора:

$$\omega = \frac{C}{2ml^2 \sin^2 \alpha}.$$

Виключаючи з цього виразу параметр «C», знайдемо:

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{m+M}{m} \frac{g}{l}.$$

Це є умовою стаціонарного руху регулятора. Тепер приймемо стаціонарний рух відцентрового регулятора за незбурений.

Відповідно до загальної теорії припустимо $\Theta = \alpha + x$. Внесемо значення Θ у вираз для функції W :

$$W = -2(m+M)gl \cos(\alpha+x) + \frac{C^2}{4ml^2 \sin^2(\alpha+x)}.$$

Розкладемо різницю $W - W_0$ у ряд за степенями x :

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \Theta} \right)_{\Theta=\alpha} x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Theta^2} \right)_{\Theta=\alpha} x^2 + \dots$$

У стаціонарному русі всі позиційні координати зберігають сталі значення. Звідси, враховуючи ці умови, дістанемо:

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \Theta^2} \right)_{\Theta=\alpha} \cdot x^2 + \dots$$

Обчислюючи похідну, знайдемо:

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left[2(m+M)gl + \frac{C^2(\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha)}{4ml^2 \sin^4 \alpha} \right] x^2 + \dots$$

Як бачимо, множник до x^2 є додатним, тому функція « W » має в стаціонарному русі мінімум. На підставі теореми Рауса –

Ляпунова стаціонарний рух відцентрового регулятора є стійкий відносно параметрів $\Theta, \dot{\Theta}, \psi$.



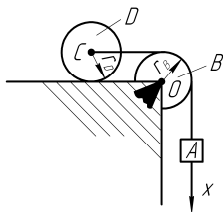
ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке функція Ляпунова? Які вона має властивості?
2. Які умови має задовольняти функція Ляпунова?
3. У чому полягає критерій Сильвестра?
4. У чому суть теореми Ляпунова про стійкість руху?
5. У чому суть теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість руху?
6. Як формулюються теореми Ляпунова про нестійкість незбуреного руху?
7. Як ви розумієте критерій Гурвіца? Складіть матрицю цього критерію і визначте діагональні мінори.
8. Наведіть приклади побудови функцій Ляпунова.
9. Чому квадратичні функції часто застосовують для функцій Ляпунова?
10. Чи зручно використовувати гамільтоніан для функцій Ляпунова?

ПРАКТИКУМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

Задача 1

Застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_A = \frac{m_B}{2} = \frac{m_D}{2} = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору нехтуємо. Кочення тіла D відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату прийемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де
$$T_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{m_B r_B^2}{2} \cdot \frac{\omega_B^2}{2} = mr_B^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \cdot \omega_D^2 = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mr_D^2 \left(\frac{\dot{x}}{r_D} \right)^2 = \\ &= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{3}{2} m\dot{x}^2; \end{aligned}$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{2} m\dot{x}^2 = \frac{5}{2} m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 5m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 5m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 5m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_A = mg; P_B = 2mg; P_D = 2mg.$

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x; \quad Q_x = mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$5m\ddot{x} = mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла A : $a_A = \ddot{x} = \frac{1}{5}g.$

Відповідь: $a_A = \frac{1}{5}g.$

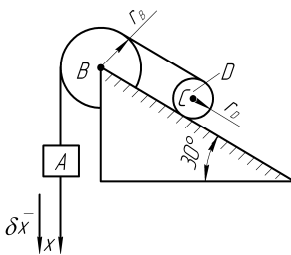
Задача 2

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_A = \frac{m_B}{2} = m_D = m.$$

Рух тіла D відбувається без проковзування.

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.



Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості \dot{x} :

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \cdot \omega_B^2 = \frac{1}{2} m r_B^2 \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m r_D^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2 r_D} \right)^2 = \\ &= \frac{m \dot{x}^2}{8} + \frac{m \dot{x}^2}{16} = \frac{3}{16} m \dot{x}^2; \end{aligned}$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16} m \dot{x}^2 = \frac{19}{16} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{19}{8} m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{19}{8} m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{19}{8} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт δA_x заданих сил на можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = mg; P_B = 2mg; P_D = mg.$

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x - mg \frac{\delta x}{2} \sin 30^\circ; \Rightarrow Q_x = \frac{3}{4} mg,$$

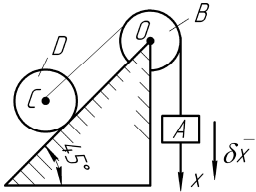
4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{19}{8} m \ddot{x} = \frac{3}{4} mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла A : $a_A = \ddot{x} = \frac{6}{19}g$.

Задача 3

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_A = m_B = \frac{m_D}{2} = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати. Кочення тіла D відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості \dot{x} :

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де
$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{m_B r_B^2}{2} \cdot \frac{\omega_B^2}{2} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_D = \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 = \frac{9}{4} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{9}{2} m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{9}{2} m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{9}{2} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт δA_x заданих сил на можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = P_B = mg; P_D = 2mg.$

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x - 2mg \sin 45^\circ \delta x = -0,4mg\delta x; \quad Q_x = -0,4mg.$$

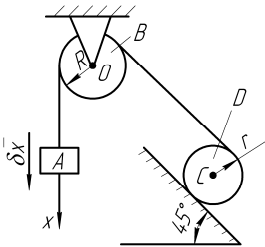
4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення і визначимо a_A :

$$\frac{9}{2} m \ddot{x} = -0,4mg \Rightarrow a_A = \ddot{x} = -0,09g.$$

Задача 4

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_A = \frac{m_B}{3} = \frac{2}{3} m_D = m.$$



Тіла B і D – однорідні круглі диски радіусів R і r . Силами опору знехтувати. Кочення тіла D відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату прийемо переміщення тіла A – x . Узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де

$$T_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R^2}{2} \cdot \frac{\omega_B^2}{2} = \frac{3mR^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \frac{3m\dot{x}^2}{4};$$

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} mr^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2r} \right)^2 = \\ &= \frac{3}{16} m\dot{x}^2 + \frac{3}{32} m\dot{x}^2 = \frac{9}{32} m\dot{x}^2; \end{aligned}$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{4} m\dot{x}^2 + \frac{9}{32} m\dot{x}^2 = \frac{49}{32} m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{49}{16} m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{49}{16} m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{49}{16} m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт δA_x заданих сил на цьому можливому переміщенні.

$$\text{Задані сили: } P_A = mg; \quad P_B = 3mg; \quad P_D = \frac{3}{2} mg.$$

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x - \frac{3}{2} mg \sin 45^\circ \frac{\delta x}{2} = mg \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \delta x = 0,47mg \cdot \delta x; \quad Q_x = 0,47mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення

$$\frac{49}{16} m\ddot{x} = 0,47mg.$$

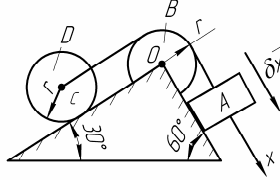
5. Визначимо шукане прискорення:

$$a_A = \ddot{x} = 0,15g.$$

Відповідь: $a_A = 0,15g$.

Задача 5

Застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють: $m_A = \frac{2}{3}m_B = \frac{2}{3}m_D = m$.



Тіла B і D – однорідні круглі диски радіусів r .

Силами опору нехтуємо. Кочення тіла D відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де
$$T_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m \frac{r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{3}{8} m \dot{x}^2 = \frac{9}{8} m \dot{x}^2; \end{aligned}$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{8} m \dot{x}^2 + \frac{9}{8} m \dot{x}^2 = 2m\dot{x}^2.$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{m_B r^2}{2} \cdot \frac{\omega_B^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{3}{8} m \dot{x}^2;$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 4m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 4m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 4m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_A = mg; P_B = \frac{3}{2}mg; P_D = \frac{3}{2}mg.$

$$\delta A_x = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \delta x - \frac{3}{2}mg \frac{1}{2} \delta x = 0,12mg \cdot \delta x; \quad Q_x = 0,12mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$4m\ddot{x} = 0,12mg.$$

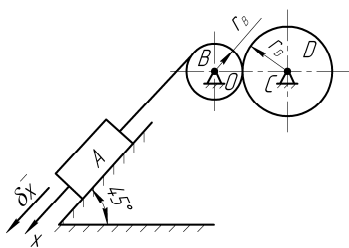
5. Визначимо прискорення тіла A:

$$a_A = \ddot{x} = 0,03g.$$

Відповідь: $a_A = 0,03g.$

Задача 6

За рівняннями Лагранжа другого роду треба визначити прискорення тіла A, якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_A = m_B = \frac{m_D}{3} = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски, силами опору нехтуємо.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. Узагальненою координатою оберемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де
$$T_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_D \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \cdot \omega_B^2 = \frac{1}{4} m r_B^2 \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{4};$$

$$T_D = \frac{I_C \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \cdot \omega_D^2 = \frac{1}{4} 2m \cdot r_D^2 \left(\frac{\dot{x}}{r_D} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{5}{4} m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{5}{2} m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{5}{2} m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x .

Обчислимо суму елементарних робіт заданих сил δA_x на можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = mg; P_B = mg; P_D = 2mg.$

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} mg \delta x; \quad Q_x = \frac{\sqrt{2}}{2} mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{5}{2} m\ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} mg.$$

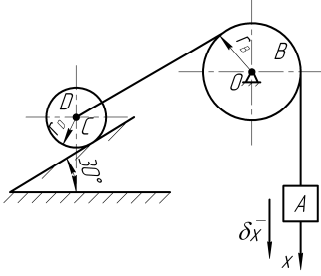
5. Визначимо шукане прискорення:

$$a_A = \ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{5} g = 0,28g.$$

Задача 7

За рівняннями Лагранжа другого роду визначити прискорення тіла A , якщо задані маси тіл дорівнюють:

$$m_A = \frac{3}{4} m_B = m_D = m.$$



Тіло D ковтається без ковзання. Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору нехтуємо.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де

$$T_A = \frac{m v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4m \dot{x}^2}{3} = \frac{m \dot{x}^2}{3};$$

$$T_D = \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_D^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m r_D^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_D} \right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{3} + \frac{3}{4} m \dot{x}^2 = \frac{19}{12} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{19}{6} m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{19}{6} m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{19}{6} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = mg$; $P_B = \frac{1}{3}mg$; $P_D = mg$.

$$\delta A_x = mg \cdot \delta x - mg \cdot \delta x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg\delta x; \quad Q_x = \frac{1}{2}mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{19}{6}m\ddot{x} = \frac{1}{2}mg.$$

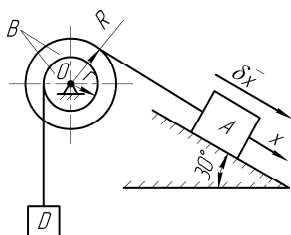
5. Визначимо прискорення тіла A :

$$a_A = \frac{3}{19}g.$$

Відповідь: $a_A = \frac{3}{19}g$.

Задача 8

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_A = \frac{m_B}{5} = m_D = m.$$

Тіло B – ступінчастий шків із радіусом інерції $\rho = r\sqrt{2}$; $R = 2r$. Силами опору нехтуємо.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймаємо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

де

$$T_A = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{m_B \rho^2 \omega_B^2}{2} = \frac{5m2r^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2r} \right)^2 = \frac{5}{4} m\dot{x}^2;$$

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{8};$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{5}{4} m\dot{x}^2 + \frac{m\dot{x}^2}{8} = \frac{15}{8} m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{15}{4} m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{15}{4} m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{15}{4} m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_A = mg$; $P_B = 5mg$; $P_D = mg$.

$$\delta A_x = mg \cdot \sin 30^\circ \delta x - mg \cdot \frac{\delta x}{2} = 0; \quad Q_x = 0.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{15}{4} m\ddot{x} = 0.$$

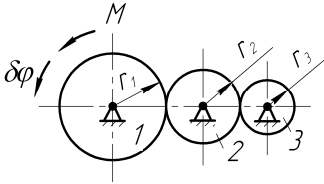
5. Визначимо прискорення тіла A : $a_A = \ddot{x} = 0$.

Відповідь: $a_A = 0$.

Задача 9

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення ε_1 ланки 1, якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_1 = 2m_2 = 3m_3 = m.$$



Тіла 1, 2, 3 – однорідні круглі диски радіусів r_1 ; r_2 ; r_3 .
 $r_1 = 1,5r_2 = 2r_3 = r$, $M = \text{const}$.

Механізм розташований в горизонтальній площині. Силами опору знехтувати.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо кут повороту ланки 1 – φ . Тоді узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де
$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{m(r/1,5)^2}{4} \cdot \frac{1}{2} (1,5\dot{\varphi})^2 = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{8};$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 r_3^2}{2} \cdot \frac{\omega_3^2}{2} = \frac{m \left(\frac{r}{2} \right)^2}{6} \cdot \frac{2\dot{\varphi}}{2} = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{12};$$

$$T = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{8} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{12} = \frac{11}{24} m r^2 \dot{\varphi}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{11}{12}mr^2\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{11}{12}mr^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{11}{12}mr^2\ddot{\varphi}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_φ на цьому можливому переміщенні $\delta\varphi$.

$$\text{Задані сили:} \quad P_1 = mg; \quad P_2 = m_2g; \quad P_3 = m_3g;$$

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{11}{12}mr^2\ddot{\varphi} = M.$$

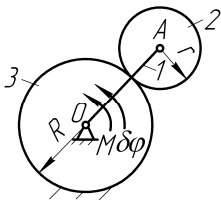
5. Визначимо кутове прискорення тіла 1:

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{12M}{11mr^2}.$$

$$\text{Відповідь: } \varepsilon_1 = \frac{12M}{11mr^2}.$$

Задача 10

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення тіла 1, якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_1 = \frac{m_2}{2} = m.$$

Тіло 1 – однорідний тонкий стрижень, тіла 2 і 3 – однорідні круглі диски радіусів r і R . $M = \text{const}$. Механізм розташований у горизонтальній площині. Силами опору знехтувати. Кочення тіла 2 відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо кут повороту ланки 1 – φ . Тоді узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де

$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{m(R+r)^2}{3} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m\dot{\varphi}^2 (R+r)^2}{6};$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{I_A \omega_2^2}{2} = \frac{2m}{2} (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2mr^2}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2 (R+r)^2}{2r^2} =$$

$$= \frac{3}{2} m(R+r)^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$T_3 = 0;$$

$$T = \frac{m}{6} \dot{\varphi}^2 (R+r)^2 + \frac{3}{2} m\dot{\varphi}^2 (R+r)^2 = \frac{5}{3} m\dot{\varphi}^2 (R+r)^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{10}{3} m\dot{\varphi} (R+r)^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{10}{3} m\ddot{\varphi} (R+r)^2;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{10}{3} m\ddot{\varphi} (R+r)^2.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_{φ} , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = mg; P_2 = m_2 g; P_3 = m_3 g;$

$$\delta A_{\varphi} = M\delta\varphi.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення і визначимо кутове прискорення тіла 1:

$$\frac{10}{3}m\ddot{\varphi}(R+r)^2 = M.$$

5. Шукане прискорення тіла 1:

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{3M}{10m(R+r)^2}.$$

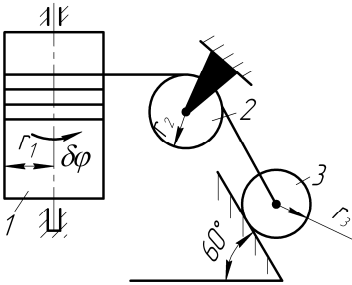
Відповідь: $\varepsilon_1 = \frac{3M}{10m(R+r)^2}.$

Задача 11

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення тіла 1, якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_1 = 3m_2 = 3m_3 = m;$$

$$r_1 = 2r_2 = 2r_3 = r.$$



Кочення тіла 3 відбувається без ковзання. Тіло 3 рухається вгору на похилій площині. Тіла 1, 2, 3 – однорідні круглі циліндри. Силами опору знехтувати.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо кут повороту ланки 1 – φ . Тоді узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де

$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{4};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varphi} r}{r/2} \right)^2 = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{12};$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_o^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m(\dot{\phi} \cdot r)^2}{3 \cdot 2} + \frac{m}{3 \cdot 2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\dot{\phi} \cdot r)^2 = \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{4};$$

$$T = \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{4} + \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{12} + \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{4} = \frac{7}{12} mr^2 \dot{\phi}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{7}{6} mr^2 \dot{\phi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{7}{6} mr^2 \ddot{\phi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{7}{6} mr^2 \ddot{\phi}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_φ на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = m_1 g; P_2 = P_3 = \frac{mg}{3};$

$$\delta A_\varphi = -\frac{mg}{3} \sin 60^\circ \cdot r \delta\varphi = -\frac{mg\sqrt{3}r}{6} \delta\varphi; \quad Q_\varphi = -\frac{mg\sqrt{3}r}{6}.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{7}{6} mr^2 \ddot{\phi} = -\frac{mg\sqrt{3}r}{6}.$$

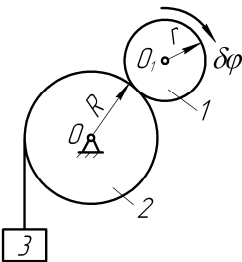
5. Визначимо кутове прискорення тіла 1: $\varepsilon_1 = \ddot{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{7r} g.$

Задача 12

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення тіла 1,

якщо $m_1 = \frac{m_2}{2} = m_3 = m, R = 2r,$

Тіла 1 і 2 – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.



Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо кут повороту ланки 1 – φ . Тоді узагальнена швидкість ланки $\dot{\varphi} = \omega_1$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$\text{де} \quad T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} \right)^2 = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} \cdot 2r \right)^2 = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} \cdot T = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} =$$
$$= \frac{5}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$T = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{5}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5}{2} m r^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{5}{2} m r^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{5}{2} m r^2 \ddot{\varphi}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = m_1 g$; $P_2 = m_2 g$; $P_3 = m_3 g$.

$$\delta A_\varphi = m g \cdot r \delta\varphi; \quad Q_\varphi = mgr.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{5}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = mgr.$$

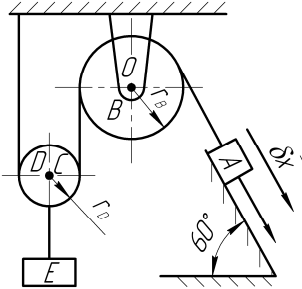
5. Визначимо кутове прискорення тіла 1: $\varepsilon_1 = \ddot{\phi} = \frac{2}{5r} g$.

Задача 13

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_A = \frac{m_B}{2} = m_D = 2m_E = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.



Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату прийемо переміщення тіла A – x .

Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості \dot{x} :

$$T = T_A + T_B + T_D + T_E,$$

де
$$T_A = \frac{m v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{m_D v_D^2}{2} + \frac{I_O \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2r_D} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{8} + \frac{m \dot{x}^2}{16} = \\ &= \frac{3}{16} m \dot{x}^2; \end{aligned}$$

$$T_E = \frac{m_E v_E^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{16}.$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16}m\dot{x}^2 + \frac{m\dot{x}^2}{16} = \frac{5}{4}m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2}m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{5}{2}m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{5}{2}m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену силу Q_x , повідомивши приріст δx узагальненій координаті x та обчисливши суму можливих робіт δA_x заданих сил на цьому можливому переміщенні.

$$\text{Задані сили: } P_A = mg; \quad P_B = 2mg; \quad P_D = mg; \quad P_E = \frac{mg}{2}.$$

$$\delta A_x = mg \cdot \sin 60^\circ \delta x - mg \cdot \frac{\delta x}{2} - \frac{mg}{2} \cdot \frac{\delta x}{2} = mg \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \delta x = 0,116mg\delta x;$$

$$Q_x = 0,116mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{5}{2}m\ddot{x} = 0,116mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла A : $a_A = \ddot{x} = 0,046g$.

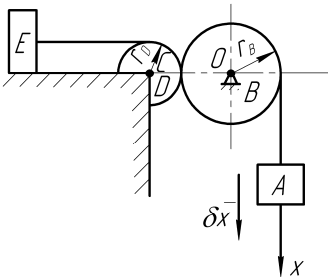
Відповідь: $a_A = 0,046g$.

Задача 14

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:

$$m_A = \frac{m_B}{2} = m_D = 2m_E = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.



Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла A – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості \dot{x} :

$$T = T_A + T_B + T_D + T_E,$$

де

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_D = \frac{I_O \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r_D} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_E = \frac{m_E v_E^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4}.$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} + \frac{m \dot{x}^2}{4} = \frac{3}{2} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 3m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт δA_x заданих сил на цьому можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = mg$; $P_B = 2mg$; $P_D = mg$; $P_E = \frac{mg}{2}$.

$$\delta A_x = mg\delta x; \quad Q_x = mg.$$

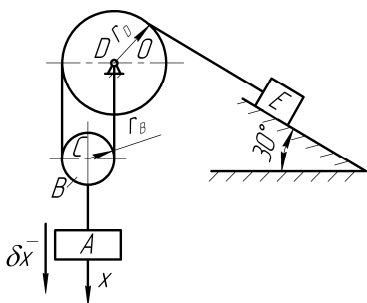
4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення і визначимо шукане прискорення a_A :

$$3m\ddot{x} = mg. \quad a_A = \ddot{x} = \frac{1}{3}g.$$

Відповідь: $a_A = \frac{1}{3}g$.

Задача 15

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_A = m_B = \frac{m_D}{2} = 2m_E = m.$$

Тіла B і D – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо лінійне переміщення тіла 1 – x . Тоді

узагальнена швидкість $\dot{x} = v_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де
$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_{O_3}^2}{2} + \frac{I_{O_3} \omega_3^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{4} + \frac{3}{4}m\dot{x}^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 3m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = mg; P_2 = mg; P_3 = mg.$

$$\delta A_x = mg \sin 30^\circ \delta x - mg \delta x = -0,5mg \delta x; \quad Q_x = -0,5mg.$$

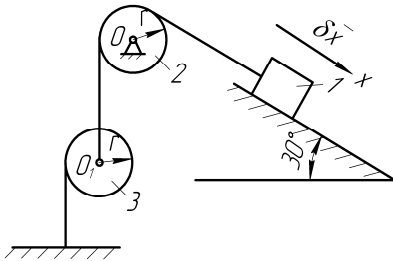
4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$3m\ddot{x} = -0,5mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла 1: $a_1 = \ddot{x} = -\frac{1}{6}g.$

Задача 16

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла 1, якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_1 = m_2 = m_3 = m.$$

Тіла 2 і 3 – однорідні круглі диски.

Силами опору знехтувати.

Тіло 3 рухається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності.

Узагальненою координатою можна обрати переміщення тіла 1 – x .

Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де
$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_{o_3}^2}{2} + \frac{I_{o_3} \omega_3^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} + \frac{3}{4} m \dot{x}^2 = \frac{3}{2} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 3m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = mg; P_2 = mg; P_3 = mg.$

$$\delta A_x = mg \sin 30^\circ \delta x - mg \delta x = -0,5mg \delta x; \quad Q_x = -0,5mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

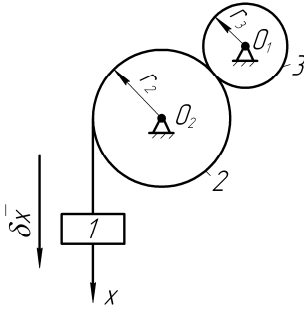
$$3m\ddot{x} = -0,5mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла 1: $a_1 = \ddot{x} = -\frac{1}{6}g.$

Відповідь: $a_1 = -\frac{1}{6}g.$

Задача 17

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла 1, якщо задано маси тіл:



$$m_1 = \frac{m_2}{2} = m_3 = m.$$

Тіла 1 і 2 – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату прийемо переміщення тіла 1 – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де
$$T_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{2mr_2^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mr_3^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_3} \right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{4};$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{4} = \frac{5}{4} m\dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{5}{2} m\ddot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{5}{2} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = mg; P_2 = 2mg; P_3 = mg.$

$$\delta A_x = mg \delta x; Q_x = mg.$$

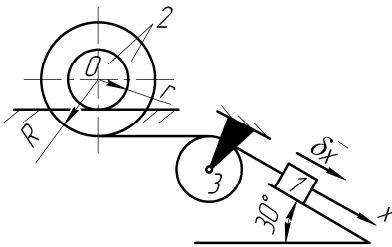
4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{5}{2} m \ddot{x} = mg.$$

5. Визначимо шукане прискорення тіла: $a_1 = \ddot{x} = \frac{2}{5} g.$

Задача 18

За рівнянням Лагранжа другого роду треба визначити прискорення тіла A , якщо маси тіл дорівнюють:



$$m_1 = \frac{m_2}{4} = m; R = 2r.$$

Масою блока 3 знехтувати, радіус інерції тіла $2\rho = r\sqrt{2}$. Силами опору нехтуємо. Кочення тіла 2 відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла 1 – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_1$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2,$$

де

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_o^2}{2} + \frac{I_o \omega_2^2}{2} = \frac{4m}{2} \left(\frac{\dot{x} \cdot r}{R-r} \right)^2 + \frac{4m \cdot 2r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R-r} \right)^2 = 2m \dot{x}^2 + 4m \dot{x}^2 = 6m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + 6m \dot{x}^2 = \frac{13}{2} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 13m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 13m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 13m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили:

$$P_1 = mg; \quad P_2 = m_2 g;$$

$$\delta A_x = mg \sin 30^\circ \delta x = \frac{mg}{2} \delta x; \quad Q_x = \frac{mg}{2}.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$13m \ddot{x} = \frac{mg}{2}.$$

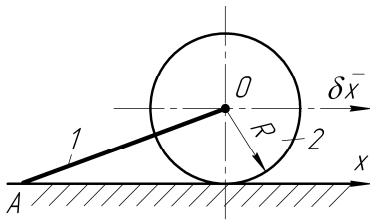
5. Визначимо прискорення тіла 1: $a_1 = \ddot{x} = \frac{1}{26} g$.

Задача 19

За рівняннями Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла 1,

$$m_1 = \frac{m_2}{10} = m - \text{маси тіл.}$$

Тіло 2 – однорідний круглий циліндр радіуса R .



Силами опору нехтувати. Кочення тіла 2 відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення центра циліндра $0 - x$. Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_0$.

Запишемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2,$$

де

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$
$$T_2 = \frac{I_o \omega^2}{2} = \left(\frac{m_2 R^2}{2} + m_2 R^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{15}{2} m \dot{x}^2 = 8m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 16m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 16m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 16m\ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму можливих робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили:

$$P_1 = m_1 g; \quad P_2 = m_2 g;$$

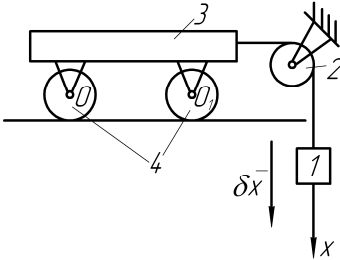
$$\delta A_x = 0. \quad Q_x = 0.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення: $16m\ddot{x} = 0$.

5. Визначимо прискорення тіла 1: $a_1 = \ddot{x} = 0$.

Задача 20

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла 1, якщо співвідношення мас тіл наступне:



$$m_1 = m_2 = \frac{m_3}{3} = m_4 = m.$$

Тіла 2 і 4 – однорідні круглі диски.

Силами опору знехтувати.
Кочення тіла 4 відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення тіла 1 – x . Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + 2T_4,$$

$$\text{де} \quad T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{\dot{x}^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{3m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_o^2}{2} + \frac{I_o \omega_4^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2;$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 = \frac{15}{4} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{15}{2} m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{15}{2} m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{15}{2} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму можливих робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

Задані сили: $P_1 = m_1 g; P_2 = m_2 g; P_3 = m_3 g; P_4 = m_4 g.$

$$\delta A_x = mg \delta x; \quad Q_x = mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення: $\frac{15}{2} m \ddot{x} = mg.$

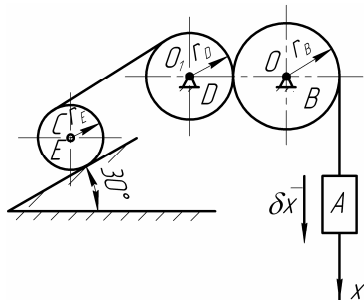
5. Визначимо прискорення тіла 1: $a_1 = \ddot{x} = \frac{12}{15} g.$

Задача 21

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте прискорення тіла A , якщо маси такі:

$$m_A = m_B = \frac{4}{3} m_D = 2m_E = m.$$

Кочення тіла E відбувається без проковзування. Тіла B, D і E – однорідні круглі диски. Силами опору знехтувати.



Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності.

За узагальнену координату прийємо переміщення тіла $A - x$.
Тоді узагальнена швидкість $\dot{x} = v_A$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості \dot{x} :

$$T = T_A + T_B + T_D + T_E,$$

де
$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2};$$

$$T_B = \frac{I_O \omega_B^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_B r_B^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r_B} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{4};$$

$$T_D = \frac{I_{O_1} \omega_D^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r_D} \right)^2 = \frac{3}{16} m \dot{x}^2;$$

$$T_E = \frac{m_E v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_E^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m r_E^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2 r_E} \right)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{16} + \frac{m \dot{x}^2}{32} = \frac{3}{32} m \dot{x}^2.$$

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{4} + \frac{3}{16} m \dot{x}^2 + \frac{3}{32} m \dot{x}^2 = \frac{33}{32} m \dot{x}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{33}{16} m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{33}{16} m \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{33}{16} m \ddot{x}.$$

3. Визначимо узагальнену силу Q_x , надавши приріст δx узагальненій координаті x і обчисливши суму можливих робіт δA_x заданих сил на цьому можливому переміщенні δx .

Задані сили: $P_A = mg; P_B = mg; P_D = \frac{3}{4} mg; P_E = \frac{mg}{2}.$

$$\delta A_x = mg\delta x - \frac{mg}{2} \sin 30^\circ \cdot \frac{\delta x}{2} = \frac{7}{8} mg\delta x; \quad Q_x = \frac{7}{8} mg.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

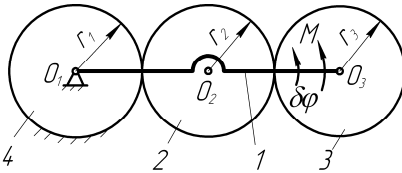
$$\frac{33}{16} m\ddot{x} = \frac{7}{8} mg.$$

5. Визначимо прискорення тіла A : $a_A = \ddot{x} = \frac{14}{33} g$.

Відповідь: $a_A = \frac{14}{33} g$.

Задача 22

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення ланки 1 (ε_1), якщо $m_2 = m_3 = 2m_1 = m$; $r_4 = r_2 = r_3 = r$.



Тіла 4, 2, 3 – однорідні круглі диски, тіло 1 – однорідний тонкий стрижень. Момент, що прикладений до стрижня 1, є сталим $M = const$.

Механізм розташований у горизонтальній площині. Силами опору знехтувати. Кочення відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності.

За узагальнену координату прийемо кут повороту ланки 1 – φ .

Узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$.

Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

де
$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \frac{(4r)^2}{3} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{4mr^2 \varphi^2}{3};$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_{o_2}^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m}{2} (2r \cdot \dot{\varphi})^2 + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2r\dot{\varphi}}{r} \right)^2 = 3mr^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_{o_3}^2}{2} = \frac{m(4r\dot{\varphi})^2}{2} = 8mr^2 \dot{\varphi}^2$$

(ланка 3 здійснює поступальний рух $\omega_3 = 0$);

$$T_4 = 0;$$

$$T = 3mr^2 \dot{\varphi}^2 + 8mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3} mr^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{37}{3} mr^2 \dot{\varphi}^2.$$

3. Визначимо ліву частину рівняння (1)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{74}{3} mr^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{74}{3} mr^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{74}{3} mr^2 \ddot{\varphi}.$$

4. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил на цьому можливому переміщенні.

$$\text{Задані сили:} \quad P_1 = P_2 = P_3 = mg; \quad P_4 = \frac{mg}{2};$$

$$\delta A_\varphi = M \delta\varphi. \quad Q_\varphi = M.$$

Сили ваги тіл не здійснюють роботу, оскільки механізм розташований у горизонтальній площині.

Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

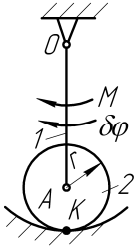
$$\frac{74}{3} mr^2 \ddot{\varphi} = M.$$

5. Визначимо кутове прискорення ланки: $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{3M}{74mr^2} g$.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon_1 = \frac{3M}{74mr^2} g.$$

Задача 23

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначте кутове прискорення тіла 1, якщо задано маси тіл і розміри їх елементів.



$$m_1 = \frac{m_2}{3} = m; \quad OA = 3r;$$

Тіло 1 – однорідний тонкий стрижень, тіло 2 – однорідний круглий диск, момент сталий $M = const$.

Силами опору знехтувати. Механізм розташований у горизонтальній площині. Кочення відбувається без проковзування.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо кут повороту ланки 1 – φ .

Тоді узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_1 + T_2,$$

$$\text{де} \quad T_1 = \frac{I_o \omega_1^2}{2} = \frac{m(3r)^2}{3} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{3mr^2 \dot{\varphi}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{I_A \omega_2^2}{2} = \frac{3m}{2} (\dot{\varphi} \cdot 3r)^2 + \frac{1}{2} \frac{3mr^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{\varphi} \cdot 3r}{r} \right)^2 = \\ &= \frac{27mr^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{27mr^2 \dot{\varphi}^2}{4} = \frac{81}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2; \end{aligned}$$

$$T = \frac{3}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{81}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{87}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{87}{2} mr^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{87}{2} mr^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{87}{2} mr^2 \ddot{\varphi}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_φ на цьому можливому переміщенні. Сила ваги тіл не здійснюють роботу, оскільки механізм розташований у горизонтальній площині.

Задані сили: $P_1; P_2; M$.

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi. \quad Q_\varphi = M.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{87}{2}mr^2\ddot{\varphi} = M.$$

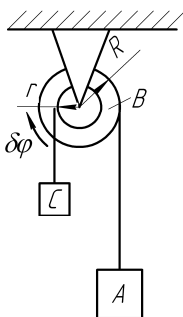
5. Визначимо кутове прискорення тіла 1: $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{2M}{87mr^2}$.

Відповідь: $\varepsilon_1 = \frac{2M}{87mr^2}$.

Задача 24

Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, визначити кутове прискорення тіла B , якщо задано маси і розмірні параметри:

$$m_A = \frac{m_B}{4} = 2m_C = m, \quad \frac{R}{r} = 2;$$



$\rho = \sqrt{2}r$ – радіус інерції тіла B . Силами опору знехтувати.

Розв'язання

Задана система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймемо переміщення ланки B – кут повороту φ . Узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \omega_B$. Запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

1. Обчислимо кінетичну енергію системи T як функцію узагальненої швидкості:

$$T = T_A + T_B + T_C,$$

$$\text{де } T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m(2r\dot{\varphi})^2}{2} = 2mr^2\dot{\varphi}^2; T_B = \frac{I_B \omega_2^2}{2} = \frac{m_B \rho^2 \dot{\varphi}^2}{2} = 4mr^2\dot{\varphi}^2;$$

$$T_C = \frac{m_C v_O^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} (\dot{\varphi} r)^2 = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{4}. T = 2mr^2\dot{\varphi}^2 + 4mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{4} = \\ = \frac{25}{4} mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$T = 2mr^2\dot{\varphi}^2 + 4mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{4} = \frac{25}{4} mr^2\dot{\varphi}^2.$$

2. Визначимо ліву частину рівняння (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{25}{2} mr^2\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{25}{2} mr^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{25}{2} mr^2\ddot{\varphi}.$$

3. Визначимо узагальнену активну силу Q_φ , надавши приріст $\delta\varphi$ узагальненій координаті φ і обчисливши суму елементарних робіт заданих сил δA_x на цьому можливому переміщенні.

$$\text{Задані сили: } P_A = mg; P_B = 4mg; P_C = \frac{mg}{2};$$

$$\delta A_\varphi = 2mgr\delta\varphi - \frac{mg}{2} r\delta\varphi = \frac{3}{2} mgr\delta\varphi; \quad Q_\varphi = \frac{3}{2} mgr.$$

4. Підставимо в рівняння (1) отримані значення:

$$\frac{25}{2} mr^2\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} mgr.$$

5. Визначимо кутове прискорення ланки:

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{3}{25r} g = 0,12 \frac{g}{r}.$$

$$\text{Відповідь: } \varepsilon_1 = 0,12 \frac{g}{r}.$$

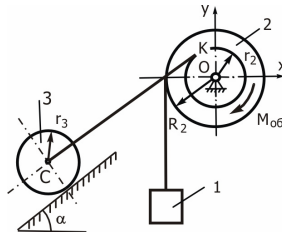
ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Рівняння Лагранжа другого роду

Варіант 1

Сталий обертальний момент $M_{об}=120 \text{ Нм}$, прикладений до нерухомого ступінчатого блока 2 вагою $P_2=50 \text{ Н}$, надає руху вантажу 1 вагою $P_1=50 \text{ Н}$ і котку 3 вагою $P_3=50 \text{ Н}$ за допомогою перекинутої через блок 2 невагомої нерозтяжної нитки. Радіуси котка 3 і блока 2 дорівнюють, відповідно, $r_3=0,2 \text{ м}$, $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,3 \text{ м}$. Радіус інерції блока 2 відносно осі O дорівнює $\rho_0=0,25 \text{ м}$. Ковзання між котком 3 і площиною, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Маса котка 3 рівномірно розподілена на його зовнішній поверхні. Ділянка нитки KC паралельна похилій площині. За розрахунками прийняти $\alpha = 30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1 за допомогою рівняння Лагранжа II роду.



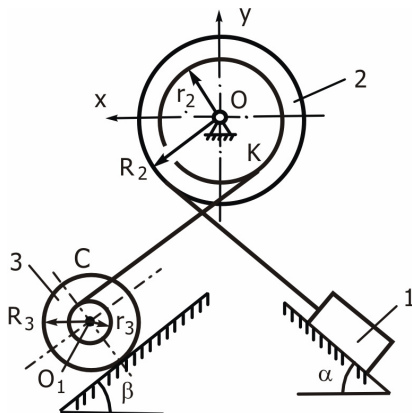
Варіант 2

Вантаж 1, вагою $P_1=250 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, приводить до обертового руху ступінчастий блок 2 вагою $P_2=80 \text{ Н}$ і коток 3 вагою $P_3=100 \text{ Н}$ за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно, $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,3 \text{ м}$, $r_3=0,3 \text{ м}$, $R_3=0,4 \text{ м}$. Радіуси інерції блока 2 і котка 3 відносно осей O і O_1 дорівнюють, відповідно, $\rho_0=0,25 \text{ м}$, $\rho_{01}=0,35 \text{ м}$.

Ковзання між котком 3 і похилою площиною, а також між ниткою і блоком 2 відсутнє. Ділянки нитки паралельні відповідним площинам, нахиленим до горизонту під кутами α і β .

Для розрахунку прийняти $g=10 \text{ м/с}^2$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$, коефіцієнт тертя ковзання вантажу 1 об похилу площину дорівнює $f=0,10$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



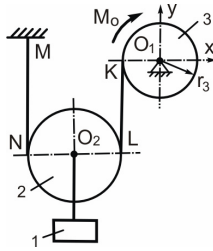
Варіант 3

Вантаж 1 вагою $P_1=80 \text{ Н}$, опускаючись донизу, надає руху за допомогою невагомої нерозтяжної нитки системі, що складається з рухомого блока 2 вагою $P_2=40 \text{ Н}$ і барабана 3 вагою $P_3=80 \text{ Н}$.

Маса блока 2 рівномірно розподілена вздовж його обода. Радіус барабана 3 – $r_3=0,3 \text{ м}$, а його радіус інерції відносно осі $\rho_{O_1}=0,15 \text{ м}$. Ковзання між ниткою і блоком 2 відсутнє.

До барабана 3 прикладений сталий момент опору $M_0=17,28 \text{ Нм}$. Нитка невагома і нерозтяжна і на ділянках KL і MN вертикальна.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 4

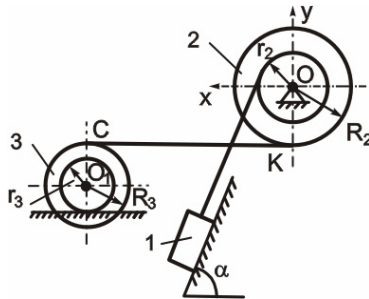
Вантаж 1, вагою $P_1=180 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, надає руху котку 3 за допомогою невагомий нерозтяжної нитки, перекинutoї через ступінчастий блок 2.

Вага блока 2 – $P_2=80 \text{ Н}$, його радіуси – $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,3 \text{ м}$.

Вага котка 3 – $P_3=100 \text{ Н}$, його радіуси: $r_3=0,3 \text{ м}$, $R_3=0,4 \text{ м}$.

Радіуси інерції блока 2 і котка 3 відносно осей O і O_1 дорівнюють, відповідно: $\rho_2=0,25 \text{ м}$, $\rho_3=0,35 \text{ м}$.

Ковзання між котком 3 і площиною і нитки вздовж блока 2 відсутнє.



Ділянки нитки паралельні відповідним площинам. За розрахунками прийняти $\alpha=60^\circ$, коефіцієнт тертя між вантажем 1 і похилою площиною $f=0,10$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

Варіант 5

Сталий обертальний момент $M_{об}=1700 \text{ Нм}$, прикладений до барабана 1, надає руху за допомогою невагомої нерозтяжної нитки ступінчастому котку 2.

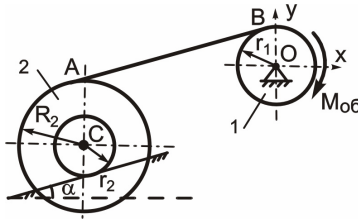
Барабан 1 є однорідним круглим циліндром з вагою $P_1=5000 \text{ Н}$ і радіусом $r_1=0,2 \text{ м}$.

Вага котка 2 – $P_2=9500 \text{ Н}$, його радіуси $r_2=0,1 \text{ м}$, $R_2=0,3 \text{ м}$, а радіус інерції відносно осі – $\rho=0,20 \text{ м}$.

Ділянка нитки AB паралельна похилій площині, що утворює з горизонтом кут α . Ковзання між котком 2 і площиною, а також між ниткою і поверхнею барабана 1 відсутнє.

Для розрахунку прийняти $\alpha = 30^\circ$.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 6

Вантаж 1, вагою $P_1=380 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, надає руху котку 3 вагою $P_3=250 \text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що охоплює ступінчастий блок 2 вагою $P_2=250 \text{ Н}$.

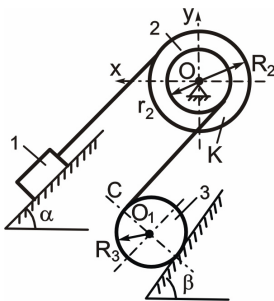
Радіуси блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,3 \text{ м}$, $R_3=0,4 \text{ м}$.

Радіус інерції блока 2 відносно осі O дорівнює $\rho=0,25 \text{ м}$. Коток 3 вважати однорідним циліндром.

Ділянки нитки паралельні відповідним площинам. Ковзання між котком 3 і похилою площиною, а також нитки вздовж блока 2 і котка 3 відсутнє.

Для розрахунку прийняти $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 і похилою площиною дорівнює $f = 0,15$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 7

Вантаж 1, вагою $P_1=150 \text{ Н}$, опускаючись донизу, надає руху котку 3 за допомогою невагомий нерозтяжної нитки, перекинutoї через ступінчастий блок 2.

Коток 3 рухається вздовж площини, нахиленої до горизонту під кутом α .

Ділянка нитки KC паралельна цій площині.

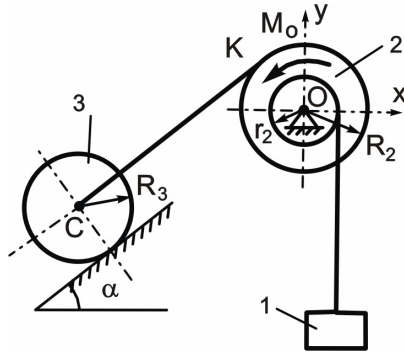
Вага блока 2 – $P_2=100 \text{ Н}$, його радіуси: $r_2=0,1 \text{ м}$, $R_2=0,4 \text{ м}$, а радіус інерції відносно осі O : $\rho_0=0,30 \text{ м}$.

Вага котка 3 – $P_3=40 \text{ Н}$, його радіус $R_3=0,3 \text{ м}$, маса його рівномірно розподілена на зовнішній поверхні.

До блока 2 прикладений постійний момент опору $M_0=5,0 \text{ Нм}$. Ковзання між котком 3 і похилою площиною, а також між ниткою і блоком 2 відсутнє.

Для розрахунку прийняти $\alpha = 30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



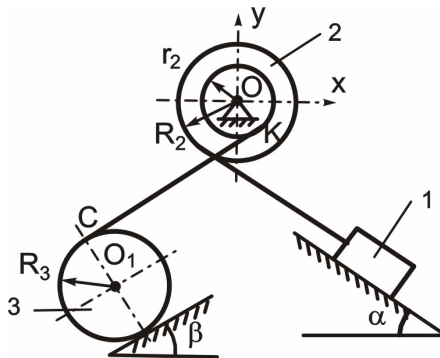
Варіант 8

Вантаж 1 вагою $P_1=140 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, надає руху котку 3 вагою $P_3=80 \text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинutoї через ступінчастий блок 2 вагою $P_2=40 \text{ Н}$.

Радіуси ступінчастого блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,4 \text{ м}$, $R_3=0,3 \text{ м}$.

Радіус інерції ступінчастого блоку 2 відносно осі O : $\rho_0=0,30 \text{ м}$. Коток 3 вважати однорідним циліндром.

Ковзання між котком 3 і похилою площиною і нитки вздовж блока 2 відсутнє.



Ділянки нитки паралельні відповідним площинам. Під час розрахунків прийняти $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$, коефіцієнт тертя між вантажем 1 і похилою площиною $f=0,1$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

Варіант 9

Вантаж 1, вагою $P_1=380\text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, приводить у рух коток 3 вагою $P_3=100\text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинутаї через ступінчастий блок 2, вагою $P_2=100\text{ Н}$.

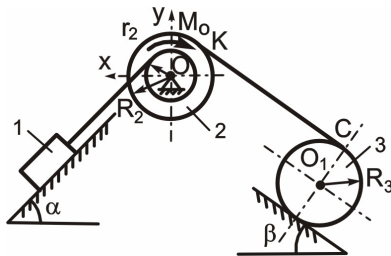
До блока 2 прикладений сталий момент опору $M_0=10\text{ Нм}$.

Радіуси коліс блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2 = 0,2\text{ м}$, $R_2 = 0,3\text{ м}$, $R_3 = 0,4\text{ м}$.

Радіус інерції блока 2 відносно осі O : $\rho_O = 0,25\text{ м}$. Коток 3 вважати однорідним циліндром.

Ділянки нитки паралельні відповідним площинам. Ковзання між котком 3 і площиною, а також нитки вздовж блока 2 і котка 3 відсутнє. За розрахунками прийняти $g = 10\text{ м/с}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 10

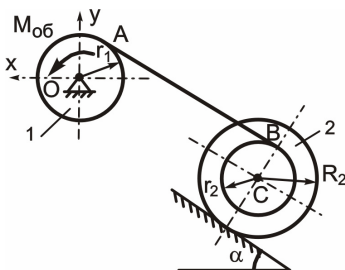
Сталий обертальний момент $M_0=80\text{ Нм}$, прикладений до барабану 1, приводить до дії за допомогою невагомої нерозтяжної

нитки, коток 2, який рухається на похилій площині, нахиленій до горизонту під кутом α .

Частина нитки AB паралельна похилій площині. Вага барабана 1 – $P_1=100\text{ Н}$, його радіус $r_1=0,4\text{ м}$. Масу барабана вважати рівномірно розподіленою вздовж його ободу. Вага котка 2 – $P_2=150\text{ Н}$, його радіуси: $r_2=0,2\text{ м}$, $R_2=0,4\text{ м}$, а момент інерції відносно осі C : $\rho=0,40\text{ м}$.

Ковзання між котком 2 і похилою площиною, а також між ниткою і поверхнею барабану 1 відсутнє. За розрахунками прийняти $\alpha=30^\circ$.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 11

Вантаж 1, вагою $P_1=200\text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, приводить у рух коток 3 вагою $P_3=80\text{ Н}$, за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, яка охоплює ступінчастий блок 2 вагою $P_2=100\text{ Н}$.

Радіуси блока 2 та котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2 = 0,1\text{ м}$, $R_2 = 0,3\text{ м}$, $R_3 = 0,25\text{ м}$.

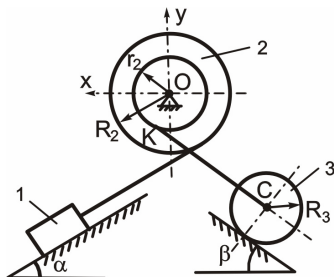
Радіус інерції блока 2 відносно осі O : $\rho = 0,25\text{ м}$, коток 3 вважати однорідним циліндром.

Ділянки нитки паралельні відповідним площинам.

Ковзання між котком 3 і площиною, а також нитки вздовж блока 2 і котка 3 відсутнє.

Для розрахунку прийняти $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 і похилою площиною дорівнює $f = 0,15$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

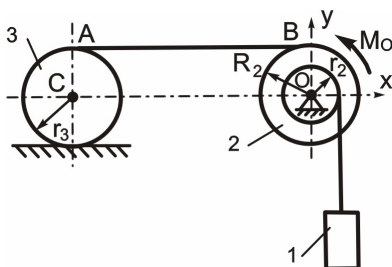


Варіант 12

Вантаж 1, вагою $P_1 = 200 \text{ Н}$, опускаючись донизу, приводить у рух коток 3 вагою $P_3 = 900 \text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, яка намотана на двоступінчастий блок 2, вагою $P_2 = 80 \text{ Н}$.

Радіуси блока 2 – $r_2 = 0,2 \text{ м}$, $R_2 = 0,3 \text{ м}$, а його радіус інерції відносно осі $O - \rho = 0,30 \text{ м}$.

Коток 3 радіусом $r_3 = 0,5 \text{ м}$ вважати однорідним циліндром. До блока 2 прикладений постійний момент опору $M_0 = 8,0 \text{ Нм}$.



Ковзання між котком 3 і площиною, а також нитки вздовж блока 2 відсутнє. Площина і ділянка нитки AB горизонтальні.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

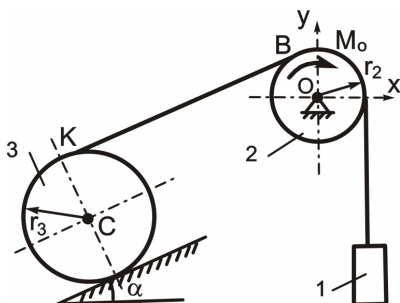
Варіант 13

Коток 3, опускаючись донизу похилою площиною, приводить у рух вантаж 1, вагою $P_1 = 15 \text{ Н}$, за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2 вагою $P_2 = 10 \text{ Н}$ і радіусом $r_2 = 0,3 \text{ м}$.

Вага котка 3 – $P_3 = 200 \text{ Н}$, його радіус $r_3 = 0,5 \text{ м}$. Коток 3 вважати однорідним циліндром.

До блоку 2 прикладений сталий момент опору $M_0 = 8,0 \text{ Нм}$. Ковзання між котком 3 і площиною, а також ниткою і поверхнею блоку 2 відсутнє. Ділянка нитки KB паралельна похилій площині, площина утворює з горизонтом кут α . Для розрахунку прийняти $\alpha = 30^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



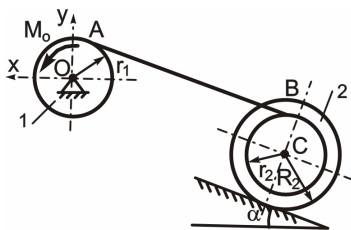
Варіант 14

Ступінчастий коток 2, опускаючись донизу похилою площиною без ковзання, приводить до обертання за допомогою невагомої нерозтяжної нитки барабан 1, вагою $P_1 = 200 \text{ Н}$ і радіусом $r_1 = 0,2 \text{ м}$.

Вага котка 2 – $P_2 = 950 \text{ Н}$, його радіуси – $r_2 = 0,3 \text{ м}$, $R_2 = 0,4 \text{ м}$, а радіус інерції відносно осі C – $\rho_c = 0,30 \text{ м}$. До барабана 1, маса якого рівномірно розподілена по його поверхні, прикладений сталий момент опору $M_0 = 200 \text{ Нм}$.

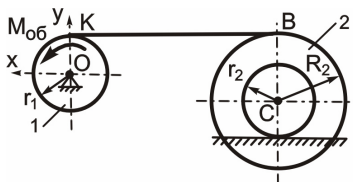
Ділянка нитки AB паралельна площині, яка нахилена під кутом α до горизонту. Для розрахунку прийняти, $\alpha = 30^\circ$.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 15

Барабан 1, вагою $P_1 = 200 \text{ Н}$ і радіусом $r_1 = 0,2 \text{ м}$, приводиться до обертання сталим моментом $M_{06} = 79,2 \text{ Нм}$ і, за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, приводить у рух коток 2, який котиться без тертя на горизонтальній площині.



Вага котка 2 – $P_2 = 5000 \text{ Н}$, його радіуси: $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $R_2 = 0,6 \text{ м}$, а момент інерції відносно осі C : $\rho_c = 0,50 \text{ м}$.

Барабан 1 вважати однорідним циліндром.

Ділянка нитки KB горизонтальна. Для розрахунку прийняти $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

Варіант 16

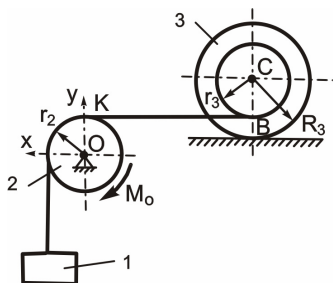
Вантаж 1, вагою $P_1 = 200 \text{ Н}$, опускаючись донизу, приводить у рух коток 3 за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2.

Вага блока 2 – $P_2 = 50 \text{ Н}$, його радіус – $r_2 = 0,1 \text{ м}$, Вага котка 3 – $P_3 = 100 \text{ Н}$, його радіуси: $r_3 = 0,1 \text{ м}$ і $R_3 = 0,5 \text{ м}$.

Радіус інерції котка 3 відносно осі С дорівнює $\rho = 0,40 \text{ м}$. До блоку 2, який являє собою однорідний круглий диск, прикладений сталий момент опору $M_0 = 20,76 \text{ Нм}$.

Ковзання між котком 3 і площиною, а також ниткою і поверхнею блоку 2 відсутнє. Площина і ділянка нитки KB горизонтальні. Для розрахунку прийняти $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

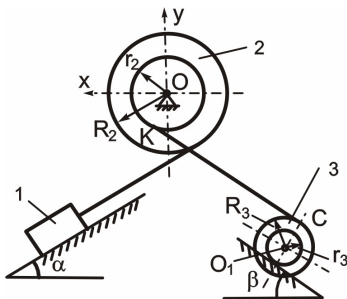


Варіант 17

Вантаж 1, вагою $P_1=200 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, надає руху котку 3 вагою $P_3=160 \text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинutoї через ступінчастий блок 2 вагою $P_2=80 \text{ Н}$. Радіуси блока 2 і котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,5 \text{ м}$, $r_3=0,2 \text{ м}$, $R_3=0,6 \text{ м}$. Радіус інерції блока 2 відносно

осі O дорівнює $\rho_0=0,3$ м, а радіус інерції котка 3 відносно осі O_1 дорівнює $\rho_1=0,3$ м. Площина, на якій рухається вантаж 1, нахилена до горизонту під кутом α , а площина, на якій рухається коток 3, – під кутом β . Ковзання між котком 3 і похилою площиною, а також між ниткою та блоком 2 і котком 3 відсутнє. Для розрахунків прийняти $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 і похилою площиною дорівнює $f=0,10$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 18

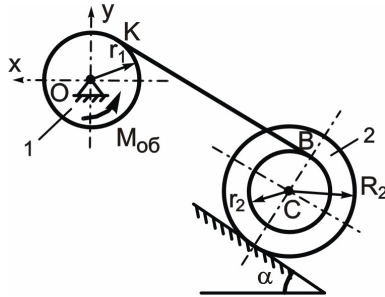
Сталий обертальний момент $M_{ob}=1600$ Нм, прикладений до барабана 1, надає руху за допомогою невагомої нерозтяжної нитки ступінчастому котку 2.

Барабан 1 є однорідним круглим циліндром з вагою $P_1=5000$ Н і радіусом $r_1=0,2$ м.

Вага котка 2 – $P_2=9500$ Н, його радіуси: $r_2=0,1$ м, $R_2=0,3$ м, а радіус інерції відповідно осі C : $\rho=0,20$ м.

Ділянка нитки KB паралельна похилій площині, що утворює з горизонтом кут α . Ковзання між котком 2 і площиною, а також між ниткою і поверхнею барабана 1 відсутнє. Для розрахунку прийняти $g = 10$ м/с², $\alpha = 30^\circ$.

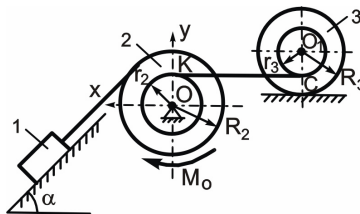
Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 19

Вантаж 1, вагою $P_1 = 330$, опускаючись донизу на похилій площині, приводить у рух коток 3 вагою $P_3 = 220$ Н, за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, яка охоплює ступінчастий блок 2, вагою $P_2 = 130$ Н.

До блока 2 прикладений постійний момент опору $M_0 = 18$ Нм. Радіуси блока 2 та котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2 = 0,15$ м і $R_2 = 0,3$ м, $r_3 = 0,15$ м і $R_3 = 0,3$ м. Радіуси інерції блока 2 відносно осі O і котка 3 відносно осі O_1 відповідно дорівнюють $\rho_0 = 0,2$ м, $\rho_1 = 0,25$ м.



Площина, на якій рухається коток 3, нахилена під кутом α до горизонту. Ділянки нитки паралельні відповідним площинам. Ковзання між котком 3 і площиною, а також нитки вздовж блока 2 і котка 3 відсутнє. Для розрахунку прийняти $g = 10$ м/с², $\alpha = 60^\circ$.

Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

Варіант 20

Постійний обертальний момент $M_{об}=1,1 \text{ Нм}$, прикладений до барабана 1, надає руху за допомогою невагомої нерозтяжної нитки ступінчастому котку 2.

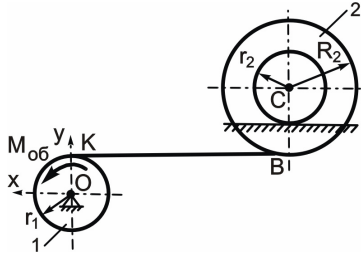
Барабан 1 є однорідним круглим циліндром вагою $P_1 = 100 \text{ Н}$ і радіусом $r_1=0,2 \text{ м}$.

Вага котка 2 – $P_2=150 \text{ Н}$, його радіуси $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,6 \text{ м}$, а радіус інерції відносно осі C : $\rho_c=0,30 \text{ м}$.

Площина і ділянка нитки KB – горизонтальні.

Ковзання між котком 2 і площиною, а також між ниткою і поверхнею барабана 1 відсутнє.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 21

Вантаж 1, вагою $P_1 = 200 \text{ Н}$, опускаючись донизу похилою площиною, приводить у рух коток 3 вагою $P_3 = 120 \text{ Н}$ за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, яка охоплює ступінчастий блок 2, вагою $P_2 = 60 \text{ Н}$. До блока 2 прикладений сталий момент опору $M_0=6 \text{ Нм}$. Радіуси коліс блока 2 та котка 3 дорівнюють, відповідно: $r_2 = 0,1 \text{ м}$, $R_2 = 0,3 \text{ м}$, $R_3 = 0,25 \text{ м}$.

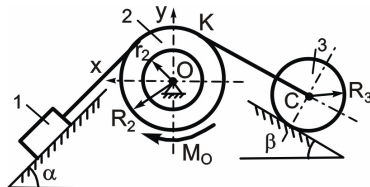
Радіус інерції блока 2 відносно осі O : $\rho_o = 0,20 \text{ м}$, коток 3 вважати однорідним циліндром.

Ковзання котка 3 на площині, а також нитки вздовж блока 2 і котка 3 відсутнє.

Ділянки нитки паралельні відповідним площинам, що нахилені до горизонту під кутами α і β .

Для розрахунку прийняти $g = 10 \text{ м/с}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

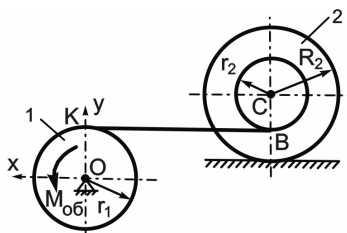
Визначити прискорення вантажу 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.



Варіант 22

Сталий обертальний момент $M_{об}=34,4 \text{ Нм}$, прикладений до барабана 1, надає руху за допомогою невагомої нерозтяжної нитки ступінчастому котку 2.

Барабан 1 є однорідним круглим циліндром з вагою $P_1=100 \text{ Н}$ і радіусом $r_1=0,4 \text{ м}$.



Вага котка 2 – $P_2=150 \text{ Н}$, його радіуси: $r_2=0,2 \text{ м}$, $R_2=0,6 \text{ м}$, а радіус інерції відповідно осі C: $\rho_c=0,40 \text{ м}$.

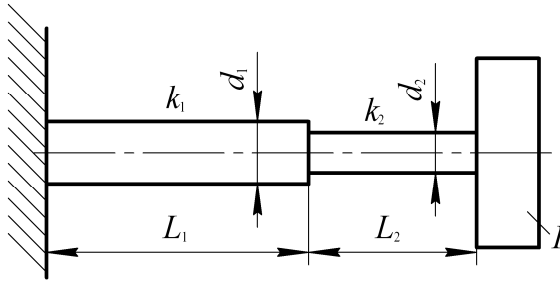
Площина і ділянка нитки KB – горизонтальні. Ковзання між котком 2 і площиною, а також між ниткою і поверхнею барабана 1 відсутнє.

Визначити кутове прискорення барабана 1, застосувавши до розв'язання задачі рівняння Лагранжа II роду.

ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

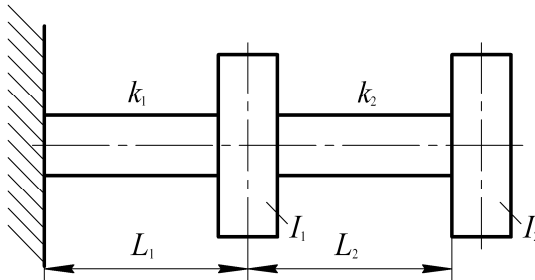
Задача 1

Визначити частоту вільних крутильних коливань змінного перетину вала, на кінці якого насаджений диск вагою $Q = 500 \text{ Н}$. Радіус інерції маси диска дорівнює $\rho = 60 \text{ см}$. Довжина ділянок вала дорівнює $L_1 = 30 \text{ см}$, $L_2 = 50 \text{ см}$. Діаметри вала $d_1 = 8 \text{ см}$, $d_2 = 5 \text{ см}$. Модуль другого роду для сталі $G = 6,2 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$.



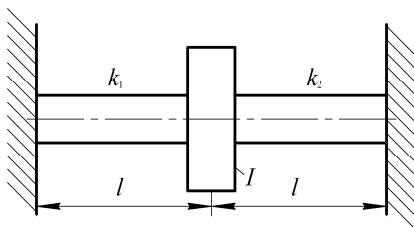
Задача 2

Обчислити частоту власних крутильних коливань вала, на якому насажені диски $Q_1 = 200 \text{ Н}$, $Q_2 = 400 \text{ Н}$. Радіуси інерції дисків однакові та дорівнюють $\rho = 50 \text{ см}$. Довжина ділянок вала дорівнює $L_1 = 40 \text{ см}$, $L_2 = 60 \text{ см}$. Діаметр вала $d = 6 \text{ см}$. Модуль зсуву для сталі прийняти $G = 5,5 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$. Побудувати форми головних коливань.



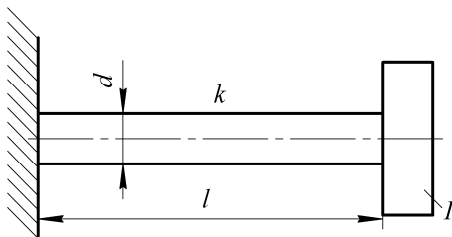
Задача 3

Визначити період власних крутильних коливань вала, на якому насаджений диск $Q = 400 \text{ Н}$. Радіус диска $R = 20 \text{ см}$. Відстані від диска до закріплення кінців вала дорівнюють $L_1 = 70 \text{ см}$, $L_2 = 90 \text{ см}$. Діаметр вала $d = 5 \text{ см}$. Модуль зсуву для сталі $G = 6 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$.



Задача 4

Скласти диференціальне рівняння змушених крутильних коливань системи, якщо до диска прикладений змінний обертальний момент $M_{об} = M_c \sin \omega t$. Виконати розрахунки впливу маси вала за наближеним методом Релея.

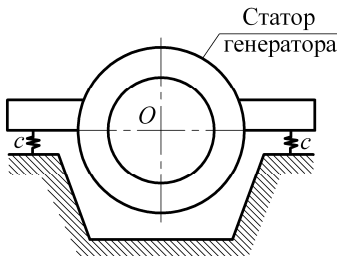


Задача 5

В однофазному генераторі електромагнітні сили, діючи між ротором та статором, створюють змінний крутильний момент виражається рівнянням $M_{об} = M_o + M_1 \sin \omega t$, де ω –кутова швидкість ротора, M_o і M_1 – сталі величини.

Для зменшення коливань статор встановлюють на пружини, як показано на рисунку.

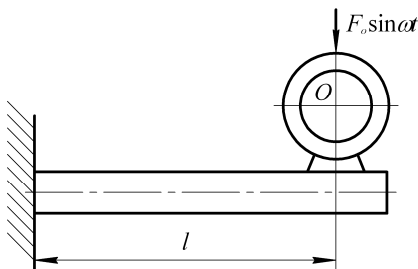
Визначити амплітуди змущених коливань статора, якщо коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює c .



Примітка: стала величина M_0 крутильного моменту безпосередньо передається на фундамент та викликає сталі реакції. Змінна частина $M_1 \sin \omega t$ крутильного моменту викликає крутильні коливання статора відносно подовжньої осі машини.

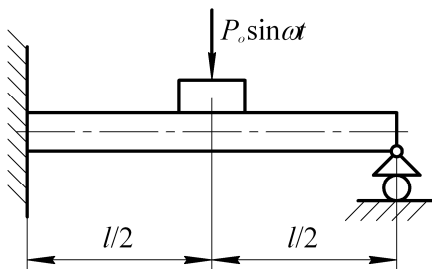
Задача 6

На двох швелерах №10 встановлений електродвигун, що має незбалансовану масу. Вага двигуна дорівнює $Q = 500 \text{ H}$, число обертів за хвилину $n = 1000$, амплітуда збурювальної сили $F_0 = 200 \text{ H}$ та висота консольної балки $l = 100 \text{ см}$. Визначити амплітуду змущених коливань консольної балки.



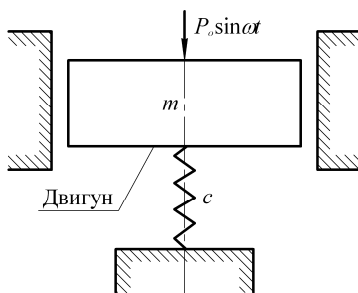
Задача 7

Посередині двоопорної балки, один кінець якої жорстко закріплений, а інший – вільно спирається, встановлений не зрівноважений двигун вагою $Q = 300 \text{ Н}$ з кількістю обертів $n = 900 \text{ об/хв}$. Довжина балки $l = 400 \text{ см}$. Амплітуда збурювальної сили $P_0 = 200 \text{ Н}$. Визначити коефіцієнт динамічності, якщо балка стальна двотаврового перетину №20а.



Задача 8

Для зменшення впливу сил інерції, що викликаються в двигуні не зрівноваженими частинами, на фундамент встановлюється підвіска на піддатливих опорах. Визначити коефіцієнт динамічності передачі сили на фундамент у місцях закріплення пружних опор (підвісок) з коефіцієнтом жорсткості $c = 100 \text{ Н/см}$. Прийняти вагу двигуна $Q = 500 \text{ Н}$ з кількістю обертів $n = 500 \text{ об/хв}$. (рис. 8.52).



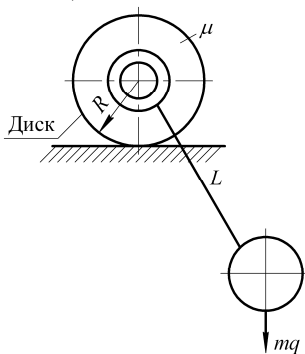
Задача 9

Стальний диск радіусом R , масою M може котитись без проковзування горизонтальною площиною.

До осі диска підвішений маятник, що складається зі стрижня довжиною L і масою m на кінці.

Визначити власні частоти коливань системи за наступними параметрами: маса $M = 2,3 \cdot 10^3$ кг; $R = 10$ см; $L = 60$ см; маса на кінці маятника $m = 0,15 \cdot 10^3$ кг.

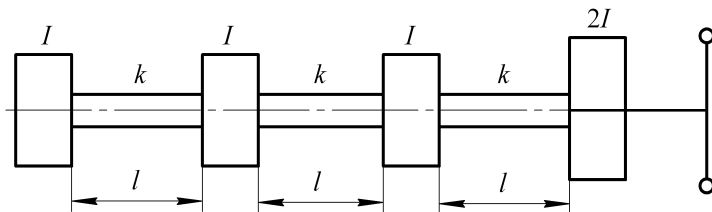
Примітка: вважати стрижень L невагомим, а масу зосередженою в одній точці.



Задача 10

Визначити частоту власних крутильних коливань вала, навантаженого чотирма дисками.

Для розрахунку прийняти: моменти інерції маси дисків $I = 2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2$, коефіцієнт крутильної жорсткості $k = 4 \cdot 10^7$ Нм, довжина ділянок вала $l = 30$ см.



ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ

I. Моменти інерції мас

1. Моменти інерції мас, розподілених вздовж лінії

- Дуга кола з центральним кутом 2α , рад (рис. 1).

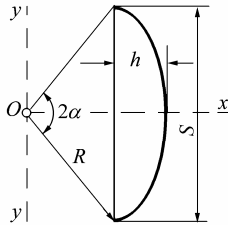


Рис. 1

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_y = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

де M – маса лінії.

$$I_0 = I_x + I_y = MR^2,$$

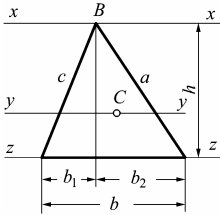
де I_0 – полярний момент інерції відносно точки O , дорівнює моменту інерції відносно осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини Oxy .

- Для повного кола ($2\alpha = 2\pi$):

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} MR^2, \quad I_0 = MR^2.$$

2. Моменти інерції мас, розподілених на площині

- **Трикутник** (рис. 2):



$$I_x = \frac{1}{2} M h^2, \quad I_y = \frac{1}{18} M h^2,$$

$$I_z = \frac{1}{6} M h^2, \quad I_h = \frac{1}{6} M \frac{b_1^3 + b_2^3}{b_1 + b_2},$$

$$I_C = \frac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2),$$

Рис. 2

де a, b, c – довжини сторін трикутника;

h – висота трикутника при основі b ;

C – центр ваги трикутника;

I_h – момент інерції відносно осі, що проходить у площині трикутника через вершину B перпендикулярно до протилежної сторони;

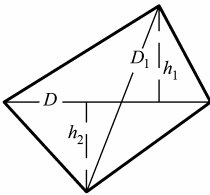
I_C – полярний момент інерції.

Для будь-якої осі, що проходить через центр ваги і лежить у площині трикутника:

$$I_C = \frac{1}{12} M (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2),$$

де l_1, l_2, l_3 – відстані вершин трикутника від цієї осі.

- **Чотирикутник** (рис. 3)



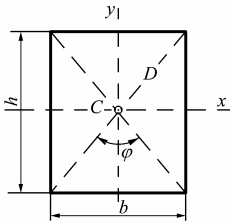
Момент інерції I_D відносно діагоналі D визначається за формулою:

$$I_D = \frac{1}{6} M \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}.$$

Для паралелограма:

$$I_D = \frac{1}{24} M D_1^2 \sin^2 \varphi.$$

Рис. 3



Для ромба:

$$I_D = \frac{1}{24} MD_1^2.$$

Для прямокутника (рис. 4) зі сторонами h і b :

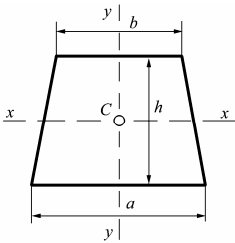
$$I_x = \frac{1}{12} Mh^2, I_y = \frac{1}{12} Mb^2, I_b = \frac{1}{3} Mh^2,$$

Рис. 4

$$I_D = \frac{1}{24} MD^2 \sin^2 \varphi, \quad I_C = \frac{1}{12} M(b^2 + h^2).$$

Для квадрата моменти інерції визначають із відповідних формул для моментів інерції прямокутника, якщо до них покласти $b = h$.

- Рівнобедрена трапеція (рис. 5):



$$I_x = \frac{1}{18} Mh^2 \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2},$$

$$I_a = \frac{1}{6} Mh^2 \cdot \frac{a+3b}{a+b},$$

$$I_b = \frac{1}{6} Mh^2 \cdot \frac{3a+b}{a+b},$$

$$I_y = \frac{1}{24} M \cdot (a^2 + b^2).$$

Рис. 5

- **Правильний багатокутник**

Для будь-якої осі, що проходить через точку O і лежить у площині багатокутника:

$$I_x = I_y = I_D = \frac{1}{24} M(6R^2 - a^2),$$

$$I_0 = 2I_x,$$

де a – сторона багатокутника;

R – радіус описаного кола.

- **Круг**

Для будь-якої осі, що проходить через центр круга в його площині:

$$I_D = \frac{1}{4}MR^2, \quad I_C = 2I_D.$$

- **Півкруг**

Для будь-якого діаметра:

$$I_D = \frac{1}{4}MR^2.$$

Полярний момент площини півкруга відносно його центра O .

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2.$$

Полярний момент площини відносно центра ваги C площини півкруга:

$$I_C = \frac{1}{2}MR \left(1 - \frac{32}{9\pi^2} \right).$$

- **Кругове кільце:**

$$I_D = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2), \quad I_0 = 2I_D,$$

де R – зовнішній радіус кільця;

r – внутрішній радіус кільця.

Осі проходять через центр кільця.

- **Круговий сектор** (рис. 1):

$$I_x = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad I_y = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2.$$

Якщо за полюс узяти центр ваги C сектора, то:

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 \left[1 - \frac{8\sin^2 \alpha}{9(2\alpha)^2} \right].$$

- **Круговий сегмент** (рис. 1):

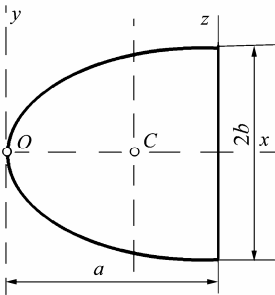
$$I_x = \frac{1}{4}MR^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$I_y = \frac{1}{4}MR^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right).$$

- **Еліпс** з півосями a і b та з центром O :

$$I_a = \frac{1}{4}Mb^2, \quad I_b = \frac{1}{4}Ma^2, \quad I_0 = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2).$$



- **Парабола** (рис. 6):

$$I_x = \frac{1}{5}Mb^2, \quad I_y = \frac{3}{7}Ma^2.$$

$$I_z = \frac{8}{35}Ma^2, \quad I_c = \frac{12}{175}Ma^2,$$

Рис. 6

де I_c – момент інерції відносно осі, яка проходить через центр ваги і паралельно осі z .

3. Моменти інерції мас, розподілених за об'ємом

Моменти інерції даються відносно осей, що проходять через центр ваги тіла. Отже, якщо ці моменти інерції відомі, то знайти моменти інерції відносно інших осей можна, користуючись формулою Штейнера.

- **Прямокутний паралелепіпед** із ребрами a, b, c (рис. 7):

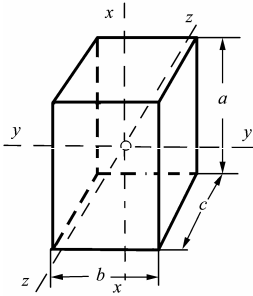


Рис. 7

$$I_x = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2),$$

$$I_y = \frac{1}{12} M(a^2 + c^2),$$

$$I_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

- Куб зі стороною a :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6} Ma^2.$$

- Прямий круговий циліндр:

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2,$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} M(3R^2 + h^2),$$

де R – радіус циліндра;

h – висота циліндра.

Початок координат знаходиться в центрі ваги циліндра. Вісь x спрямована по осі циліндра.

- Порожнистий циліндр:

$$I_x = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2), \quad I_y = \frac{1}{4} M\left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2\right),$$

де R і r – зовнішній і внутрішній радіуси основи циліндра;

h – висота циліндра.

Початок координат знаходиться у центрі ваги циліндра, вісь x спрямована за віссю циліндра.

- Пряма піраміда

Основа – прямокутник зі сторонами a і b . Початок координат у центрі ваги піраміди, вісь Ox проходить через вершину, вісь Oy паралельна стороні a основи:

$$I_x = \frac{1}{20} M(a^2 + b^2), \quad I_y = \frac{1}{20} M\left(b^2 + \frac{3}{4} h^2\right).$$

- **Прямий круговий конус:**

$$I_x = \frac{3}{10}MR^2, \quad I_y = \frac{3}{20}M\left(R^2 + \frac{1}{4}h^2\right),$$

де R – радіус основи; h – висота конуса.

Початок координат у центрі ваги, вісь Ox спрямована за центральною віссю конуса.

- **Усічений прямий круговий конус:**

$$I_x = \frac{3}{10}M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3},$$

де R і r – радіуси основ;

Ox – вісь конуса.

- **Куля**

Момент інерції відносно діаметра:

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

- **Порожниста куля:**

$$I = \frac{2}{5}M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

- **Оболонка кулі:**

$$I = \frac{2}{3}MR^2.$$

- **Півкуля**

Якщо початок координат збігається з центром ваги півкулі, що лежить на відстані $\frac{3}{8}R$ від геометричного центра кулі, і вісь x проходить через центр кулі, то

$$I_x = \frac{2}{5}MR^2, \quad I_x = \frac{2}{5}MR^2,$$

де M – маса півкулі.

- **Кульовий сегмент (рис. 1):**

$$I_x = \frac{M(2R^2 - 1,5Rh + 0,3h^2)h}{3R - h},$$

де h – висота сегмента.

- **Кульовий сектор (рис. 1):**

$$I_x = \frac{1}{5}Mh(3R - h),$$

де h – висота відповідного сегмента.

- **Еліпсоїд**

Моменти інерції відносно головних осей $2a$, $2b$ і $2c$ визначаються за формулами:

$$I_a = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2),$$

$$I_b = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2), \quad I_c = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2).$$

- **Параболіод обертання** (рис. 6):

$$I_x = \frac{1}{3} Mb^2, \quad I_c = \frac{1}{18} M(3b^2 + h^2).$$

- **Тор** (рис. 8)

Якщо перетин кільця – коло радіуса a , то

$$I_x = M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right),$$

$$I_y = \frac{1}{2} M \left(R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right).$$

Якщо перетин кільця – еліпс, то:

$$I_x = M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right),$$

$$I_y = \frac{1}{2} M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \right).$$

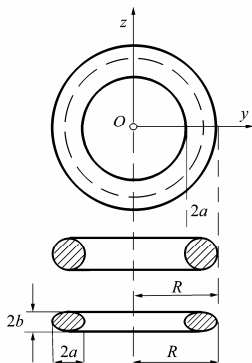


Рис. 8

Тут $a \neq b$ – півосі еліпса; їх розташування можна побачити на рис. 8.

Початок координат у центрі симетрії кільця, вісь Ox спрямована за віссю обертання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч 1. Статика. Кінематика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1972. – 436 с .
4. Каплунова А.В. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки / Каплунова А.В., Михаловський В.А., Фельдман А.А. – К. : Держсільгоспосвіта, 1961. – 365 с.
5. Савин Г.Н. Теоретическая механика / Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. – К. : Вища школа, 1971. – 359 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М. : Наука, 1972. – 258 с.
7. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики / И.Н. Веселовский. – М. : Высш. шк., 1974. – 287 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике ; под общ. ред. проф. А.А. Яблонского. – М. : Высш. шк., 1978. – 326 с.
9. Булгаков В.М. Инженерна механіка. Ч I. Теоретична механіка / Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. – Вінниця : Нова книга, 2007. – 502 с.
10. Теоретична механіка. Динаміка / [Булгаков В.М., Лукач В.С., Литвинов О.І., Головач І.В.]. – Ніжин : МІЛАНІК, 2007. – 368 с.
11. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – Ч. 1. – 368 с.; Ч. 2 – 640 с.
12. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 270 с.; Т. 2 – 542 с.
13. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин – М. : Наука, 1971. – 264 с.
14. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика / Я.Л. Геронимус. – М. : Наука, 1973. – 511 с.

15. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика / Н.Е. Жуковский. – М.; Л. : ГИТТЛ, 1952. – 811 с.
16. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – *Крылов А.Н.* Собрание трудов. – М. : Наука, 1936. –Т. 7.
17. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1984. – 423 с.
18. Добронравов В.В. Курс теоретической механики / Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников **А.Л.** – М. : Высш. шк., 1974. – 528 с.
19. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1977. – 431 с.
20. Парс Л.А. Аналитическая динамика / Л.А. Парс. – М. : Изд. Наука, 1972. – 636 с.

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

- Активні сили, 95
Амплітуда коливань, 55, 75, 79
Аристотель, 13
Балансування, 179
Бессель, 20
Варіації координат ізохронні, 209
Вектор головний кількості руху, 105
-- сил інерції, 163, 169
Вісь інерції головна, 93
-- центральна, 93
В'язі голономні, 205
- ідеальні, 211
- неголономні, 205
- нестационарні, 205
- неутримувальні, 205
- стационарні, 205
- утримувальні, 205
Галілей, 17
Головні координати, 377
Головні осі інерції, 93
Головний момент сил інерції, 163, 169
Гіроскоп, 302-311
Гюйгенс, 13
Гюйгенса – Штейнера теорема, 87
Декремент коливань, 57, 350
- логарифмічний, 67, 350
Демпфер коливань, 381
Динаміка, 13
- матеріальної точки, 13
- матеріальної системи, 83, 96
- твердого тіла, 119
Диференціальні рівняння
- відносного руху, 44, 45
- в натуральних осях, 24
-- в узагальнених координатах, 233
- змушених коливань, 72, 77
-- матеріальної системи, 96
- невіЛЬНОї точки, 37
- руху обертового тіла, 120
- плоского руху тіла, 126
- поступального руху тіла, 119
-- точки, 23
- у векторній формі, 24
- у координатній формі, 24
Довжина зведена фізичного маятника, 125
Енергія кінетична, 140
-- обертового тіла, 145
-- поступального руху, 144
-- плоского руху тіла, 145
- механічна, 156
- потенціальна, 154
Жуковський, 118
- лава, 118
Загальне рівняння динаміки. 216
Основні теореми динаміки, 103
Задача динаміки, 25
-- перша (пряма), 26
-- друга (основна), 27
Закон збереження кількості руху системи, 109
- інерції, 17
-- кінетичного моменту, 117
-- механічної енергії, 156

- – моменту кількості руху, 114
- Закон незалежності дії сил, 22
- основний динаміки, 18
- прецесії, 308
- рівності дії і протидії, 21
- руху центра мас системи, 98
- Закони динаміки, 16
- інерції, 17
- основний, 18
- Імпульс ударний, 198
- сили, 105
- сили елементарний, 106
- Інертність, 20
- Інтегрування рівнянь руху точки, 28
- – – прямолінійного, 30
- – – криволінійного, 35
- Канонічні рівняння динаміки, 283
- Кількість руху матеріальної точки, 104
- матеріальної системи, 105
- Кінетична енергія точки, 140
- – системи, 141
- Кінетична енергія тіла, 144
- – в узагальнених координатах, 318
- – – що обертається, 145
- – плоского руху, 14589
- Кінетичний момент тіла відносно осі, 115
- Кінетичний потенціал, 239
- Кінетостатика плоского механізму, 73
- Коефіцієнт динамічності, 73
- відновлювання, 186, 192
- демпфірування, 79
- жорсткості, 135
- згасання, 64
- корисної дії, 138, 196
- Коливання, 53, 57
- вільні, (власні), 57-60, 338
- власні крутильні, 360
- згасаючі, 63-67
- змушені, 70-79, 354
- малі механічної системи, 312
- системи з одним ступенем вільності, 338
- системи з двома ступенями вільності, 369, 384
- точки, гармонічні, 57-60
- фізичного маятника, 124
- Коперник, 13, 17
- Критерій Гурвіца, 462
- Сильвестра, 479
- Кут власного обертання, 303
- нутації, 303
- прецесії, 302
- Лагранж, 11, 233
- Лейбніц, 11
- Ляпунов, 432
- Маса, 19
- матеріальної точки, 19
- матеріальної системи, 83
- Матеріальна система, 83
- Механічний резонанс, 356
- Міри механічного руху, 104
- дії сили, 104
- Момент гіроскопічний, 309
- кількості руху точки, 111

- кількості руху системи, 114
- Моменти інерції тіла, 84-94
 - відцентровий, 90
 - осьовий, 84
 - головний, 93
 - центральний, 94
- Момент кінетичний, 110
 - обертового тіла, 115
 - матеріальної системи, 114
- Основні одиниці механічних величин, 21
 - одиниця маси, 21
 - одиниця довжини, 21
 - одиниця сили, 21
- Переміщення можливі, 208
- Період коливань точки, 55
 - згасаючих коливань, 66
 - вільних коливань, 60
 - фізичного маятника, 125
- Поле сил нестационарне, 151
 - потенціальне, 152
 - стаціонарне, 151
 - сили ваги, 157
 - центральної сили, 159
- Потужність сили, 132, 138
- Принцип можливих переміщень, 212
 - д'Аламбера, 38, 161
 - відносності класичної механіки, 47
 - рівності дії та протидії, 21
- Радіус інерції тіла, 86
- Реакції ідеальних в'язей, 211
 - осі обертового тіла, 176
 - динамічні, 178
 - гіроскопічні, 319
- Рівняння Лагранжа 2-го роду, 233
 - теорії гіроскопа, 307
- Робота,
 - сили, 131
 - моменту сили, 138
 - сталої сили, 132
 - елементарна, 130
 - рівнодійної сили, 132
 - сили у потенціальному полі, 156
 - прикладеної до обертового тіла, 137
 - ваги, 133
 - пружності, 135
- Сила відновлювальна, 57
 - внутрішня, 94
 - інерції дотична, 40
 - інерції нормальна, 40
 - збурювальна, 70, 76
 - зовнішня, 95
 - інерції точки, 39
 - потенціальна, 153
 - ударна, 181
 - пружності, 135
- Система матеріальних точок, 44, 83
- Ступінь вільності системи, 209
- Теорема Карно, 194
 - Ляпунова про стійкість руху, 460
 - про зміну кінетичної енергії точки, 142
 - системи, 146

- кінетичного моменту, 110
- матеріальної системи, 116
- моменту кількості руху точки, 112
- про моменти інерції відносно паралельних осей, 87
- про роботу рівнодійної сили, 132
- про рух центра мас системи, 97
- Пуассона – Якобі, 285
- Резаля, 305
- основна теорії удару, 181
- Точка матеріальна, 19
- Удар, 181-197
 - прямий, 189
 - центральний, 190
 - об обертове тіло, 197
- Узагальнені координати системи, 222
 - швидкості, 224
 - сили, 225
- Фаза коливань, 54, 70
 - початкова, 54, 70
- Фізичний маятник, 123
- Форми головних коливань, 373, 390
- Функція Гамільтона, 280
 - Лагранжа, 240, 280
 - Ляпунова, 474-478
 - Релея дисипативна, 324
- Центр мас системи, 83
 - координати, 84
 - коливання фізичного маятника, 125
 - удару, 201
- Циклічні координати, 284
- Частота вільних (власних) коливань, 60
 - збурювальної сили, 79-80
 - колова, 60
- Час удару, 181
- Швидкість втрачена, 195
 - кутова після удару, 199
- Еліпсоїд інерції, 92
- Явище биття, 375

Навчальне видання

Литвинов Олег Іванович

Михайлович Ярослав Миколайович

Бойко Андрій Васильович

Березовий Микола Георгійович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник

У двох частинах

Частина II

Динаміка. Аналітична механіка

Редагування	Л.М. Талюта
	Н.В. Крошко
Макетування	І.О. Серова
Обкладинка	А.В. Братах

Підписано до друку 14.02.2013 Формат 60x84/16.
Папір офсет. №1. Гарнітура Palatino Linotype. Друк офс.
Наклад 1000 примірників, Зам. № 11

ДУ «НМЦ «Агроосвіта»
Київ-151, вул. Смілянська,11
тел. 249-94-04