

**Бурлака В.В., Кучеренко С.І.,
Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.**

Основи теорії механізмів і машин

курс лекцій

ПІДРУЧНИК

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ

**Харківський національний технічний університет
сільського господарства імені Петра Василенка**

**В.В.Бурлака, С.І.Кучеренко, Д.І.Мазоренко,
Л.М.Тищенко**

**Основи теорії
механізмів і машин
курс лекцій**

Підручник

**Рекомендовано в якості підручника для студентів
агротехнічного профілю Міністерством аграрної
політики України**

**Харків
2009**

ББК 34.41
УДК 621.01
О75

Гриф присвоєно Міністерством аграрної політики України
(Лист №14/18-Г-1095 від 19.05.08)

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор *Лавинський В.І.*
(Національний технічний університет “ХПІ”),

доктор технічних наук, професор *Ларін О.М.* (Університет
цивільної оборони України).

**В.В. Бурлака, С.І. Кучеренко, Д.І. Мазоренко,
Л.М. Тищенко.** Основи теорії механізмів і машин. Курс
лекцій. Підручник – Харків, 2009. – 340с.: іл. – 161.

Курс лекцій з теорії механізмів і машин містить матеріал, який викладається протягом останніх років у Харківському національному технічному університеті сільського господарства ім. Петра Василенка. Він відповідає новій програмі з теорії механізмів і машин і розрахований на студентів як денної, так і заочної форм навчання.

*Видання здійснене за рахунок засобів Харківського
благодійного Фонду “Інженерні кадри села”*

ISBN

ББК 34.41
О75

@ В.В. Бурлака, С.І. Кучеренко,
Д.І. Мазоренко, Л.М. Тищенко,
2009

ПЕРЕДМОВА

Основу навчального посібника склав курс лекції з теорії механізмів і машин, що сформувався на основі досвіду викладання дисципліни в Харківському національному технічному університеті сільського господарства ім. Петра Василенка.

Обсяг і зміст підручника визначалися наступними обставинами.

Як справедливо зауважують автори [2], інженерно-технічні спеціальності вузів можна підрозділити на дві групи:

- конструкторські;
- технологічні і експлуатаційні.

Значення курсу теорії механізмів і машин для підготовки інженерів, що *проектують нові машини і механізми*, очевидно, тому що загальні методи синтезу механізмів, що викладаються в загальних курсах, дають можливість знаходити параметри механізмів із заданими кінематичними та динамічними властивостями.

Трохи інше значення має курс теорії механізмів і машин для *технологічних і експлуатаційних спеціальностей*. Інженери, що виготовляють і експлуатують машини, повинні добре знати основні види механізмів і їхні кінематичні та динамічні властивості. Ці знання необхідні для ясного розуміння принципів роботи окремих механізмів та їх взаємодії в машині.

У більшості технічних вузів сільськогосподарського профілю готують інженерів-механіків експлуатаційного напрямку, для яких знання основних видів механізмів і їх кінематичних і динамічних властивостей є визначальним.

Друга обставина пов'язана зі зменшенням лекційних годин, що відводяться в навчальних планах на вивчення даної дисципліни. Унаслідок цього, вивчення деяких розділів курсу перенесено на практичні заняття.

ЛЕКЦІЯ 1

ЗМІСТ

Вступ

1. **Структурний аналіз плоских механізмів.**
 - 1.1. Основні поняття і визначення.
 - 1.2. Класифікація кінематичних пар.
 - 1.2.1. Класифікація кінематичних пар за числом ступіней вільності.
 - 1.2.2. Класифікація кінематичних пар за характером поверхонь, якими дотикаються ланки.
 - 1.2.3. Класифікація кінематичних пар за способом замикання.
 - 1.3. Кінематичний ланцюг.

ВСТУП

При вивченні будь-якого механізму або машини доводиться розглядати не тільки питання, які є специфічними для даного механізму, але і ряд питань, що відносяться рівною мірою до деякої групи механізмів або навіть до всіх механізмів.

Курс теорії механізмів і машин призначений для вивчення питань з дослідження і проектування, які є загальними для більшості механізмів і машин.

В теорії механізмів і машин розв'язуються дві задачі.

Перша задача, яку називають *аналізом механізмів*, полягає в тому, щоб визначити структурні, кінематичні і динамічні характеристики механізму за відомою схемою.

Друга задача, яку називають *синтезом механізмів*, є задачею, зворотною до аналізу, тобто при синтезі потрібно спроектувати схему механізму під задані структурні, кінематичні чи динамічні умови.

Зупинимося на поняттях *машини* і *механізму*.

Машина – пристрій, що виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів і інформації (двигуни внутрішнього згорання, верстати, прокатні стани і т.д.).

Машина здійснює свій робочий процес за допомогою виконання закономірних механічних рухів. Носієм цих рухів є механізм.

Механізм – система тіл, призначена для перетворення руху одного чи декількох тіл у необхідні рухи інших тіл.

Усі механізми поділяються на *просторові* і *плоскі*.

Просторовими механізмами називаються такі механізми, точки деталей яких описують неплоскі траєкторії чи траєкторії, що лежать у площинах, які перетинаються.

Плоскими механізмами називаються такі механізми, точки деталей яких описують траєкторії, що лежать в одній чи декількох паралельних площинах.

Надалі будуть розглядатися, в основному, плоскі механізми.

Як впливає з визначення, до складу машини входить декілька механізмів. Тому, у курсі спочатку вивчається теорія механізмів. Оскільки, вивчивши властивості окремих механізмів, можна переходити до вивчення сукупності механізмів, що утворюють машину – до *теорії машин*.

Для вивчення теорії механізмів і машин необхідні, у першу чергу, знання з таких дисциплін як математика, фізика і теоретична механіка.

Для вивчення курсу рекомендується наступна література:

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М., 1976.
2. Юдин В.А., Петрокс А.В. Теория механизмов и машин. М., 1973.
3. Кореняко А.С. Теория механизмов и машин. Киев, 1976.
4. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Под редакцией Кореняко А.С. Киев. 1970.
5. Теория механизмов и машин. Под редакцией Фролова К.В. М., 1987.
6. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. Київ. 2002.

1. Структурний аналіз плоских механізмів

1.1. Основні поняття і визначення

Будь який механізм є системою твердих тіл.

Сукупність твердих тіл (деталей), які у складі механізму рухаються як одне ціле, називається ланкою.

Наприклад, шатун двигуна внутрішнього згорання (рис.1.1,а) включає наступні деталі: 1 – тіло шатуна; 2 – запресована втулка; 3 – головка шатуна; 4 – вкладиші; 5 – болти, гайки, шайби, шплінти. При роботі механізму вся ця сукупність деталей рухається як одне ціле, отже, це одна ланка.

Якщо в спеціальних дисциплінах деталі механізмів розрізняють за конструктивними ознаками (колінчатий вал, шатун, поршень, зубчасте колесо і т.д.), то в теорії

механізмів і машин ланки розрізняють за характером їх руху в складі механізму.

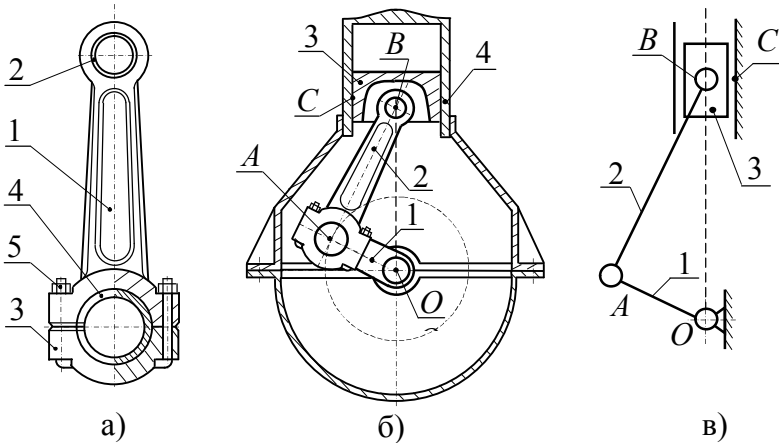


Рис. 1.1.

За характером руху в складі механізму ланки одержали назви:

- стійка** – нерухома ланка механізму;
- кривошип** – ланка, що робить повний оборот навколо нерухомої осі;
- коромисло** – ланка, що робить не повний оборот навколо нерухомої осі;
- повзун** – ланка, яка рухається поступально відносно іншої ланки;
- куліса** – рухома ланка механізму, у якої є напрямні для повзуна;
- шатун** – ланка механізму, рух якої є плоским.

У будь-якому механізмі є одна нерухома ланка (стійка) і одна або декілька ланок, що рухаються.

Таким чином, механізм можна розглядати як сукупність нерухомої та рухомих ланок.

Крім того, у складі будь-якого механізму розрізняють, незалежно від їхнього руху, наступні ланки: вхідну, вихідну і початкову.

Вихідною називають ланку, що робить рух, для якого призначений механізм.

Вхідною називається ланка, якій задається рух, що буде перетворений механізмом у необхідний рух вихідної ланки.

На рис. 1.1,б зображена енергетична машина – одноциліндровий двигун внутрішнього згоряння, у якому поступальний рух поршня 3 (за характером руху – **повзун**), що викликається тиском газів у циліндрі 4 (нерухома ланка – **стійка**), перетворюється за допомогою **шатуну** 2 (плоский рух) в обертальний рух колінчатого вала (**кривошипа**) 1.

У механізмі двигуна вхідною ланкою є поршень 3, а вихідною – колінчатий вал 1.

Початковою називають ту ланку, якій задають закон руху при проведенні аналізу механізму.

Наприклад, закон руху вхідній ланці двигуна внутрішнього згоряння задати досить складно, тому що швидкість повзуна 3 змінюється за синусоїдальним законом в залежності від його переміщення. З іншого боку, якщо при аналізі такого механізму за початкову ланку прийняти кривошип 1, то для означення закону його руху достатньо вказати куту швидкість.

У машинах та механізмах ланки між собою з'єднані таким чином, що завжди забезпечується можливість їхнього відносного руху.

Рухоме з'єднання двох дотичних ланок називається кінематичною парою.

У розглянутому механізмі (рис.1.1,б) з'єднання ланок у точках O (кривошип – стійка), A (кривошип – шатун) і B (шатун – повзун) допускають тільки обертання однієї ланки відносно другої. Таке з'єднання називається **обертальною кінематичною парою**. З'єднання в точці C (повзун – стійка) допускає тільки поступальний рух однієї ланки відносно другої і називається **поступальною кінематичною парою**.

У теорії механізмів і машин аналіз механізмів виконується за їх схемами. На схемах механізмів ланки і кінематичні пари зображуються умовними позначеннями. Ланки нумеруються цифрами, а кінематичні пари і різні точки ланок – буквами. Наприклад, на схемі двигуна внутрішнього згоряння (рис.1.1,в) цифрами 1, 2 і 3 позначені відповідно кривошип, шатун і повзун. Нерухомій ланці – стійці, як правило, привласнюється номер 0. Обертальні кінематичні пари O , A і B зображаються кружечками, а поступальна кінематична пара C – двома паралельними напрямними для повзуна 3.

При зображенні механізму на кресленні розрізняють його **структурну** та **кінематичну** схеми.

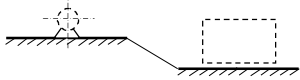
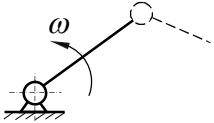
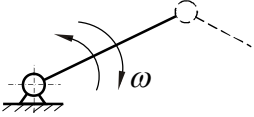
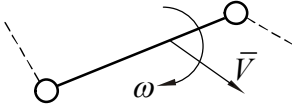
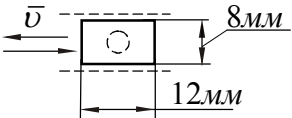
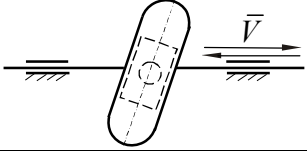
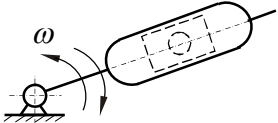
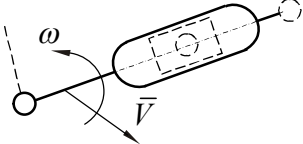
Структурною називається схема механізму, виконана умовними позначеннями ланок і кінематичних пар без дотримання лінійних розмірів.

Кінематичною називається схема механізму, виконана умовними позначеннями ланок і кінематичних пар з дотриманням масштабу довжин. За такою схемою можна робити кінематичний і динамічний аналіз механізму.

Умовні зображення основних типів ланок, які були розглянуті на початку розділу, представлені в таблиці 1.1. (Пунктирними лініями показані кінематичні пари та ланки, які приєднуються до ланок, що розглядаються).

Таблиця 1.1

Основні типи ланок механізмів

Назва	Умовне зображення ланки	Рух, який виконує ланка
стійка		відсутній
кривошип		обертальний
коромисло		коливальний
шатун		плоский
повзун		поступальний
куліса		поступальний
куліса		коливальний або обертальний
куліса		плоский

1.2. Класифікація кінематичних пар

Кінематичні пари класифікуються за наступними ознаками:

- число ступіней вільності;
- характеру дотикання ланок в кінематичній парі;
- способу замикання.

1.2.1. Класифікація кінематичних пар за числом ступіней вільності

З теоретичної механіки відомо, що вільне тіло в просторі (рис. 1.2) має шість ступіней вільності H , тобто може робити шість незалежних один від одного рухів:

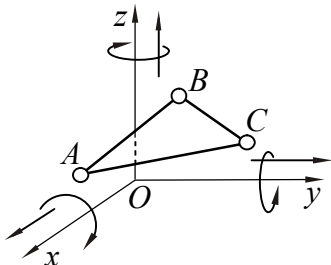


Рис. 1.2.

- три поступальних рухи за напрямками осей Ox , Oy і Oz ;
- три обертальних рухи навколо осей Ox , Oy и Oz .

Оскільки кінематична пара (надалі просто пара) – це рухоме з'єднання двох ланок, то поверхня однієї ланки, що дотикається поверхні другої ланки, буде накладати обмеження на можливі рухи другої ланки. Ці обмеження називають **числом умовами в'язі** S в кінематичній парі.

Очевидно, що число умов в'язі S може бути тільки цілим і меншим шести. Якщо $S = 6$, то кінематична пара стає жорстким з'єднанням двох ланок, тобто дві ланки стають однією ланкою. Число умов в'язі не може бути і меншим одиниці, тому що в цьому випадку ланки не будуть стикатися між собою, тобто буде існувати два тіла, що рухаються незалежно одне від другого.

Таким чином, число ступенів вільності H ланки, що входить в кінематичну пару у відносному русі можна виразити залежністю:

$$H = 6 - S, \quad \text{де} \quad 1 \leq S \leq 5.$$

У залежності від обмежень, що накладаються умовами в'язі, кінематичні пари діляться на класи.

Клас кінематичної пари визначається **числом умов в'язі**, що накладаються на відносний рух ланок, які входять у цю пару.

Оскільки, число умов в'язі може бути від 1 до 5, то число класів пар дорівнює п'яти, у відповідності з чим, розрізняють кінематичні пари I, II, III, IV і V класів.

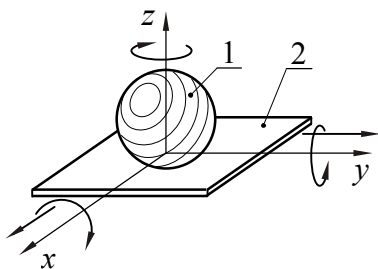


Рис. 1.3.

Кінематична пара, яку утворює куля з площиною (рис. 1.3), накладає одне обмеження – блокує рух кулі відносно площини в напрямі осі z . При зміщенні кулі вгору, вона відірветься від площини (зникне кінематична пара), а при зміщенні вниз – кінематична пара зруйнується.

Для такої пари умов в'язі – $S = 1$, а число ступеней вільності – $H = 6 - 1 = 5$. Таким чином, це пара I класу.

Кінематична пара утворена циліндром і площиною (рис. 1.4) накладає два обмеження – блокується можливість переміщення в напрямі осі z і обертання навколо осі y .

Оскільки, в такій кінематичній парі $S = 2$, то $H = 6 - 2 = 4$. Відповідно така кінематична пара належить до II класу.

Обертальна кінематична пара, що зображена на рис. 1.5, обмежує п'ять незалежних рухів ($S = 5$), можливим є тільки обертання навколо осі x , отже, це пара V класу.

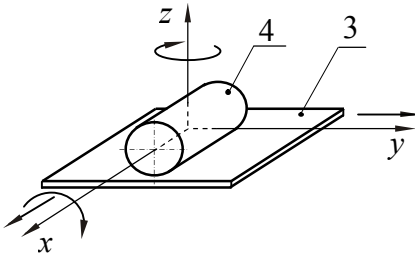


Рис. 1.4.

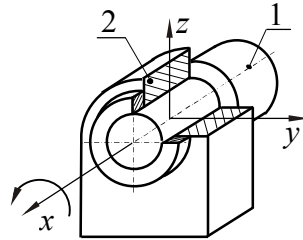


Рис. 1.5.

У таблиці 1.2. наведені деякі кінематичні пари та їх умовні позначення на схемах механізмів. Наведені пари найбільш часто застосовуються в плоских механізмах.

Крім обертальної, до пар V класу відносяться **поступальна** (допускає поступальне переміщення однієї ланки по пазу другої) і **гвинтова**.

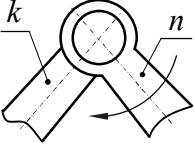
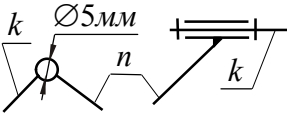
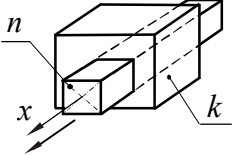
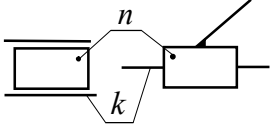
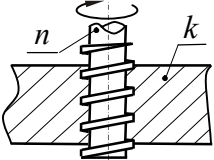
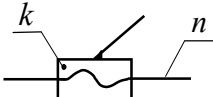
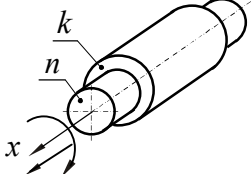
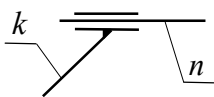
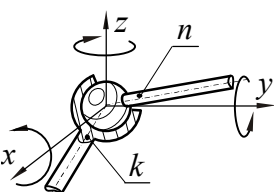
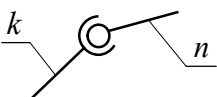
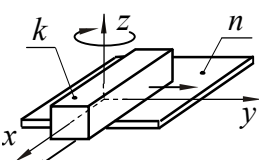
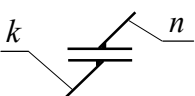
Гвинтова пара при нерухомій гайці k , допускає обертання навколо своєї осі гвинта n і одночасне його переміщення уздовж цієї осі. Оскільки ці два рухи взаємозалежні, то гвинтова пара має одну ступінь вільності ($H = 1$, $S = 5$).

Циліндрична пара відноситься до IV класу, оскільки допускає два незалежних рухи (переміщення вздовж осі та обертання навколо цієї осі).

У **сферичній парі** одна ланка щодо другої може обертатися навколо трьох взаємно перпендикулярних осей координат, а **площинна** – допускає поступальний рух уздовж двох осей координат і обертання навколо третьої. Обидві ці кінематичні пари відносяться до III класу.

Таблиця 1.2

Умовні позначення кінематичних пар

Рисунок пари	Назва та умовне позначення	Клас	S	H
	Обертальна 	V	5	1
	Поступальна 	V	5	1
	Гвинтова 	V	5	1
	Циліндрична 	IV	4	2
	Сферична 	III	3	3
	Площинна 	III	3	3

1.2.2. Класифікація кінематичних пар за формою поверхонь, якими дотикаються ланки

Сукупність поверхонь, ліній або точок, що належать ланкам, якими ланки дотикаються одна одній при відносному русі, називаються *елементами кінематичних пар*.

У залежності від *форми елементів* кінематичні пари поділяються на *нижчі* і *вищі*.

Нижчою називається пара, ланки якої стикаються по поверхні.

Втулка 2 і вісь 1 (рис. 1.5) утворюють нижчу кінематичну пару, оскільки вони стикаються по циліндричній поверхні. Усі кінематичні пари, наведені в таблиці 1.2. відносяться до нижчих.

Вищою називається пара, ланки якої стикаються по лінії або в точці.

Куля (рис. 1.3) і циліндр (рис. 1.4.) із площиною утворюють вищу кінематичну пару. Куля стикається з площиною в точці, а циліндр – по лінії

Одною з переваг нижчих кінематичних пар, враховуючи великі площі контактних поверхонь між ланками, є можливість передачі великих зусиль. Крім того, нижчі кінематичні пари допускають обернення руху, тобто характер відносного руху не змінюється в залежності від того, яка з ланок кінематичної пари є рухомою.

У свою чергу, вищі кінематичні пари, у порівнянні з нижчими, дозволяють зменшити втрати на тертя (шарикопідшипник, роликпідшипник), оскільки сили тертя кочення завжди менші ніж сили тертя ковзання. Крім того, ці кінематичні пари дозволяють отримати які завгодно закони руху вихідної ланки.

1.2.3. Класифікація кінематичних пар за способом замикання

Для того, щоб елементи кінематичних пар знаходилися в постійному контакті, вони повинні бути замкнуті. Замикання може бути або *геометричним*, або *силовим*.

Геометричне замикання здійснюється відповідними геометричними формами елементів кінематичної пари.

Обертальна (рис. 1.5), поступальна, гвинтова, циліндрична і сферична (таблиця 1.2) кінематичні пари є замкнутими геометрично, оскільки постійний контакт елементів ланок цих пар забезпечується їх геометричними формами.

Силове замикання елементів кінематичної пари здійснюється під дією зовнішніх сил.

Щоб пари, показані на рис. 1.3 і 1.4 були замкнуті, необхідно кулю і циліндр притиснути до площини якоюсь силою. Силове замикання забезпечується вагою ланки, силою пружності пружини і т.д.

1.3. Кінематичний ланцюг

Кінематичним ланцюгом називається система ланок, зв'язаних між собою кінематичними парами.

Таким чином, будь-який механізм є кінематичним ланцюгом.

На рис. 1.6 показані приклади кінематичних ланцюгів, ланки яких з'єднані обертальними парами.

Кінематичні ланцюги діляться на *прості* і *складні*, *замкнуті* і *розімкнуті*, *плоскі* і *просторові*.

Простим називається кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить не більш ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.6, а, б), а **складним** – у якого є хоч би одна ланка, що входить більш ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.6, в, г).

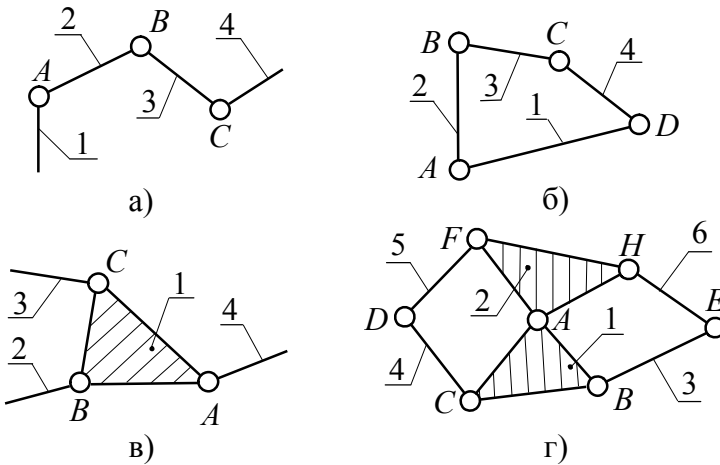


Рис. 1.6.

У **замкнутому** кінематичному ланцюзі кожна ланка входить не менш чим у дві кінематичні пари (рис. 1.6, б, г), а в **розімкнутому** – є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару (рис. 1.6, а, в).

Плоским називають ланцюг, у якого всі точки ланок рухаються в одній або декількох паралельних площинах, а **просторовим** – у якого точки ланок рухаються в різних непаралельних площинах.

ЛЕКЦІЯ 2

ЗМІСТ

- 1.4. Особливості плоского кінематичного ланцюга.
- 1.5. Ступінь вільності кінематичного ланцюга.
- 1.6. Принцип утворення механізмів.
- 1.7. Структурна класифікація плоских механізмів.
 - 1.7.1. Механізм I класу.
 - 1.7.2. Механізм II класу.
 - 1.7.3. Механізми III та IV класів.
- 1.8. Формула побудови механізму.
Контрольні питання до теми 1.

1.4. Особливості плоского кінематичного ланцюга

Більшість механізмів, що використовуються у сільськогосподарських машинах належать до плоских, тобто рух їх ланок відбувається в одній чи декількох паралельних площинах. Такий рух ланок накладає ряд обмежень на кінематичні пари, які можуть використовуватися в плоскому кінематичному ланцюзі.

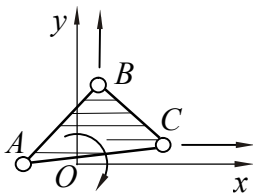


Рис. 1.7.

Кожна вільна ланка на площині має три ступені вільності (рис. 1.7): два поступальних рухи вздовж осей координат Ox , Oy і обертання в цій площині (навколо осі Oz , перпендикулярної до площини руху ланок).

Таким чином, до складу плоских кінематичних ланцюгів не можуть входити кінематичні пари I, II і III класів, оскільки число їх ступенів вільності більше або

дорівнює (відповідно 5, 4 і 3) числу ступенів вільності у тіла на площині.

Якщо до складу плоского механізму буде входити, наприклад сферична пара (таблиця 1.2), яка допускає обертання навколо трьох осей координат, то в механізмі буде використовуватися тільки обертання навколо осі Oz , а дві інші ступені вільності будуть заблоковані схемою механізму. Таким чином, у плоскому кінематичному ланцюзі сферична пара буде відповідати обертальній парі V класу.

З огляду на те, що клас пари визначається кількістю обмежень, що накладається на відносний рух ланок, то пара V класу на площині накладає 2 обмеження (допускає один незалежний рух), а пара IV класу – одне (допускає два незалежних рухи).

Кінематичні пари IV класу, які використовуються в плоских ланцюгах, можуть бути тільки вищими. У нижчих парах один з можливих рухів буде блокуватися плоским кінематичним ланцюгом. Так, наприклад, нижча циліндрична кінематична пара IV класу C , утворена поверхнею поршня і стінками циліндра двигуна внутрішнього згоряння (рис. 1.1,б), допускає два незалежних рухи – поступальний уздовж однієї з осей і обертаний навколо цієї осі (таблиця 1.2). Плоскою схемою механізму двигуна можливість обертання навколо осі руху поршня блокується. Тому ця кінематична пара відповідає поступальній кінематичній парі V класу.

До найбільш розповсюдженої пари IV класу, яка широко використовується в плоских механізмах, належить пара, утворена двома циліндричними поверхнями з паралельними осями (рис. 1.8,а). У цій парі один циліндр може перекочуватися по поверхні другого з ковзанням,

постійно стикаючись по лінії. Ковзання уздовж твірних циліндрів блокується плоскою схемою механізму. Ця пара в перетині площиною, перпендикулярною до осей циліндрів, дає дві дотичні криві (рис. 1.8,б).

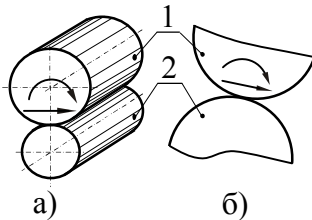


Рис. 1.8.

Така кінематична пара має місце, наприклад, при зачепленні зубців двох зубчастих коліс у зубчастому механізмі, або при контакті ролика з поверхнею кулачка в кулачковому механізмі.

1.5. Ступінь вільності кінематичного ланцюга

Розглянемо питання про визначення ступеня вільності плоского кінематичного ланцюга (механізму).

При дослідженні рухів ланок механізму розглядаються їх абсолютні переміщення щодо однієї ланки, яку приймають за нерухому (стійку).

Нехай ланцюг (механізм) складається із n ланок, які рухаються. Якщо розглядати ці ланки без зв'язків одна з одною, то всі ланки, що рухаються, будуть мати $3n$ ступенів вільності. Однак усі ланки попарно утворять кінематичні пари, які зменшать число ступенів вільності (можливих рухів) цих ланок.

З'єднання ланок за допомогою кінематичних пар накладає різне число обмежень на відносний рух ланок, що залежить від класу пар.

Якщо число пар п'ятого класу дорівнює P_5 , а число пар IV класу – P_4 , то з $3n$ ступенів вільності, якими володіли ланки до їхнього входження в кінематичні пари, необхідно виключити ті ступені вільності, що віднімуться

входженням ланок у кінематичні пари. Тоді число ступенів вільності W , якими володіє кінематичний ланцюг, дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

Записана рівність отримала назву **формули рухливості** або **структурної формули плоского кінематичного ланцюга**. Уперше формула була запропонована П.Л. Чебишевим у 1869 році і названа його іменем.

Оскільки механізм являє собою кінематичний ланцюг з ланками, що мають цілком визначені рухи, то необхідно з'ясувати питання про те, як пов'язана однозначність рухів ланок механізму з його ступенем рухливості. Якщо ступінь рухливості механізму дорівнює одиниці, тобто його ланки, що рухаються, мають одну ступінь вільності відносно ланки, яку прийнято за нерухому (стійку), то досить одній із ланок механізму задати цілком визначений закон руху (електродвигуном, тиском газів у циліндрі і т.д.) відносно стійки. При цьому всі інші ланки механізму будуть виконувати цілком визначені однозначні рухи.

У випадку, якщо механізм має дві ступені рухливості, то необхідно задати відносно стійки по одному незалежному руху двом ланкам і т.д.

Якщо ступінь рухливості дорівнює нулю, то жодна з ланок не може рухатися відносно нерухомої ланки і кінематичний ланцюг перетворюється у ферму, тобто в цьому випадку отримуємо нерухому конструкцію.

Таким чином, можна зробити висновок, що **механізм – це кінематичний ланцюг, у якого задані закони руху такій кількості ланок, при якій всі інші ланки почали робити цілком визначені рухи.**

Після створення структурної схеми механізму для машини, яка проектується, конструктор, щоб уникнути можливих помилок, повинен перевірити число ступенів рухливості механізму. Визначивши число ланок і число та клас кінематичних пар, необхідно за формулою Чебишева знайти ступінь рухливості механізму, яка повинна відповідати числу його **вхідних ланок** і числу обраних **початкових ланок** при виконанні його аналізу.

Дослідимо структуру шарнірного ланцюга, показаного на рис. 1.9. Число ступеней рухливості визначимо відносно однієї з ланок, наприклад 1.

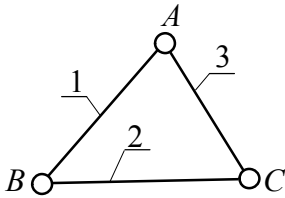


Рис. 1.9.

Оскільки кінематичний ланцюг, приєднаний до 1 ланки, складається з двох ланок ($n = 2$) і трьох кінематичних пар V класу ($P_5 = 3$, $P_4 = 0$), то за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Таким чином, шарнірне з'єднання трьох деталей не має відносної рухливості частин і являє собою не механізм, а одну ланку. Якщо надалі в складі механізмів буде зустрічатися таке шарнірне з'єднання, то його завжди будемо вважати за одну ланку. Таке шарнірне з'єднання деталей є основою при створенні нерухомих споруд (ферм).

Скористаємося формулою Чебишева для визначення числа ступенів рухливості механізму, що зображений на рис. 1.10.

Механізм включає 5 рухливих ланок і 7 кінематичних пар V класу. Ланки 0-1, 1-2, 2-3, 0-3, 3-4 і 4-5 утворюють обертальні пари A , B , C , D , E , і F , а ланки 0-5 – поступальну пару G .

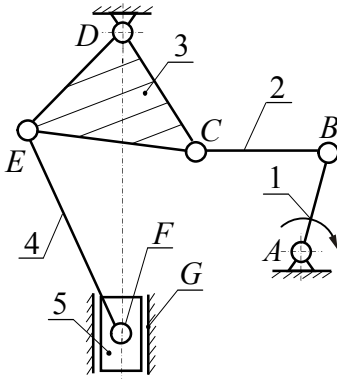


Рис. 1.10.

Таким чином, для механізму:

$$n = 5; P_4 = 0; P_5 = 7.$$

Тоді ступінь рухливості дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Як бачимо, даний механізм має одну ступінь рухливості.

Це означає, що при заданому положенні однієї з його ланок інші ланки також будуть займати однозначно визначені положення. Якщо одну з ланок механізму змусити рухатися за якимось законом, то всі його інші ланки також будуть мати цілком визначені рухи, які будуть функціями заданого закону.

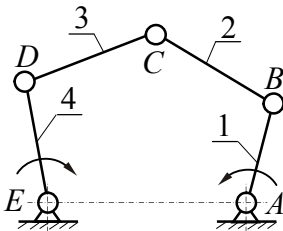


Рис. 1.11.

Механізм, який зображений на рис.1.11 включає 4 ланки ($n = 4$), що рухаються, та 5 кінематичних пар V класу. Ланки 0–1, 1–2, 2–3, 3–4 и 4–0 утворюють обертальні пари A , B , C , D і E ($P_4 = 0, P_5 = 5$). Тоді:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2.$$

Таким чином, для однозначного визначення рухів ланок такого механізму необхідно задати незалежні закони руху відносно стійки двом ланкам.

1.6. Принцип утворення механізмів

Основний принцип утворення механізмів був вперше сформульований в 1914 г. російським ученим Л.В.Ассуром.

Їм був запропонований і розвинутий метод утворення механізмів *шляхом послідовного нашарування кінематичних ланцюгів, що володіють певними структурними властивостями.*

Метод Ассура простежимо на прикладі механізму грохоту, що зображений на рис.1.12.

Механізм включає 5 рухливих ланок (1, 2, 3, 4, 5) і 7 кінематичних пар V класу (A, B, C, D, E, F, G), тобто $n=5$, $P_5=7$. За формулою Чебишева ступінь рухливості механізму дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

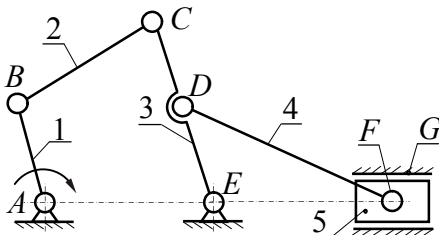


Рис. 1.12.

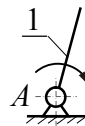


Рис. 1.13.

Враховуючи, що даний механізм володіє одною ступінню рухливості, то достатньо надати руху одній ланці і всі інші ланки почнуть виконувати однозначно обумовлені рухи.

Тепер визначимо ступінь рухливості механізму, який зображений на рис. 1.13. Механізм включає одну рухливу ланку (1) і одну кінематичну пару V класу (A), тобто $n=1$, $P_5=1$. За формулою Чебишева ступінь рухливості такого механізму дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Якщо порівняти механізм грохоту (рис.1.12) із рис. 1.13, то в складі грохоту є така ж група, яка включає стійку 0 і ланку 1, до якої кінематичною парою B приєднаний кінематичний ланцюг, що складається з чотирьох ланок. Оскільки ступінь рухливості групи 0-1 механізму грохоту дорівнює одиниці, то виходить, що ступінь рухливості кінематичного ланцюга, який складається з ланок 2, 3, 4 і 5 дорівнює нулю.

Таким чином, ***механізми утворюються шляхом приєднання до початкової ланки і стійки (ступінь рухливості дорівнює одиниці) кінематичного ланцюга зі ступенем рухливості рівною нулю.***

Кінематичний ланцюг з нульовою ступінню рухливості отримав назву групи Ассура.

Групою Ассура називається кінематичний ланцюг з нульовою ступінню рухливості відносно тих ланок, з якими входять у кінематичні пари вільні елементи його ланок, що не розпадається на більш прості ланцюги з нульовою ступінню рухливості.

Кінематичний ланцюг, який включає ланки 2, 3, 4, 5 ($n = 4$) і кінематичні пари B, C, D, E, F, G ($P_5 = 6$), механізму грохоту (рис. 1.12) має ступінь рухливості рівну нулю:

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

але не є групою Ассура, оскільки він розпадається на два кінематичні ланцюги, що включають ланки 2, 3 (кінематичні пари B, C, E) і 4, 5 (кінематичні пари D, F, G), кожен з яких має нульову ступінь рухливості:

$$W_{2,3} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0;$$

$$W_{4,5} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Процес утворення механізму грохоту можна представити як послідовне приєднання до групи, що складається із початкової ланки 1 і стійки 0 (ступінь рухливості дорівнює одиниці) кінематичного ланцюга BCE , що складає з ланок 2 і 3 (мал.1.14).

Отриманий механізм $ABCE$, має одну ступінь рухливості:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \quad (n = 3, P_5 = 4).$$

Далі, до ланки 3 механізму $ABCE$ і стійки 0 приєднується кінематичний ланцюг DFG , що складається з ланок 4 і 5.

У результаті виходить механізм, який включає 5 рухомих ланок і має одну ступінь рухливості.

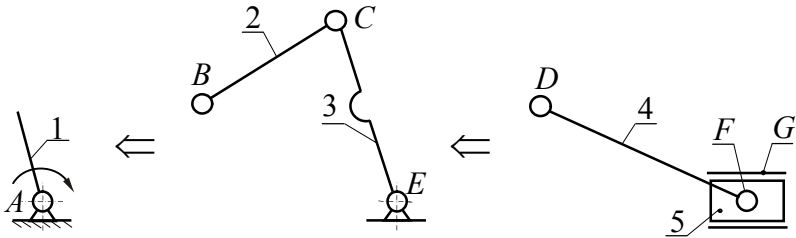


Рис. 1.14.

Таким чином, механізм, що зображений на рис.1.12, утворений шляхом приєднанням до початкової ланки 1 і стійки 0 двох груп Ассур:

- перша група складається з ланок 2 і 3;
- друга група складається з ланок 4 і 5.

Установимо закономірність утворення механізму:

- будь-який механізм має одну нерухому ланку (стійку – 0);

- механізм повинний мати число початкових ланок (яким задається закон руху), рівне числу його ступенів рухливості;
- подальший розвиток схеми механізму відбувається шляхом приєднання груп Ассура.

При послідовному приєднанні груп Ассура необхідно керуватися певними правилами.

При утворенні механізму з *однією ступінню рухливості* перша група приєднується вільними елементами ланок до *початкової ланки* і до *стійки*.

Наступні групи можуть приєднуватися до будь-яких ланок отриманого механізму тільки так, щоб ланки групи мали рухливість одна відносно другої.

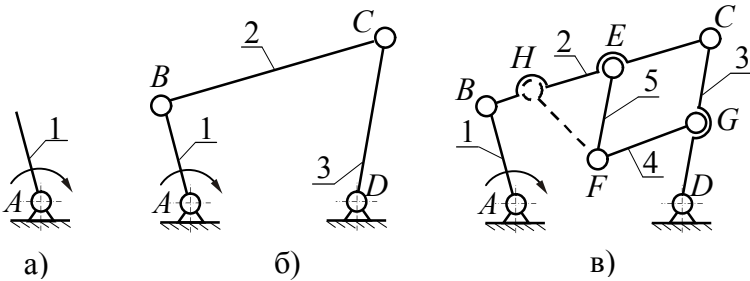


Рис. 1.15.

До початкової ланки 1 і стійки 0 (рис.1.15,а) приєднується група 2-3 (рис.1.15,б). Наступна група (4-5) приєднується до *будь-яких двох різних ланок* механізму (наприклад, 2 і 3), але не до однієї й тієї ж самої ланки. У випадку приєднання *EFH* (рис.1.15,в) утворений ланками контур буде жорстким, тобто буде фермою.

1.7. Структурна класифікація плоских механізмів

1.7.1. Механізм I-го класу

Механізмом I-го класу умовно називають **початкову ланку** і **стійку**, які утворюють між собою кінематичну пару 5 класу.

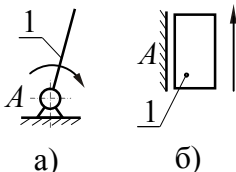


Рис. 1.16.

На рис. 1.16 зображені механізми I-го класу, початкові ланки і стійка яких утворюють між собою обертальну (рис.1.16,а) або поступальну (рис. 1.16,б) кінематичну пару.

Неважко визначити, що ступінь рухливості механізму I-го класу дорівнює одиниці.

Зображення схеми механізму, як на рис.1.16,а, буде справедливим для електродвигуна, парової чи гідравлічної турбіни, відцентрового насоса. В електродвигуна рухливою ланкою є якор, що обертається в опорах нерухомого корпусу. У парової чи гідравлічної турбіни рухливою ланкою є ротор з лопатками, які сприймають енергію струменя чи пари води. Ротор з лопатками обертається в опорах нерухомого статора.

Схемне зображення парового молота, що складається з нерухомого парового циліндра і рухливого молота, буде відповідати рис. 1.16,б.

Для того щоб одержати більш складні механізми потрібного ступеня рухливості необхідно до механізму (механізмів) I-го класу приєднати систему ланок, яка являє собою один або кілька кінематичних ланцюгів з нульовою ступінню рухливості. Наприклад, механізм грохоту (рис. 1.12, 1.14) у своєму складі має один механізм I-го класу, а механізм зображений на рис. 1.11 – два.

1.7.2. Механізм II-го класу

Число ланок і пар в кінематичному ланцюзі, що приєднується до механізму I-го класу, можна визначити з формули Чебишева.

Нехай до складу кінематичного ланцюга входять тільки кінематичні пари V класу. Тоді ступінь рухливості групи Ассура дорівнює:

$$W_A = 3n - 2P_5 = 0.$$

Це рівняння є *структурною формулою групи Ассура*.

Із формули витікає:

$$P_5 = \frac{3}{2}n. \quad (1.1)$$

Оскільки числа ланок і пар можуть бути тільки цілими, то останній умові задовольняють тільки наступні сполучення чисел ланок і кінематичних пар, що входять у групу (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Число n ланок і число P_5 кінематичних пар у групі Ассура.

№ п.п.	1	2	3	4
n	2	4	6	8
P_5	3	6	9	12

Задаючись різними сполученнями чисел n і P_5 , можна одержати групи різного виду. Всі отримані в такий спосіб групи можна розбити на класи.

Найпростіші сполучення чисел ланок і пар, що задовольняють умові (1.1), буде: $n = 2$, $P_5 = 3$.

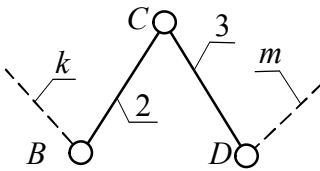


Рис. 1.17

Оскільки будь-яка група після свого приєднання до початкової ланки і стійки утворить замкнутий кінематичний ланцюг, то можна зробити висновок, що **число елементів, якими група приєднується, не може бути менше двох.**

Тоді, в найбільш простій групі ($n = 2, P_3 = 3$) по одному елементу B і D кінематичних пар на кожній ланці залишаються вільними, а два інших з'єднуються між собою, утворивши внутрішню пару C групи (рис.1.17).

Ця група може бути приєднана елементами B і D до двох будь-яких ланок k і m механізму.

Оскільки кінцевими елементами B і D група не повинна приєднуватися до однієї ланки то, при приєднанні групи до одного механізму I класу елементом B група приєднується до початкової ланки 1, а елементом D до стійки (рис. 1.15,б). Та ж група елементами B і D може бути приєднана до двох механізмів I класу (рис. 1.11), але в цьому випадку механізм має ступінь рухливості, рівну двом.

Група, до складу якої входить 2 ланки і 3 кінематичні пари V класу, називається групою II класу 2 порядку, або 2-х повідковою групою, тому що приєднання цієї групи до основного механізму виконується двома повідками BC і BA .

Порядок групи визначається числом елементів, якими група приєднується до основного механізму.

Групи Ассура II класу, що складаються з 2 ланок і 3 кінематичних пар, поділяються на види в залежності від

числа і розташування обертальних і поступальних пар (табл.1.4).

Група, до складу якої входять тільки обертальні кінематичні пари називається *першим видом*.

Усі наступні види групи II класу можуть бути отримані шляхом заміни окремих обертальних пар поступальними.

В *другому виді* поступальною парою замінена одна з крайніх обертальних пар A або C .

У *третьому виді* – поступальною парою замінена середня обертальна пара B .

Четвертий вид – дві крайні обертальні пари A і C замінені двома поступальними парами.

П'ятий вид – поступальними парами замінені крайня C і середня B обертальні пари.

Механізми, до складу яких входять групи Ассура класу не вище другого, називаються механізмами II класу.

Більшість механізмів, які знайшли своє використання в сучасних машинах, належать до механізмів II класу.

1.7.3. Механізми III та IV класів

Друге сполучення чисел ланок і кінематичних пар: $n = 4$, $P_5 = 6$. Для цього сполучення можна отримати два типи кінематичних ланцюгів.

Перший кінематичний ланцюг, що показаний на рис.1.18,а, складається з базисної ланки 2 (пари C , E , D), до якої приєднані три повідки 1, 3 та 4.

Таблиця 1.4.
Схеми груп Л.В.Ассура II класу

Вид	Схема групи	
	Загальна	Яка найбільш часто використовується
1		
2		
3		
4		
5		

Такий складний незамкнутий кінематичний ланцюг називається *групою III класу третього порядку*. До основного механізму група приєднується елементами B , H і F повідків CB , EF і DH .

Один зі способів приєднання групи показаний на рис. 1.18,б. Елементом пари B вона приєднана до механізму I класу, а елементами пар F і H – до стійки.

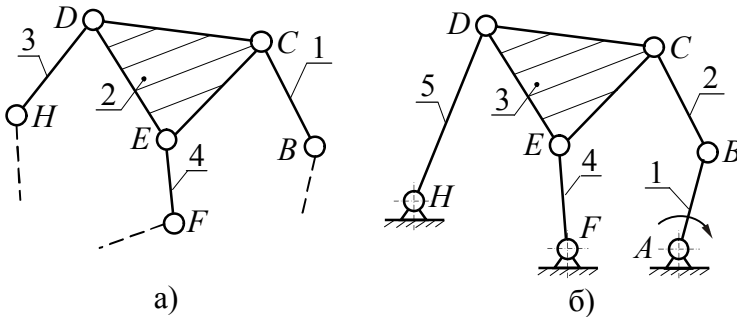


Рис. 1.18.

Механізми, до складу яких входять групи Ассура не вище груп III класу третього порядку, називаються механізмами III класу.

Другий можливий кінематичний ланцюг з чотирьох ланок і шести пар показаний на рис. 1.19,а. Цей замкнутий кінематичний ланцюг приєднується до інших ланок механізму не елементами повідків, а вільними елементами B і F , що належать базовим ланкам BCE і FDH (рис. 1.19,б). Дана група крім двох базових ланок має один рухливий чотирибічний замкнутий контур $CEHD$.

Групу, яка показана на рис. 1.19, називають *групою IV класу другого порядку*.

Механізми, до складу яких входять групи Ассура не вище груп IV класу другого порядку, називаються механізмами IV класу.

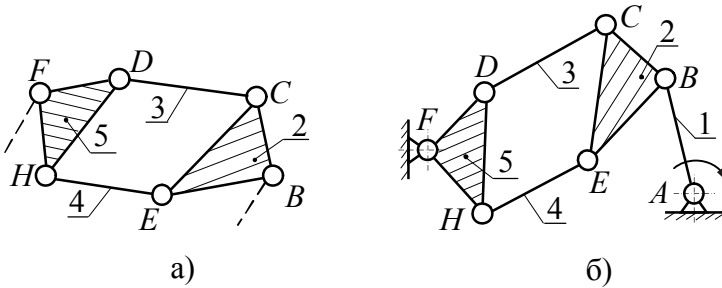


Рис. 1.19.

Якщо до складу механізму входять групи Ассура різних класів, то клас механізму визначається по тій групі, яка відноситься до найвищого класу. Наприклад, якщо механізм утворений двома групами II класу та однією групою III класу, то його треба віднести до механізмів III класу.

1.8. Формула побудови механізму

Як було показано вище, будь-який механізм незалежно від його складності та структури може бути утворений шляхом послідовного приєднання груп Ассура різних класів і порядків до основного механізму (основних механізмів) I-го класу.

Тому, кінематичний і динамічний аналіз будь-якого механізму, незалежно від його складності, може бути зведений до послідовного відділення й аналізу окремих груп Ассура, що входять до його складу.

При розчленовуванні механізмів на групи рекомендується дотримуватися такої послідовності.

Спочатку визначається ступінь рухливості механізму і обираються початкові ланки (механізми I-го класу). Число початкових ланок дорівнює ступеню рухливості механізму.

Розкладання механізму на групи Ассура починають зі спроби виділення груп II класу. Після виділення кожної групи необхідно перевіряти, чи володіє кінематичний ланцюг, який залишився, тією ж ступінню рухливості, що і первісний механізм. При цьому не повинні залишатися ланки, що не входять у кінематичні пари.

Якщо кінематичний ланцюг не розкладається на групи II класу, то варто перейти до груп III класу і т.д.

Після виділення всіх груп в механізмі повинні залишитися стійка і ланки, які були обрані за початкові.

Оскільки, як було показано вище, клас механізму визначається вищим класом групи Ассура, що входить до його складу, то при виборі початкових ланок потрібно керуватися тим, щоб клас механізму в цілому був мінімальним. Це пояснюється тим, що чим вищий клас механізму, тим складніший його кінематичний і силовий аналіз.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура в механізмі виражається *формулою побудови*.

На закінчення теми розглянемо порядок структурного аналізу на прикладі механізму Шепінга (рис. 1.20).

Механізм складається з п'яти рухомих ланок, нерухомої ланки – стійки і 7 кінематичних пар.

Рухомі ланки: 1 – кривошип; 2, 5 – повзуни; 3 – куліса; 4 – коромисло. Вхідною ланкою, якій задається закон руху при роботі механізму, є кривошип 1. Вихідною ланкою, що робить необхідний рух,

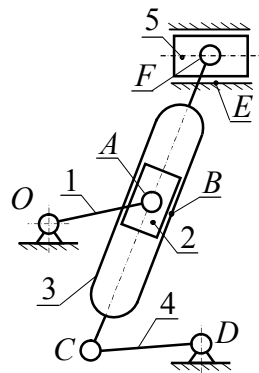


Рис. 1.20.

буде повзун 5, до якого кріпиться різець стругального верстата.

Усі кінематичні пари механізму відносяться до V класу, обертальні: $O(0-1)$; $A(1-2)$; $C(3-4)$; $D(4-0)$; $F(3-5)$, поступальні: $B(2-3)$; $E(5-0)$.

За формулою Чебишева ступінь рухливості механізму дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

тобто механізм володіє **однією ступінню рухливості** і, таким чином, повинний мати **одну початкову ланку (механізм I класу)**.

За початкову ланку, яка зв'язана зі стійкою, можна обрати одну з наступних ланок: кривошип 1, коромисло 4 і повзун 5. Визначимо клас механізму для кожної з цих ланок.

1. Початкова ланка – кривошип 1

Розкладання починаємо з відділення механізму I-го класу, який включає стійку і кривошип 1, зв'язаних обертальною кінематичною парою O (рис.1.21,а).

Кінематичний ланцюг (рис.1.21,б), що залишився, який складається з ланок 2, 3, 4 і 5, не можна розкласти на групи II класу. Дійсно, при відділенні групи 4-3 залишаються дві не зв'язані

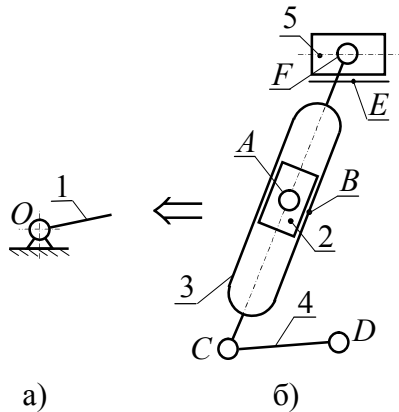


Рис. 1.21.

між собою ланки 2 і 5, а при відділенні групи 5-3 залишаються не зв'язані між собою ланки 2 і 4. Отже, кінематичний ланцюг, що залишився, буде групою III ($n = 4$, $P_5 = 6$) класу третього порядку (елементи приєднання A , D і E).

Таким чином, при початковій ланці – кривошипі 1, розглянутий механізм відноситься до III класу, і формула побудови механізму має вигляд:

$$Mex = I(0,1) \rightarrow III \left(\frac{3}{2,4,5} \right).$$

У формулі цифрою I позначений механізм першого класу, а цифрою III – клас групи Ассура. Номера ланок, що входять у механізм першого класу, і групу Ассура зазначені в дужках. Базисна ланка 3 у групі III класу вказується в чисельнику, а повідки – 2, 4 і 5 у знаменнику.

2. Початкова ланка – коромисло 4

Після відділення механізму I-го класу, що складається зі стійки і коромисла 4 (рис.1.22,а), кінематичний ланцюг, який залишився, розпадається на дві групи II класу (рис. 1.22, б, в).

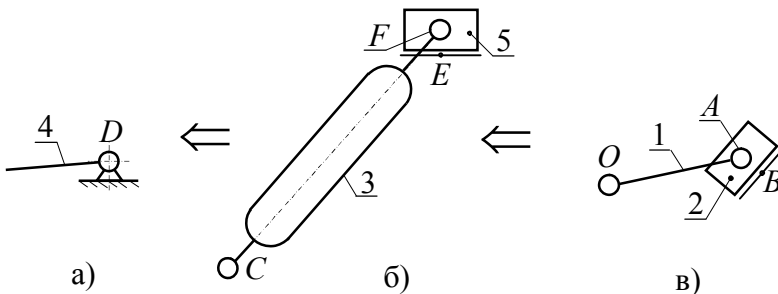


Рис. 1.22.

Обидві групи належать до другого виду, тому що одна з крайніх кінематичних пар є поступальною.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура в механізмі виражається формулою:

$$Mex = I(0,4) \rightarrow II(3,5) \rightarrow II(2,1).$$

Таким чином, при початковій ланці – коромислі 4, даний механізм є механізмом II класу.

3. Початкова ланка – повзун 5

Якщо за механізму I-го класу прийняти стійку і повзун 5 (рис.1.23,а), то кінематичний ланцюг, що залишився, також розпадається на дві групи II класу (рис. 1.23, б, в), але група 3-4 відноситься до першого виду, а 2-1 – до другого.

Формула побудови механізму має вигляд:

$$Mex = I(0,5) \rightarrow II(3,4) \rightarrow II(2,1).$$

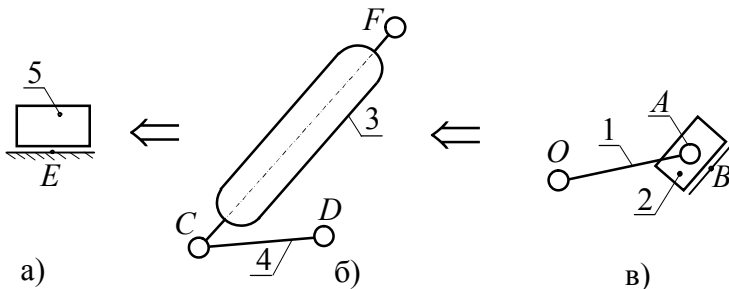


Рис. 1.23.

Отже, при початковій ланці – повзуні 5 даний механізм є механізмом II класу.

Таким чином, для спрощення кінематичного і силового аналізу механізму, за початкову ланку, незважаючи на те, що входною є кривошип 1, необхідно приймати або коромисло 4, або повзун 5, тобто при проведенні аналізу одній з цих ланок необхідно задати закон руху.

Контрольні запитання до теми 1

1. Які задачі розглядаються в теорії механізмів і машин?
2. Що називають машиною, механізмом?
3. Яка різниця між структурною і кінематичною схемами механізму?
4. Що називається ланкою, які види ланок існують?
5. Що називають кінематичною парою, як їх класифікують?
6. Дати визначення поняттю клас кінематичної пари, скільки існує класів пар?
7. Що називають кінематичним ланцюгом, які види кінематичних ланцюгів існують?
8. Які особливості плоского кінематичного ланцюга?
9. Як визначити число ступенів вільності плоского механізму?
10. У чому полягає задача структурного аналізу механізму?
11. Що називають групою Ассура?
12. Види груп Ассура II класу.
13. Співвідношення між числом ланок і числом кінематичних пар у групі Ассура.
14. Група Ассура III класу.
15. Чим визначається клас механізму?
16. Як утворюються механізми?
17. Що називають формулою побудови механізму?

ЛЕКЦІЯ 3

ЗМІСТ

2. Кінематичний аналіз механізмів.

- 2.1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів.
- 2.2. Загальний підхід до кінематичного аналізу графоаналітичним методом.
- 2.3. Основні рівняння, які пов'язують швидкості та прискорення двох точок, що належать одній ланці.
- 2.4. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу I виду.

2.1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів

Кінематичне дослідження механізму, тобто вивчення руху ланок механізму без урахування сил, що обумовлюють цей рух, полягає, в основному, у вирішенні 3-х наступних задач:

- визначення переміщень ланок і траєкторій точок ланок;
- визначення швидкостей характерних точок ланок і кутових швидкостей ланок;
- визначення прискорень характерних точок ланок і кутових прискорень ланок.

До *характерних* точок ланок відносяться центри кінематичних пар і центри мас ланок.

Знання кінематичних параметрів механізму необхідно для визначення:

- сил інерції ланок, при силовому дослідженні механізму;
- кінетичної енергії механізму і споживаної їм потужності, яку він споживає, при дослідженні руху механізму.

Кінематичне дослідження механізмів виконують графічним, графоаналітичним і аналітичним методами.

У *графічному методі* кінематичного аналізу кінематичні параметри механізму визначаються тільки шляхом графічних побудов [1] (стор. 107-116). Даний метод відрізняється наочністю і відносною простотою, але не дозволяє одержати точних результатів.

У *графоаналітичному методі* рівняння руху точок механізму записуються аналітично у векторній формі, а розв'язуються графічним шляхом (побудовою планів швидкостей і прискорень). Метод дозволяє одержати необхідну для інженерних розрахунків точність результатів.

В *аналітичних методах* рівняння руху точок механізму записуються і розв'язуються аналітично [1] (стор. 117-135). Аналітичні методи дозволяють одержати результати високої точності, але відрізняються великою складністю і трудомісткістю обчислень.

Надалі буде детально розглянутий графоаналітичний метод кінематичного аналізу.

2.2. Загальний підхід до кінематичного аналізу графоаналітичним методом

Перша задача кінематичного аналізу механізму (визначення переміщень ланок і траєкторій точок ланок) у

графоаналітичному методі розв'язуються графічно, шляхом побудови кінематичної схеми механізму для ряду положень (8-18) початкової ланки.

Визначення швидкостей і прискорень характерних точок механізму (рішення *другої* і *третьої задачі*) починають від початкової ланки (механізму I класу), та виконують по групам Ассура в порядку їх приєднання до механізму I класу.

Характер рівнянь руху однієї точки відносно іншої, які складаються при проведенні кінематичного аналізу графоаналітичним методом, залежить від взаємного розташування цих точок на ланках механізму. У взаємному розташуванні точок на ланках механізму (групах Ассура) може бути два випадки:

- дві точки належать одній ланці (одна лежить на деякій відстані від другої);
- дві точки лежать на різних ланках (у даний момент часу збігаються).

Другий випадок має місце в кінематичних парах, де стикаються точки однієї ланки з точками другої.

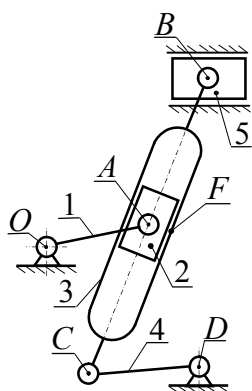


Рис. 2.1.

Наприклад, у механізмі Шепінга (рис. 2.1) перший випадок має місце при розташуванні точок: O і A на ланці 1; точок C і B на ланці 3; точок C і D на ланці 4. Другий випадок має місце в обертальній парі O , де стикаються точки стійки і ланки 1, в обертальній парі A стикаються точки ланок 1 і 2, у поступальній парі $F - 2$ і 3, в обертальній парі $C - 3$ і 4, і т.д.

Якщо дві точки належать одній ланці, то рівняннями руху однієї точки відносно другої будуть рівняння плоского руху, оскільки в загальному випадку в складі плоского механізму ланка може так рухатися.

У групах Ассура, за допомогою яких утворюються плоскі механізми, використовуються дві кінематичні пари: обертальна і поступальна.

Швидкості (прискорення) центрів обертальної кінематичної пари у двох ланок повинні бути рівними між собою, інакше один центр повинен зміститися відносно другого, що неможливо.

У **поступальній кінематичній парі** точка однієї ланки може рухатися відносно точки другої ланки уздовж направляючих пари, тобто **маємо складний рух однієї точки відносно другої.**

2.3. Основні рівняння, які пов'язують швидкості і прискорення двох точок, що належать одній ланці

З курсу теоретичної механіки відомо, що всякий плоский рух тіла можна розкласти на два:

- переносний поступальний рух разом з довільно обраною точкою (полюсом) тіла;
- відносний обертальний рух навколо цього полюса.

Тому швидкість будь-якої точки C (рис.2.2) плоскої фігури можна представити як геометричну суму швидкості полюса точки B і швидкості обертання точки C навколо полюса B .

Умовимося надалі:

- абсолютні швидкості позначати строковою латинською буквою v , а прописною буквою в індексі точку, швидкість якої позначається: наприклад, v_C – абсолютна швидкість точки C ;
- відносні швидкості також позначати строковою латинською буквою v з індексом із двох букв. Перша буква вказує на точку, швидкість якої визначається, а друга – точку відносно якої розглядається рух. Наприклад: v_{CB} – швидкість точки C відносно точки B , v_{BC} – швидкість точки B відносно C ;
- рисою над буквою \bar{v} відзначати, що швидкість розглядається як вектор, тобто не тільки за величиною, а і за напрямом.

Так, якщо прийняти за полюс точку B плоскої фігури (рис.2.2), то на підставі сказаного одержуємо векторне рівняння для швидкості \bar{v}_C точки C :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}, \quad (2.1)$$

де \bar{v}_{CB} – швидкість точки C в обертальному відносному русі навколо точки B .

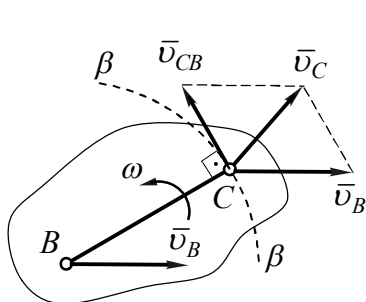


Рис. 2.2.

По величині ця швидкість дорівнює добутку величини кутової швидкості ω тіла на відстань l_{BC} між точками B і C .

При обертанні тіла навколо точки B точка C рухається по дузі $\beta\beta$ кола, описаного з точки B

радіусом BC (рис.2.2). Тому, швидкість \bar{v}_{CB} спрямована за дотичною, проведеною в точці C до цієї дуги, тобто вектор \bar{v}_{CB} спрямований перпендикулярно до BC убік, обумовлений знаком кутової швидкості ω .

Прискорення точки C теж можна скласти з двох прискорень: прискорення точки B і прискорення точки C при обертанні тіла навколо точки B .

Позначивши останнє прискорення як \bar{a}_{CB} , одержуємо:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}.$$

При русі точки C по дузі $\beta\beta$ прискорення \bar{a}_{CB} , у свою чергу, теж складається з двох прискорень (рис.2.3): нормального \bar{a}_{CB}^n і тангенціального \bar{a}_{CB}^τ .

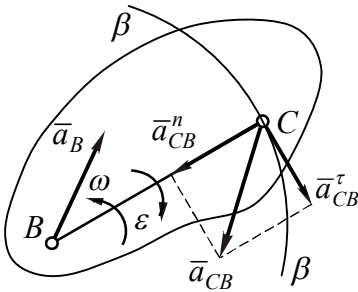


Рис. 2.3.

Нормальне прискорення \bar{a}_{CB}^n спрямоване до центра обертання, тобто від точки C до точки B . Тангенціальне прискорення \bar{a}_{CB}^τ , спрямоване за дотичною до дуги $\beta\beta$, тобто перпендикулярно BC убік, обумовлений кутовим прискоренням ϵ .

Таким чином, векторне рівняння для прискорення точки C буде мати вид:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau. \quad (2.2)$$

Величини прискорень a_{CB}^n і a_{CB}^τ можна визначити за формулами:

$$a_{CB}^n = \omega^2 \cdot l_{BC} = v_{CB}^2 / l_{BC} = v_{CB} \cdot \omega; \quad a_{CB}^\tau = \epsilon \cdot l_{BC}.$$

2.4. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу I виду

Рішення векторних рівнянь (2.1) і (2.2) здійснюють графічним способом, при якому швидкості або повні прискорення всіх точок зображуються на кресленні векторами, побудованими з однієї точки, яку називають полюсом. Ці векторні фігури називаються відповідно **планом швидкостей** і **планом прискорень**.

Розглянемо визначення швидкостей і прискорень точок ланок групи Ассура II класу I виду, що входить до складу шарнірного механізму (рис.2.4).

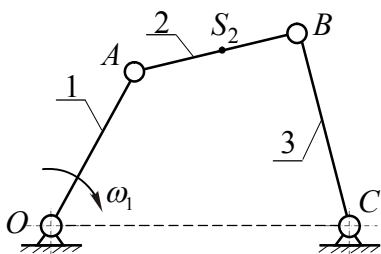


Рис. 2.4.

Спочатку визначимо за формулою Чебишева ступінь рухливості цього механізму.

До складу механізму входить три рухливі ланки: 1; 2; 3 (тобто $n = 3$) і чотири кінематичні пари п'ятого класу: $O; A; B; C$ ($P_5 = 4$).

Таким чином,

$$W = 3 \cdot n - 2P_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

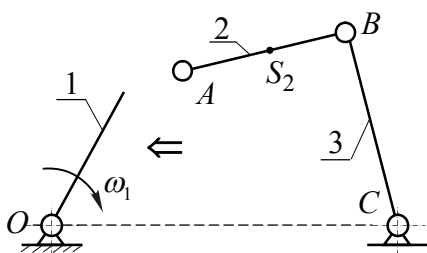


Рис. 2.5.

Оскільки $W = 1$, то механізм складається з одного механізму I класу (початкової ланки), за який оберемо стійку і кривошип 1, і групи Ассура II класу I виду (рис.2.5).

Формула побудови механізму має вигляд:

$$Mex = I(0,1) \rightarrow II(2,3).$$

В цілому маємо механізм II класу.

Побудова планів швидкостей і їх аналіз багато в чому спрощується при використанні властивостей цих планів, що полягають у наступному:

- вектори, що виходять з полюса плану, виражають абсолютні (повні) швидкості відповідних точок ланок механізму в масштабі плану швидкостей; точки плану швидкостей, що відповідають нерухомим точкам механізму, знаходяться в полюсі;
- вектори, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей, виражають величини і напрямки відносних швидкостей;
- вектори відносних швидкостей точок ланки на плані швидкостей утворюють фігуру, яка буде подібна до однойменної твердої фігури, що утворять відрізки, які з'єднують ці точки ланки на плані механізму. Причому фігура на плані швидкостей буде повернута відносно фігури на плані механізму на 90° убік миттєвого обертання даної ланки.

Для виконання кінематичного дослідження шарнірного механізму (рис.2.4) необхідно знати основні розміри його ланок (l_{OA} , l_{AB} , l_{BC}), положення центра мас S_2 ланки 2 і значення кутової швидкості ω_1 початкової ланки.

Кутову швидкість початкової ланки ω_1 в кінематичному аналізі, як правило, приймають сталою ($\omega_1 = const$).

У результаті кінематичного аналізу визначаються: швидкості і прискорення характерних точок механізму (A , B , S_2); величини і напрямки кутових швидкостей та прискорень (ω_2 , ω_3 , ε_2 , ε_3) ланок 2 і 3.

Спочатку визначаємо величину швидкості точки A початкової ланки:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Швидкість \bar{v}_A перпендикулярна OA і спрямована убік кутової швидкості ω_1 (рис.2.6,а).

Вибравши полюс p і величину відрізка \overline{pa} , який буде зображати вектор \bar{v}_A на плані, визначаємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)}.$$

Відкладаємо відрізок \overline{pa} , що зображає абсолютну швидкість точки A , з полюса p плану швидкостей перпендикулярно напрямку OA (рис. 2.6,б).

Швидкості нерухомих точок механізму O і C дорівнюють нулю і на плані швидкостей ці точки будуть збігатися з полюсом p .

Для визначення швидкості внутрішньої точки B групи Ассура ABC , виражаємо її швидкість через швидкості зовнішніх точок A і C .

Для цього скористаємося рівняннями, які пов'язують швидкості двох точок, що належать одній ланці:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

де \bar{v}_A – швидкість точки A ;

\bar{v}_{BA} – відносна швидкість точки B при її обертанні разом з ланкою AB навколо точки A ;

\bar{v}_C – швидкість точки C ;

\bar{v}_{BC} – швидкість точки B відносно нерухомої точки C , тобто абсолютна швидкість точки B .

Розв'язуємо графічно перше рівняння системи (2.3).

Для цього через кінець вектора \overline{pa} , який зображає \bar{v}_A , тобто через точку "а", проводимо пряму lk (рис. 2.6,б), паралельно напрямку відносної швидкості \bar{v}_{BA} (перпендикулярно до ланки AB). Довжина і напрямок вектора \bar{v}_{BA} поки не відомі.

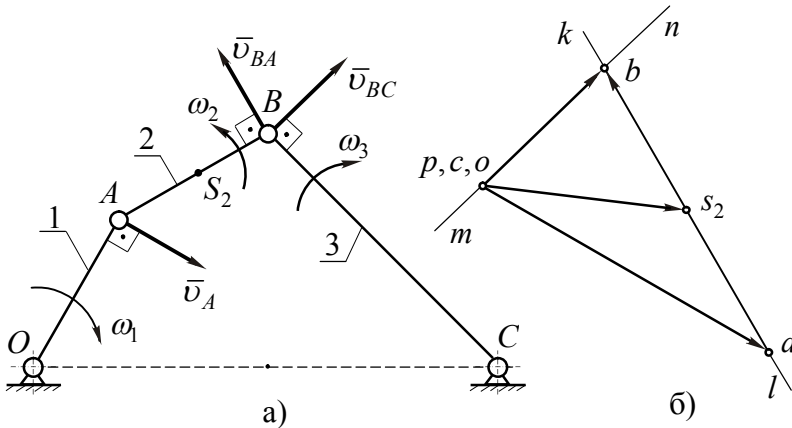


Рис. 2.6.

Потім розв'язуємо друге рівняння системи (2.3).

Для цього через точку "с", яка збігається з полюсом p плану швидкостей, проводимо пряму mn , паралельно напрямку абсолютної швидкості точки B , тобто перпендикулярно до ланки BC .

Напрямок швидкості \bar{v}_B визначається напрямом відрізка \bar{pb} , а швидкості \bar{v}_{BA} – відрізком \bar{ab} .

Швидкість центра мас S_2 ланки AB визначимо із подібності (3-я властивість). Точки a , b , і s_2 на плані швидкостей (рис. 2.6,б) повинні розташовуватися подібно точкам A , B і S_2 на ланці (рис. 2.6,а), тобто точка s_2 повинна лежати на відрізку \bar{ab} і поділяти його в тому ж відношенні, у якому точка S_2 поділяє відрізок AB . Для визначення відстані as_2 складемо пропорцію:

$$\frac{(as_2)}{l_{AS_2}} = \frac{(ab)}{l_{AB}}, \text{ або } \frac{(as_2)}{AS_2} = \frac{(ab)}{AB},$$

звідки:

$$(as_2) = \frac{AS_2 \cdot (ab)}{AB}.$$

де AB і AS_2 – відповідні відрізки на кінематичній схемі механізму.

З'єднавши точку s_2 з полюсом плану швидкостей, одержимо відрізок $\bar{ps_2}$, який представляє собою швидкість \bar{v}_{S_2} центра мас ланки AB .

Величини швидкостей визначають по відрізкам плану швидкостей за формулами:

$$v_B = \mu_v \cdot (pb);$$

$$v_{BA} = \mu_v \cdot (ab);$$

$$v_{S_2} = \mu_v \cdot (ps_2),$$

де μ_v – масштабний коефіцієнт плану швидкостей.

Кутова швидкість кривошипа ω_1 задана. Кутову швидкість ω_2 другої ланки визначаємо за формулою:

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{AB} .$$

Ця швидкість спрямована проти ходу годинникової стрілки, оскільки, якщо перенести вектор відносної швидкості \bar{v}_{BA} в точку B (рис. 2.6,а), то він буде "обертати" відносно точки A ланку 2 проти ходу годинникової стрілки.

Кутову швидкість ω_3 третьої ланки, у свою чергу, визначають за формулою:

$$\omega_3 = v_B/l_{BC} .$$

Ця кутова швидкість спрямована за ходом годинникової стрілки, оскільки, вектор абсолютної швидкості точки B відносно нерухомої точки C прагне повернути ланку 3 за ходом годинникової стрілки (рис. 2.6,а).

Переходимо до визначення прискорень характерних точок і кутових прискорень ланок за допомогою плану прискорень.

При побудові планів прискорень також варто використовувати їх властивості, які полягають у наступному:

- вектори, що виходять з полюса, зображають абсолютні прискорення відповідних точок механізму в масштабі плану прискорень. Точки плану прискорень, що відповідають точкам механізму, прискорення яких дорівнюють нулю, збігаються з полюсом;
- фігура на плані прискорень, утворена векторами відносних прискорень, подібна до фігури на ланці,

яка утворена відрізками, що з'єднують відповідні точки.

Визначаємо прискорення точки A початкової ланки. Оскільки ланка OA обертається рівномірно, то точка A має тільки нормальне прискорення, спрямоване по ланці від точки A до центра обертання (точки O).

Величина цього прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}.$$

Вибравши довжину відрізка $\overline{\pi a}$, який буде зображати на плані вектор \overline{a}_A , визначаємо масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_a = a_A / (\pi a).$$

Відрізок $\overline{\pi a}$, який зображає абсолютне прискорення точки A , відкладається з полюса π плану прискорень паралельно ланці OA (рис. 2.7,б).

Розглядаючи рух точки B з ланками AB і BC , складаємо векторні рівняння для визначення прискорення точки B відносно точок A і C :

$$\left. \begin{aligned} \overline{a}_B &= \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \\ \overline{a}_B &= \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Відносні прискорення \overline{a}_{BA} і \overline{a}_{BC} представляємо у вигляді суми 2-х складових – нормальної, спрямованої по осі відповідної ланки до центра обертання у відносному русі, і тангенціальної, перпендикулярної до цієї ланки.

Тоді рівняння (2.4) набудуть виду:

$$\left. \begin{aligned} \overline{a}_B &= \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau, \\ \overline{a}_B &= \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

У цих рівняннях прискорення \bar{a}_A відоме за величиною і напрямом, а прискорення $a_C = 0$.

Модулі нормальних прискорень a_{CB}^n і a_{BC}^n можна визначити, оскільки із попереднього розрахунку відомі значення кутових швидкостей ланок AB і BC :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BA}; \quad a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}.$$

Прискорення \bar{a}_{BA}^n спрямоване по осі ланки AB від точки B до точки A , а прискорення \bar{a}_{BC}^n – по осі ланки CB від точки B до точки C (рис. 2.7,а).

Для відносних тангенціальних прискорень відомі тільки лінії, уздовж яких вони спрямовані. Прискорення \bar{a}_{BA}^τ перпендикулярне до ланки AB (перпендикулярно \bar{a}_{BA}^n), а прискорення \bar{a}_{BC}^τ – перпендикулярно до ланки BC (перпендикулярно \bar{a}_{BC}^n). Величини і напрямки тангенціальних прискорень \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ визначаються при побудові плану прискорень.

Відповідно до першого рівняння системи (2.5) із точки "а" плану прискорень (тобто до прискорення \bar{a}_A) проводимо лінію ae паралельно ланці AB і у напрямку від точки B до точки A відкладаємо уздовж цієї лінії відрізок:

$$n_{BA} = a_{BA}^n / \mu_a,$$

який зображає в масштабі нормальне прискорення \bar{a}_{BA}^n , а із кінця вектора \bar{n}_{BA} проводимо промінь kb перпендикулярний AB , уздовж якого буде спрямоване тангенціальне прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Відповідно до другого рівняння системи (2.5), із точки "с", що збігається з полюсом π ($a_C = 0$), проводимо лінію πf , паралельну BC , і відкладаємо по ній відрізок:

$$n_{BC} = a_{BA}^n / \mu_a.$$

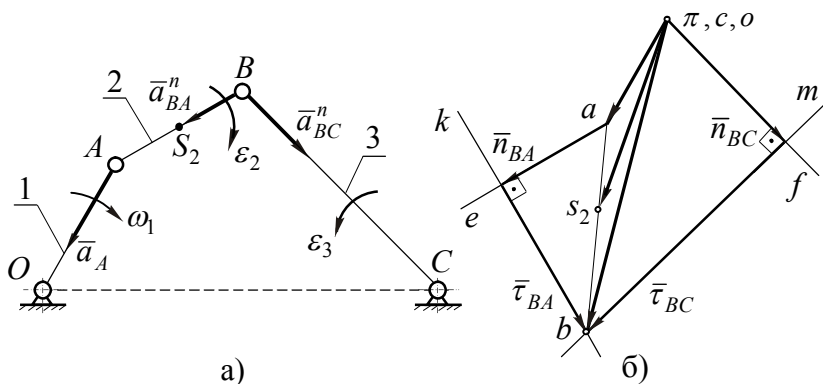


Рис. 2.7.

Вектор \bar{n}_{BC} зображає в масштабі нормальне прискорення \bar{a}_{BC}^n і спрямований від точки B до точки C .

З кінця вектора \bar{n}_{BC} проводимо промінь tb перпендикулярний BC , уздовж якого буде спрямоване тангенціальне прискорення \bar{a}_{BC}^τ .

У результаті перетину променів kb і tb , одержимо точку "b". Відрізок $\bar{\pi b}$ зображає повне прискорення \bar{a}_B точки B , модуль якого дорівнює:

$$a_B = \mu_a \cdot (\pi b).$$

Відрізки $\bar{\tau}_{BA}$ і $\bar{\tau}_{BC}$ зображують тангенціальні прискорення \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ , а відрізок \bar{ab} – повне відносне прискорення \bar{a}_{BA} .

Для визначення положення точки s_2 на лінії ab плану прискорень складемо пропорцію:

$$\frac{(as_2)}{l_{AS_2}} = \frac{(ab)}{l_{AB}}, \quad \text{або} \quad \frac{(as_2)}{AS_2} = \frac{(ab)}{AB},$$

з якої дістанемо:

$$(as_2) = \frac{AS_2 \cdot (ab)}{AB},$$

де (as_2) , (ab) – довжини відрізків на плані прискорень (рис. 2.7,б);

AS_2 , AB – довжини відрізків на схемі механізму (рис. 2.7,а).

Величини прискорень \bar{a}_{BA}^τ , \bar{a}_{BC}^τ , \bar{a}_{S_2} та \bar{a}_{BA} дорівнюють:

$$a_{BA}^\tau = \mu_a \tau_{BA}; \quad a_{BC}^\tau = \mu_a \tau_{BC};$$

$$a_{S_2} = \mu_a \cdot (\pi s_2); \quad a_{BA} = \mu_a \cdot (ab).$$

Визначаємо кутові прискорення ланок. Оскільки початкова ланка 1 рівномірно обертається, то її кутове прискорення дорівнює нулю ($\varepsilon_1 = 0$). Кутові прискорення ланок AB і BC знайдемо за відомими тангенціальними прискореннями \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ :

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{AB}; \quad \varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC}.$$

Для визначення напрямку кутових прискорень ε_2 і ε_3 подумки переносимо прискорення \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ у точку B механізму (рис. 2.7,а) та розглядаємо рух точки B відносно точок A і C . Видно, що кутове прискорення ε_2 спрямоване за ходом годинникової стрілки, а кутове прискорення ε_3 – проти ходу годинникової стрілки.

ЛЕКЦІЯ 4

ЗМІСТ

- 2.5. Рівняння, що пов'язують швидкості і прискорення двох точок, які належать двом ланкам, що входять у поступальну кінематичну пару.
- 2.6. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2 виду.
- 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 3 виду.
- Контрольні питання до теми 2.

2.5. Рівняння, що пов'язують швидкості і прискорення двох точок, які належать двом ланкам, що входять у поступальну кінематичну пару

Нехай точка B_2 (рис.2.8,а) належить ланці 2, а точка B_3 ланці 3. У даний момент часу точки B_2 і B_3 збігаються. Точка B_3 лежить під точкою B_2 (рис.2.8,б).

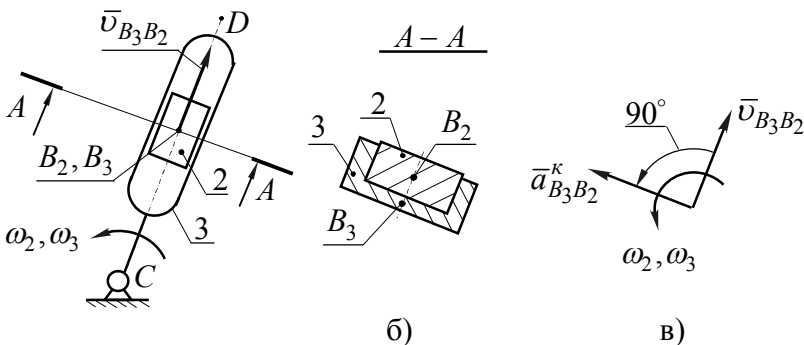


Рис. 2.8.

Ланки 2 і 3 утворюють поступальну пару B (CD – вісь симетрії направляючих пари).

У випадку, що розглядається, швидкість точки B_3 геометрично складається з двох швидкостей – *переносної* і *відносної*.

Переносною швидкістю є швидкість тієї точки ланки 2, з якою у даний момент часу збігається точка B_3 (тобто швидкість \bar{v}_{B_2} точки B_2).

Відносна швидкість точки B_3 дорівнює швидкості ланки 3 відносно ланки 2. При русі ланки 3 відносно ланки 2 точка B_3 рухається по прямій CD . Тому відносна швидкість, яка позначається $\bar{v}_{B_3B_2}$, спрямована по лінії CD (рис.2.8).

Таким чином, формула для визначення швидкості точки B_3 буде мати вид:

$$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{B_3B_2}. \quad (2.6)$$

Прискорення точки B_3 , як відомо з курсу теоретичної механіки, складається з трьох прискорень: *переносного* \bar{a}^{nep} , *відносного* \bar{a}^r і *коріолісового* \bar{a}^k :

$$\bar{a}_{a\bar{b}c} = \bar{a}^{nep} + \bar{a}^r + \bar{a}^k. \quad (2.7)$$

Переносним прискоренням \bar{a}^{nep} буде прискорення точки B_2 ланки 2, з якою у даний момент часу збігається точка B_3 , тобто \bar{a}_{B_2} . У відносному русі, як уже відзначалося, точка B_3 рухається по прямої лінії CD . Тому в цьому русі точка B_3 має **відносне прискорення** $\bar{a}_{B_3B_2}^r$, спрямоване уздовж CD . Таким чином, у даному випадку, формула (2.7) набуде вигляду:

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_3B_2}^r + \bar{a}_{B_3B_2}^k. \quad (2.8)$$

Оскільки ланки 2 і 3 утворять поступальну пару, то вони не мають відносного обертання, отже, повертаються разом і мають однакові кутові швидкості:

$$\omega_2 = \omega_3.$$

Коріолісове прискорення $\bar{a}_{B_3B_2}^K$, що з'являється в результаті взаємодії переносного і відносного рухів, обчислюється за формулою:

$$a_{B_3B_2}^K = 2 \cdot \omega_2 \cdot v_{B_3B_2}, \quad (2.9)$$

де $v_{B_3B_2}$ – швидкість відносного руху;

ω_2 – кутова швидкість переносного обертального руху ланки 2.

Напрямок прискорення Коріоліса визначається за наступним правилом: **вектор прискорення** $\bar{a}_{B_3B_2}^K$ **спрямований у ту сторону, у яку буде спрямований вектор швидкості** $\bar{v}_{B_3B_2}$ **відносного руху, якщо його повернути на 90° в напрямку кутової швидкості переносного руху** (рис. 2.8, в).

2.6. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2 виду

Розглянемо визначення швидкостей і прискорень точок ланок, а також кутових швидкостей і прискорень ланок групи Ассура II класу 2 виду на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис. 2.9, а), у якому є точки, що належать різним ланкам, які входять у поступальну пару.

Для виконання кінематичного аналізу механізму необхідно задати розміри його ланок l_{OA} , l_{AB} , положення

центра мас S_2 (ланки 2), а також значення кутової швидкості ω_1 початкової ланки (кривошипа), яку вважаємо сталою ($\omega_1 = const$).

У результаті кінематичного дослідження треба отримати швидкості і прискорення точок A , B , S_2 , величини і напрямки кутової швидкості ω_2 і кутового прискорення ε_2 ланки 2.

Механізм складається зі стійки, початкової ланки і групи Ассура II класу 2 виду (ланки 2 і 3).

Спочатку визначаємо швидкість точки A , кривошипа OA :

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Швидкість \bar{v}_A перпендикулярна OA і спрямована убік кутової швидкості ω_1 .

Вибравши величину відрізка pa , яким буде зображатися вектор \bar{v}_A , визначаємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)}.$$

На плані швидкостей (рис.2.9,б) спрямований відрізок \underline{pa} відкладається з полюса p , перпендикулярно до ланки OA .

Точки A і B належать одній ланці AB , тому:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \quad (2.10)$$

Точка B , крім того, належить повзуну 3, який рухається поступально в напрямку BO . Таким чином,

рівняння (2.6), яке зв'язує швидкості двох точок, що належать двом ланкам, для даного випадку має вид:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_0} + \bar{v}_{BB_0}, \quad (2.11)$$

де \bar{v}_{B_0} – швидкість точки B_0 , що належить стійці 0 і в даний момент часу збігається із точкою B повзуна;

\bar{v}_{BB_0} – швидкість точки B в поступальному русі відносно точки B_0 .

У цих рівняннях швидкість \bar{v}_A відома за величиною і напрямком, а швидкість $\bar{v}_{B_0} = 0$.

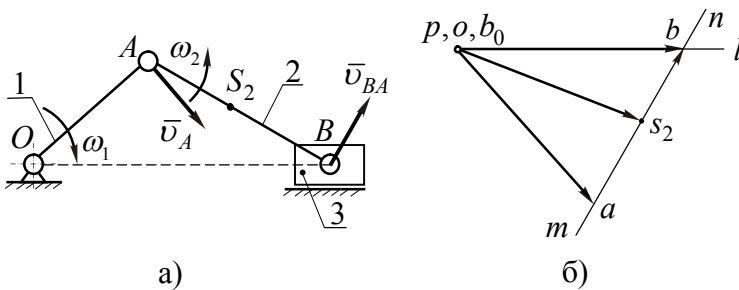


Рис. 2.9.

Для відносних швидкостей \bar{v}_{BA} і \bar{v}_{BB_0} відомі лише напрямки: вектор швидкості \bar{v}_{BA} перпендикулярний до AB , а вектор швидкості \bar{v}_{BB_0} паралельно напрямуючим повзуна 3 (уздовж BO).

Розв'язуємо векторні рівняння (2.10) і (2.11) графічно.

Відповідно до першого рівняння до швидкості точки A , тобто через точку "а" плану швидкостей (рис.

2.9,б), проводимо перпендикулярно AB лінію mn , уздовж якої буде спрямований вектор швидкості \bar{v}_{BA} .

Відповідно до другого рівняння через точку b_0 , що збігається з полюсом p плану швидкостей, оскільки $\bar{v}_{B_0} = 0$, проводимо лінію b_0l , паралельно осі BO направляючих поступальної кінематичної пари, уздовж якої буде спрямована швидкість \bar{v}_{BB_0} . Точка "b" перетину ліній mn і b_0l визначає кінець вектора швидкості \bar{v}_B точки B .

Виходячи з теореми подібності, знаходимо на плані швидкостей точку s_2 , що відповідає центру мас ланки 2. З'єднавши полюс p з точкою s_2 , одержимо відрізок $\overline{ps_2}$, який визначає швидкість центра мас ланки 2.

Помноживши вимірні відрізки \overline{pb} і \overline{ab} на масштабний коефіцієнт μ_v , знаходимо значення відповідних швидкостей:

$$v_B = pb \cdot \mu_v; \quad v_{BA} = ab \cdot \mu_v.$$

Для визначення напрямку кутової швидкості ланки 2 переносимо вектор \overline{ab} , що зображає швидкість \bar{v}_{BA} на плані швидкостей, у точку B механізму (рис. 2.9,а). У напрямку вектора \bar{v}_{BA} точка B обертається відносно точки A , отже, кутова швидкість ω_2 спрямована проти ходу годинникової стрілки. Величина кутової швидкості ω_2 визначається з виразу:

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}.$$

Переходимо до визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок механізму.

Визначаємо прискорення точки A . Оскільки ланка OA обертається рівномірно, те точка A має тільки нормальне прискорення, спрямоване по ланці OA від точки A до центра обертання O (рис. 2.10,а). Величина цього прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}.$$

З точки π (рис.2.10,б), прийнятої за полюс плану прискорень, відкладаємо паралельно ланці OA в напрямку від точки A до точки O відрізок $\overline{\pi a}$, який відповідає прискоренню \bar{a}_A . Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень μ_a буде дорівнювати:

$$\mu_a = a_A / (\pi a).$$

Оскільки точки B и A належать одній ланці AB , то:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (2.12)$$

де \bar{a}_A – абсолютне прискорення точки A ;

\bar{a}_{BA} – повне відносне прискорення точки B в обертанні її разом з ланкою 2 навколо точки A ;

\bar{a}_{BA}^n – нормальне прискорення точки B при обертанні її разом з ланкою 2 навколо точки A , спрямоване вздовж ланки AB від точки B до точки A і за величиною дорівнює:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = v_{AB}^2 / l_{AB};$$

\bar{a}_{BA}^τ – тангенціальне прискорення точки B при обертанні її разом з ланкою 2 навколо точки A , величина цього прискорення невідома, відома тільки лінія вздовж якої воно спрямоване, перпендикулярно до AB .

Повзун 3, якому належить точка B , рухається поступально відносно стійки в напрямку BO . Таким чином, рівняння (2.7), що пов'язує прискорення двох точок, що належать різним ланкам, для даного випадку буде мати вид:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_0} + \bar{a}_{BB_0}^{\kappa} + \bar{a}_{BB_0}^r, \quad (2.13)$$

где \bar{a}_{B_0} – прискорення точки B_0 , що належить стійці,
 $a_{B_0} = 0$;

$\bar{a}_{BB_0}^{\kappa}$ – коріолісове прискорення точки B при її русі відносно точки B_0 , $a_{BB_0}^{\kappa} = 0$, оскільки $\omega_3 = \omega_0 = 0$;

$\bar{a}_{BB_0}^r$ – прискорення точки B в її поступальному русі разом з повзунком 3 відносно стійки, спрямоване в напрямі BO , величина цього прискорення невідома.

Оскільки $a_{BB_0}^{\kappa} = 0$, то рівняння (2.13) набуде виду:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_0} + \bar{a}_{BB_0}^r. \quad (2.14)$$

Розв'язуємо векторні рівняння (2.12) і (2.14) графічно.

Відповідно до першого рівняння до прискорення точки A , тобто з точки "а" плану прискорень (рис.2.10,б), паралельно AB в напрямку від точки B до точки A відкладаємо відрізок \bar{n}_{BA} , що буде зображати в масштабі нормальне прискорення \bar{a}_{BA}^n . Через кінець вектора \bar{n}_{BA} перпендикулярно до ланки AB проводимо лінію ph , уздовж якої буде спрямоване тангенціальне прискорення \bar{a}_{BA}^r .

Розглянемо друге рівняння. Оскільки прискорення a_{B_0} дорівнює нулю, то точка b_0 на плані прискорень збігається з полюсом π . Далі, із точки $\pi(b_0)$ паралельно лінії BO проводимо лінію πd , уздовж якої буде спрямовано прискорення \bar{a}_{BB_0} .

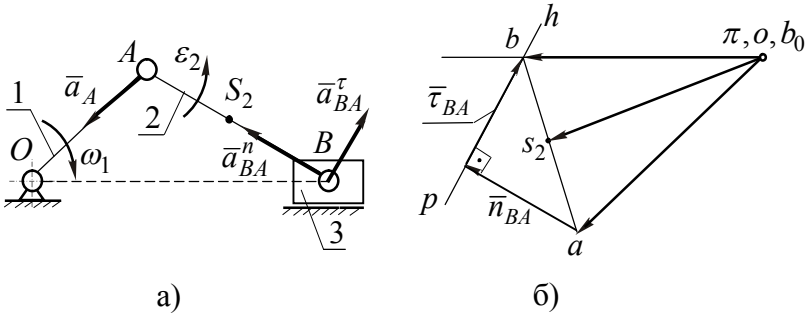


Рис. 2.10.

Точка "b", в якій перетинаються ліній ph і πd визначає кінець відрізка $\bar{\pi b}$, що відповідає абсолютному прискоренню точки B .

Точка "b" на плані прискорень визначає відрізки $\bar{\tau}_{BA}$ і \bar{ab} , що зображають тангенціальне \bar{a}_{BA}^{τ} і повне \bar{a}_{BA} відносні прискорення.

Знаючи положення S_2 центра мас ланки 2, знаходимо за правилом подібності відповідну точку s_2 на плані прискорень. Відрізок $\bar{\pi s_2}$ визначає величину і напрямок прискорення центра ваги ланки 2.

Для визначення напрямку кутового прискорення ε_2 ланки 2 перенесемо вектор $\bar{\tau}_{BA}$, що зображає тангенціальне \bar{a}_{BA}^{τ} прискорення, у точку B (рис.2.9,а).

Видно, що кутове прискорення ε_2 спрямоване проти ходу годинної стрілки.

Величина кутового прискорення ε_2 визначається за формулою:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{\tau_{BA} \cdot \mu_a}{l_{AB}}.$$

2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 3 виду

Розглянемо визначення швидкостей і прискорень характерних точок ланок та кутових швидкостей і прискорень ланок групи Ассура II класу 3 виду на прикладі кулісного механізму, зображеного на рис. 2.11,а.

Кулісний механізм включає початкову ланку 1 і групу Ассура II класу 3 виду (ланки 2,3). Внутрішньою парою цієї групи є поступальна кінематична пара і, крім того, ланка 3 (куліса) має обертальний рух.

Спочатку визначається швидкість точки A обертальної кінематичної пари, утвореної ланками 1 і 2 (рис. 2.11,б). Позначають цю точку як $A_{1,2}$.

Знаючи кутову швидкість ω_1 ланки 1, знаходимо:

$$v_{A_{1,2}} = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Вибравши масштабний коефіцієнт плану швидкостей μ_v , з довільного полюса p (рис.2.11,в) відкладаємо відрізок $\overline{pa}_{1,2}$, що зображає швидкість $\overline{v}_{A_{1,2}}$, у напрямку кутової швидкості ω_1 і перпендикулярно до OA .

Як уже відзначалося, у механізмі, що розглядається, є одна поступальна пара, утворена ланками 2 і 3. При наявності поступальної пари скористаємося рівнянням (2.6), справедливим для точок двох ланок, які в даний момент часу збігаються. Для цього на ланці 3 (рис. 2.11,б) вибираємо точку A_3 , яка збігається в даний момент часу з точкою $A_{1,2}$ (лежить на одній лінії) ланок 1 і 2.

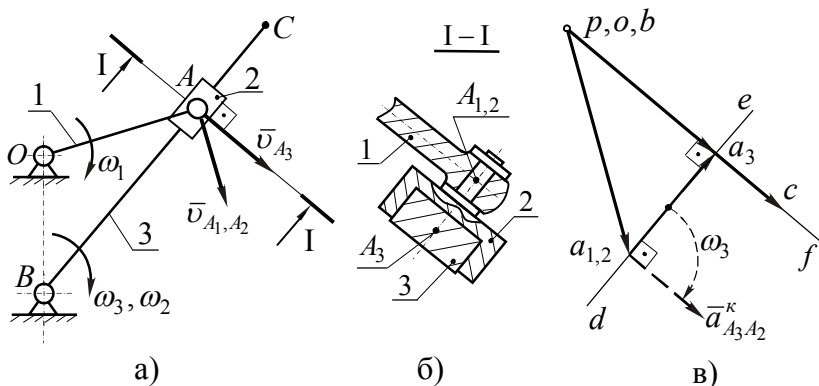


Рис. 2.11.

Тепер рух точки A_3 , що належить кулісі, можна розглядати як складний, який складається з двох рухів: переносного, з відомою швидкістю $\bar{v}_{A_{1,2}}$ і відносного, зі швидкістю $\bar{v}_{A_3A_{1,2}}$, спрямованою уздовж осі куліси BC .

За формулою (2.6):

$$\bar{v}_{A_3} = \bar{v}_{A_{1,2}} + \bar{v}_{A_3A_{1,2}}, \quad (2.15)$$

де \bar{v}_{A_3} – абсолютна швидкість точки A_3 .

З іншого боку, точки A_3 і B належать кулісі 3, тому для точки A_3 можна записати:

$$\bar{v}_{A_3} = \bar{v}_B + \bar{v}_{A_3B}, \quad (2.16)$$

де \bar{v}_B – швидкість точки B куліси 3 ($\bar{v}_B = 0$);

\bar{v}_{A_3B} – швидкість точки A_3 в обертальному відносному русі навколо точки B , спрямована перпендикулярно до BC .

На плані швидкостей (рис.2.11,в) згідно рівнянню (2.15) через точку " $a_{1,2}$ " відрізка $\overline{pa_{1,2}}$, який зображає $\bar{v}_{A_{1,2}}$, проводимо лінію de , паралельну BC , вздовж якої буде спрямований вектор $\bar{v}_{A_3A_{1,2}}$.

З іншого боку, згідно рівнянню (2.16) через точку " b ", що збігається з полюсом p , оскільки $\bar{v}_B = 0$, проводимо лінію pf , перпендикулярну до BC , уздовж якої буде спрямований вектор \bar{v}_{A_3B} . Точка " a_3 ", в якій перетинаються ці лінії, являє собою кінець спрямованих відрізків $\overline{pa_3}$ і $\overline{a_{1,2}a_3}$, що у масштабі зображають швидкості \bar{v}_{A_3} і $\bar{v}_{A_3A_{1,2}}$.

Кутову швидкість ланки 3 знаходимо з формули:

$$\omega_3 = \frac{v_{A_3}}{l_{AB}} = \frac{(pa_3) \cdot \mu_v}{l_{AB}}.$$

При цьому необхідно врахувати, що довжина куліси l_{BA} (рис. 2.11,а) при повороті кривошипа 1 змінюється і для кожного положення ланок її необхідно визначати за кінематичною схемою механізму.

Кутова швидкість ω_2 ланки 2 дорівнює кутовій швидкості ланки 3, оскільки ці ланки утворюють поступальну пару, тобто повертаються разом.

Перенесений напрямок вектора швидкості \bar{v}_{A_3} з плану швидкостей у точку A схеми механізму (рис.2.11,а), показує, що ω_3 спрямована за ходом годинникової стрілки.

Знаючи швидкість точки A_3 , можна на підставі теореми про подібність визначити швидкість будь-якої точки, що лежить на кулісі. Так, наприклад, для точки C за теоремою про подібність одержимо:

$$\frac{v_C}{v_{A_3}} = \frac{(pc)}{(pa)_3} = \frac{l_{BC}}{l_{BA}}, \quad (pc) = \frac{l_{BC}}{l_{BA}} \cdot (pa_3).$$

Оскільки точка C на схемі механізму лежить на кулісі за точкою A , то і на плані швидкостей ця точка буде лежати на лінії pf за точкою " a_3 ".

Переходимо до визначення прискорень характерних точок механізму.

Прискорення точки $A_{1,2}$ дорівнює:

$$a_{A_{1,2}} = a_{A_{1,2}}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA},$$

тому що кутова швидкість ведучої ланки ω_1 прийнята сталою. Прискорення $\bar{a}_{A_{1,2}}$ спрямоване від точки A до точки O (рис. 2.12,а).

Вибравши масштабний коефіцієнт плану прискорень μ_a , відкладаємо з довільного полюса π паралельно OA відрізок $\overline{\pi a}_{1,2}$, який буде зображати $\bar{a}_{A_{1,2}}$ (рис.2.12,б).

З огляду на те, що точки $A_{1,2}$ і A_3 належать різним ланкам поступальної пари, то прискорення точки A_3 визначимо за векторним рівнянням (2.7):

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_{1,2}} + \bar{a}_{A_3 A_{1,2}}^k + \bar{a}_{A_3 A_{1,2}}^r, \quad (2.17)$$

як прискорення точки, рух якої розглядається як складний.

З іншого боку, якщо розглядати абсолютний рух точки A_3 як обертання разом з кулісою 3 навколо нерухомої точки B , то її прискорення в цьому випадку дорівнює:

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A_3B}^n + \bar{a}_{A_3B}^t. \quad (2.18)$$

В рівнянні (2.17) $\bar{a}_{A_3A_{1,2}}^k$ – королісове прискорення, модуль якого дорівнює:

$$a_{A_3A_{1,2}}^k = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{A_3A_{1,2}},$$

а напрям знайдемо шляхом повороту вектора $\bar{v}_{A_3A_{1,2}}$ на 90° в бік ω_3 , як показано пунктирними лініями на плані швидкостей (рис.2.11,в).

Відносне прискорення $\bar{a}_{A_3A_{1,2}}^r$ спрямоване по осі куліси BA , величина і бік, у який спрямоване це прискорення, невідомі.

У рівнянні (2.18) прискорення \bar{a}_B дорівнює нулю, оскільки точка B нерухома.

Нормальне прискорення $\bar{a}_{A_3B}^n$ спрямоване від точки A до точки B (рис. 2.12,а) і по величині дорівнює:

$$a_{A_3B}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BA}.$$

Тангенціальне прискорення $\bar{a}_{A_3B}^t$ спрямоване перпендикулярно AB (перпендикулярно нормальному прискоренню $\bar{a}_{A_3B}^n$), величина і напрямок вектора цього прискорення невідомі.

Виконавши всі необхідні обчислення, за рівнянням (2.17) відкладаємо від точки " $a_{1,2}$ " (рис. 2.12,б)

спрямований відрізок $\bar{\kappa}_{A_3A_{1,2}}$, що з урахуванням масштабного коефіцієнта зображає прискорення $\bar{a}_{A_3A_{1,2}}^{\kappa}$:

$$\kappa_{A_3A_{1,2}} = a_{A_3A_{1,2}}^{\kappa} / \mu_a.$$

Через кінець відрізка $\bar{\kappa}_{A_3A_{1,2}}$ проводимо лінію gh , паралельну осі куліси AB , уздовж цієї лінії буде спрямоване відносне прискорення $\bar{a}_{A_3A_{1,2}}^r$.

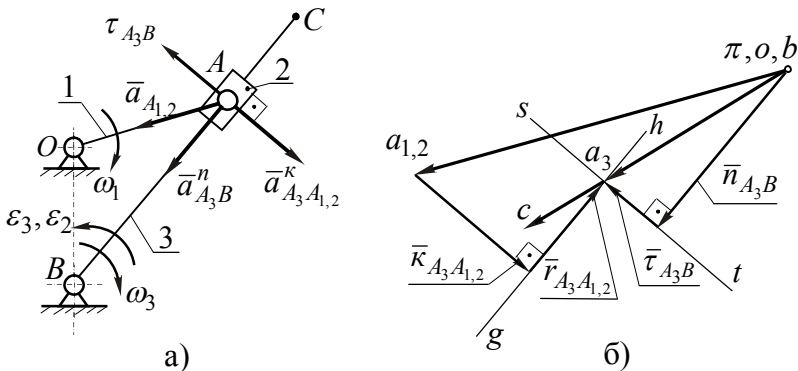


Рис. 2.12.

Після цього переходимо до векторного рівняння (2.18). Від полюса π ($\bar{a}_B = 0$) відкладаємо $\bar{a}_{A_3B}^n$ у вигляді відрізка \bar{n}_{A_3B} , спрямованого від точки A до точки B :

$$n_{A_3B} = a_{A_3B}^n / \mu_a.$$

Через кінець відрізка \bar{n}_{A_3B} проводимо лінію ts перпендикулярно до BA , уздовж якої буде спрямоване прискорення $\bar{a}_{A_3B}^r$. Точка перетину ліній gh і ts визначає точку " a_3 ", яка одночасно задовольняє векторним рівнянням (2.17) і (2.18).

Відрізки $\overline{\pi a_3}$, $\overline{r_{A_3A_{1,2}}}$ і $\overline{\tau_{A_3B}}$ зображають з урахуванням масштабного коефіцієнта μ_a прискорення $\overline{a_{A_3}}$, $\overline{a_{A_3A_{1,2}}^r}$ і $\overline{a_{A_3B}^\tau}$ відповідно.

Кутове прискорення ланки 3 обчислюємо за формулою:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3B}^\tau}{l_{AB}} = \frac{\tau_{A_3B} \cdot \mu_a}{l_{AB}},$$

таке ж кутове прискорення буде мати і ланка 2, тобто $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Для визначення напрямку кутового прискорення ε_3 необхідно перенести вектор $\overline{\tau_{A_3B}}$ із плану прискорень у точку A на схему механізму (рис. 2.12,а). Як видно, кутове прискорення ε_3 буде спрямоване проти ходу годинникової стрілки.

Величину прискорення точки C визначаємо за рівнянням, складеним на підставі теореми про подібність:

$$(\pi c) = (\pi a_3) \cdot \frac{l_{BC}}{l_{BA}}.$$

Розташування цієї точки на плані прискорень визначається так само, як і на плані швидкостей, тобто ця точка буде лежати на лінії πa_3 за точкою "a₃".

Контрольні питання до теми 2

1. Основні задачі кінематичного аналізу механізму.
2. Які існують методи кінематичного аналізу, у чому полягають переваги і недоліки аналітичного та графічного методів кінематичного аналізу?
3. Як записуються рівняння, що пов'язують швидкості і прискорення двох точок, які належать одній ланці?
4. Як записуються рівняння, що пов'язують швидкості і прискорення двох точок, які належать двом ланкам, що входять у поступальну пару?
5. Що називається планом швидкостей і планом прискорень?
6. Сформулюйте сутність методу і порядок побудови планів швидкостей та прискорень по групах Ассура.
7. Як знайти масштабні коефіцієнти планів швидкостей і прискорень?
8. Як визначити величину і напрямку кутових швидкостей та прискорень ланок механізму?
9. У яку сторону спрямований вектор нормального прискорення точки ланки?
10. Як визначають величину і напрямку коріюлісового прискорення?
11. Як, користаючись теоремою подібності, визначити швидкість і прискорення характерної точки ланки механізму?
12. У якому порядку виконується кінематичний аналіз механізму графоаналітичним методом?

ЛЕКЦІЯ 5

ЗМІСТ

3. Динамічний аналіз механізмів.

3.1. Рух механізму під дією заданих сил.

3.1.1. Задачі динамічного аналізу механізмів.

3.1.2. Сили, що діють на ланки механізму.

3.1.3. Режими руху машинного агрегату.

3.1.4. Динамічна модель машинного агрегату.

3.1.5. Зведення сил в механізмі.

3.1.6. Зведення мас в механізмі.

3.1.7. Рівняння руху одноланкової динамічної моделі в інтегральній формі.

3.1. Рух механізму під дією заданих сил

3.1.1. Задачі динамічного аналізу механізмів

При проведенні *кінематичного аналізу механізму* приймалося, що закон руху початкової ланки відомий. Зокрема, якщо за початкову ланку обирали кривошип, то його кутову швидкість приймали сталою ($\omega_1 = const$).

У дійсності, закон руху початкової ланки є функцією *зовнішніх сил*, що діють на ланки механізму і *мас рухливих ланок*.

При проектуванні механізму (машини) знання дійсного закону руху початкової ланки необхідно для урахування *динамічних навантажень*, які будуть виникати при його роботі. Механізми, розраховані за середніми навантаженнями, будуть працювати з переважаннями конструкційних елементів, що приведе до зниження їх надійності.

Дійсний закон руху може бути визначений розрахунковим шляхом або експериментальним дослідженням механізму чи його моделі.

Визначення закону руху початкової ланки механізму під дією заданих сил є однієї з основних задач динаміки машин.

3.1.2. Сили, що діють на ланки механізму

Усі сили, що діють на ланки механізму, можна розділити на наступні групи:

1. Рушійні сили ($F_{p.c.}$) і моменти рушійних сил ($M_{p.c.}$).
2. Сили виробничого (корисного) опору ($F_{к.о.}$) і моменти сил виробничого опору ($M_{к.о.}$).
3. Сили тяжіння (G) рухомих ланок.
4. Сили невиробничого опору (F_o) і моменти сил невиробничого опору (M_o).
5. Сили взаємодії між ланками механізму.

Рушійні сили (моменти) створюються двигунами, що здійснюють перетворення будь якого виду енергії (теплової, електричної, гідравлічної і т.д.) у механічну енергію.

Рушійні сили прагнуть прискорити рух механізму і з напрямком швидкостей точок їх прикладення утворюють гострий кут; найчастіше цей кут дорівнює нулю. Елементарна робота $dA_{p.c.}$, яку виконує рушійна сила на елементарному переміщенні точки її прикладення dS , завжди додатна:

$$dA_{p.c.} = F_{p.c.} \cdot dS \cdot \cos(\overline{F_{p.c.}} \wedge \overline{v_F}) > 0,$$

де $(\overline{F_{p.c.}}, \overline{v_F})$ – кут між вектором рушійної сили $\overline{F_{p.c.}}$ і вектором швидкості $\overline{v_F}$ точки її прикладення.

Таким чином, *рушійні сили намагаються збільшити кінетичну енергію машини.*

Сили (моменти) виробничого (корисного) опору – це сили, для подолання яких призначена машина (сили опору в металорізальних верстатах; сили опору, що виникають при стисканні газу або повітря в компресорах і т.д.).

Сили виробничого опору з напрямком швидкостей точок їх прикладення утворюють тупий кут, а в окремих випадках кут рівний 180° .

Елементарна робота $dA_{к.о.}$, яка виконується силою $F_{к.о.}$ на елементарному переміщенні точки її прикладення dS , від'ємна:

$$dA_{к.о.} = F_{к.о.} \cdot dS \cdot \cos(\overline{F_{к.о.}}, \overline{v_F}) < 0,$$

відповідно, *сили виробничого опору зменшують кінетичну енергію машини.*

Найбільший вплив на закон руху механізму чинять рушійні сили і їх моменти та сили виробничого опору і їх моменти.

Фізична природа, величина і характер дії цих сил визначається робочим процесом машини, у якій використовується даний механізм.

У більшості випадків ці сили не залишаються сталими, а змінюють свою величину при зміні положення або швидкості ланок. Функціональні залежності, що дозволяють визначити ці сили, називаються механічними

характеристиками і можуть бути представлені графічно, аналітично, чи масивом чисел у залежності від параметра, що викликає їхню зміну.

Наприклад, сила \bar{F} , що виникає в результаті тиску газів у циліндрі двотактного двигуна внутрішнього згорання на поршень 3 (рис. 3.1) залежить від його переміщення і представлена графічно як функція положення поршня $F = f(S_B)$.

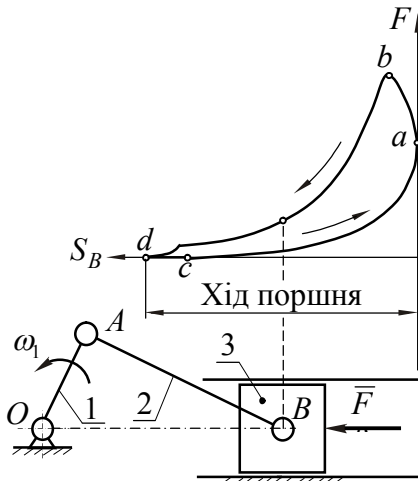


Рис. 3.1.

При русі поршня вліво в циліндрі відбувається процес розширення газів і сила \bar{F} змінюється за віткою abd механічної характеристики.

При русі поршня вправо в циліндрі відбувається процес стискання газів і сила \bar{F} змінюється за віткою dca механічної характеристики.

Оскільки сила \bar{F} тиску газів у циліндрі завжди спрямована вліво, то при розширенні, коли напрямок сили \bar{F} збігається з напрямком руху поршня 3, вона виконує додатну роботу, а при стисканні, коли сила \bar{F} спрямована протилежно напрямку руху поршня 3, – від'ємну.

Якщо подача палива не змінюється, то при наступному обороті початкової ланки 1 механічна характеристика $F = f(S_B)$ повторить свою форму. Це значить, що сила \bar{F} буде змінюватися періодично і її

величину можна визначити по механічній характеристиці в залежності від переміщення точки B .

На рис. 3.2 показана механічна характеристика асинхронного електродвигуна, який найбільш часто використовується для приводу технологічних машин, яка являє собою залежність обертового моменту від кутової швидкості ротора.

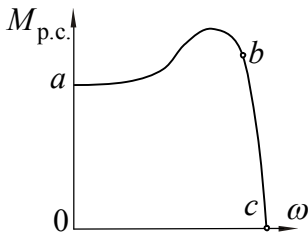


Рис. 3.2.

Характеристика має дві ділянки – пускову ab і робочу bc . На робочій ділянці рушійний момент різко змінюється при незначній зміні швидкості обертання ротора.

Від кутової швидкості ротора залежать сили і моменти, що діють також у таких роторних машинах, як електрогенератори, вентилятори, відцентрові насоси і т.д.

Якщо зі збільшенням кутової швидкості момент рушійних сил на роторі електродвигуна зменшується, то момент сил опору на роторі машин – споживачів як правило збільшується. Така зміна моментів дуже корисна, оскільки автоматично сприяє підтримці режиму руху пристрою, який складається із електродвигуна та роторної машини споживача.

При розв'язуванні задач аналізу механізмів їх механічні характеристики вважаються відомими.

Робота A_G сил тяжіння рухомих ланок на деякому переміщенні h_S , яке відраховується по вертикалі, центра мас ланки дорівнює:

$$A_G = \pm G_k \cdot h_S,$$

де G_k – сила тяжіння k -ї ланки.

Робота A_G додатна, якщо проекція переміщення центра мас ланки на напрям сили \vec{G}_k збігається з напрямком цієї сили, і від'ємна, якщо ці напрямки протилежні.

До *сил невикористаного опору* відносяться сили опору повітряного чи рідинного середовища переміщенню ланок. Ці сили залежать від форми ланки, її швидкості і в'язкості середовища. Оскільки механізми сільськогосподарських машин в основному працюють у повітряному середовищі (в'язкість якого мала), то ці сили, у порівнянні з іншими, незначні, і надалі враховуватися не будуть.

Сили взаємодії між ланками – це сили, що діють у кінематичних парах механізму. Згідно 3-му закону Ньютона, сила, з якою перша ланка діє на другу в кінематичній парі, дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом силі, з якою друга ланка діє на перше.

Нормальні складові цих сил, тобто перпендикулярні до поверхні елементів кінематичної пари, роботи не виконують, оскільки кут між напрямками цими складових і можливими напрямками поступального переміщення поверхні елементів кінематичної пари, на яку вони діють, складає 90° .

Дотичні складові цих сил виникають у результаті тертя в кінематичній парі і спрямовані за дотичною до поверхні елементів кінематичної пари. Сили тертя в кінематичних парах роботу виконують, причому робота сил тертя завжди від'ємна.

Однак сили тертя в кінематичних парах можуть бути визначені тільки після визначення нормальних реакцій у цих парах, тобто після виконання силового аналізу механізму (розділ 4). У зв'язку з цим, дана задача

розв'язується шляхом послідовних наближень. Спочатку виконується динамічний аналіз механізму в першому наближенні, при якому сили тертя в кінематичних парах не враховуються, а після визначення закону руху початкової ланки виконується силовий аналіз механізму, визначаються сили тертя і якщо необхідно, то уточнюється динамічний аналіз.

Більш докладно сили взаємодії між ланками будуть розглянуті в розділі 4.

Сили і моменти перших чотирьох груп відносяться до *активних сил*. Усі ці сили прикладені до механізму ззовні, а тому є *зовнішніми*.

Сили і моменти п'ятої групи, якщо розглядати механізм у цілому, є *внутрішніми*. У випадку, якщо розглядається окрема ланка механізму, то по відношенню до неї вони будуть зовнішніми силами.

3.1.3. Режими руху машинного агрегату

Процес руху машинного агрегату зручно простежити за графіком зміни кутової швидкості кривошипа в залежності від часу (рис. 3.3), тобто ланки, яка обертається в складі механізму і не має крайніх положень. Часто ця ланка збігається з обраною за початкову при проведенні структурного і кінематичного аналізу.

Графік $\omega = f(t)$ має назву *тахограмми машинного агрегату*.

У загальному випадку тахограма включає три режими: *розбігу, усталеного руху і вибігу*.

Розбіг і вибіг відносяться до *неусталених режимів*, які характеризуються неперіодичними змінами швидкості початкової ланки, тобто змінами швидкості, що не повторюються.

При *усталеному русі* швидкість початкової ланки змінюється *періодично*.

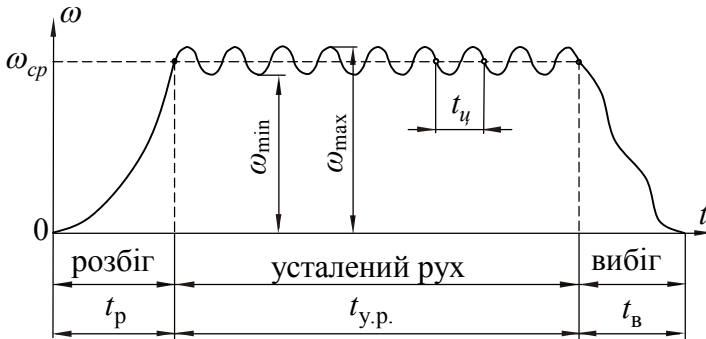


Рис. 3.3.

Режим *розбігу* (t_p – час розбігу) характеризується зростанням швидкості початкової ланки від нульового значення до деякого середнього значення ω_{cp} , яке відповідає нормальній робочій швидкості початкової ланки.

При *усталеному русі* ($t_{y.p.}$ – час усталеного руху) швидкість початкової ланки механізму періодично змінюється від ω_{min} до ω_{max} .

При цьому, якщо ввести поняття середньої ω_{cp} кутової швидкості:

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2},$$

то при усталеному русі вона буде сталою.

Режим *вибігу* (t_B – час вибігу) характеризується зменшенням швидкості початкової ланки від середнього значення ω_{cp} до нульового.

Повний час руху механізму буде дорівнювати:

$$t = t_p + t_{y.p.} + t_b.$$

Оскільки на усталеному режимі руху кутова швидкість початкової ланки періодично повторюється, то для цього режиму вводиться поняття **часу циклу руху** t_u (рис.3.3).

Часом циклу руху початкової ланки на усталеному режимі руху механізму називається проміжок часу, за який повторюються положення ланок, кінематичні характеристики і сили, що діють на ланки.

Тоді:

$$t_{y.p.} = t_u \cdot k,$$

де k – кількість циклів.

Повний час $t_{y.p.}$ усталеного руху може складатися з будь-якого числа циклів руху і залежить від того, як довго необхідно і можливо підтримувати робочий режим механізму – режим із середньою кутовою швидкістю ω_{cp} .

Цикл може відповідати одному чи декільком обертам початкової ланки.

Так, наприклад, колінчатий вал в одноциліндровому двотактному двигуні внутрішнього згорання протягом циклу робить один оберт (положення ланок, кінематичні характеристики і сили повторюються через один оберт колінчатого вала), а в одноциліндровому чотиритактному двигуні – два оберти (положення ланок повторюються через один оберт, а рушійні сили на поршні – тільки через два).

У деяких машинах один цикл відповідає і більшому числу обертів початкової ланки.

Розглянемо співвідношення між роботами рушійних сил і сил опору при розбігу, усталеному русі і вибігу.

На режимі розбігу швидкість початкової ланки зростає від нуля до деякого середнього значення, тобто збільшення кінетичної енергії ΔT механізму буде додатним. Тому, *енергетична характеристика* цього режиму може бути записана у виді:

$$\Delta T = A_{p.c.} - A_{c.o.} > 0,$$

где $A_{p.c.}$ – робота рушійних сил за час розбігу;

$A_{c.o.}$ – робота всіх сил опору, включаючи і виробничі, за час розбігу.

Звідки витікає, що на режимі розбігу справедливим є наступне співвідношення робіт рушійних сил і сил опору:

$$A_{p.c.} > A_{c.o.}$$

При *усталеному русі* механізму швидкість початкової ланки повторюється через цикл, тобто за цей проміжок часу зміна кінетичної енергії ΔT механізму дорівнює нулю.

На окремих ділянках циклу (рис. 3.3) кутова швидкість початкової ланки зменшується ($\Delta T < 0$), а на окремих – зростає ($\Delta T > 0$), але в цілому за цикл $\Delta T = 0$.

Таким чином, за проміжок часу t_y енергетична характеристика може бути представлена як: $A_{p.c.} = A_{c.o.}$.

Режим вибігу характеризується поступовим зменшенням швидкості початкової ланки до її нульового значення, тобто відбувається зменшення кінетичної енергії ($\Delta T < 0$). На цьому режимі енергетична характеристика буде виражатися нерівністю:

$$A_{p.c.} < A_{c.o.}$$

Часто на режимі вибігу робота рушійних сил дорівнює нулю, а із сил опору діють тільки сили тертя в кінематичних парах. Тоді зупинка механізму буде відбуватися тільки під дією сил тертя і за часом вибігу t_B можна судити про величину цих сил.

3.1.4. Динамічна модель машинного агрегату

Механізм машинного агрегату звичайно є багатоланковою системою, навантаженою силами і моментами, прикладеними до різних її ланок.

Щоб краще уявити собі сукупність сил, що діють на ланки машинного агрегату, розглянемо як приклад силову установку (рис.3.4), у якій двигун внутрішнього згорання надає руху через пасову передачу валу 4 споживачеві механічної енергії 5 (валу робочої машини).

Таким споживачем може бути електрогенератор, вентилятор, відцентровий насос чи будь-яка інша робоча машина.

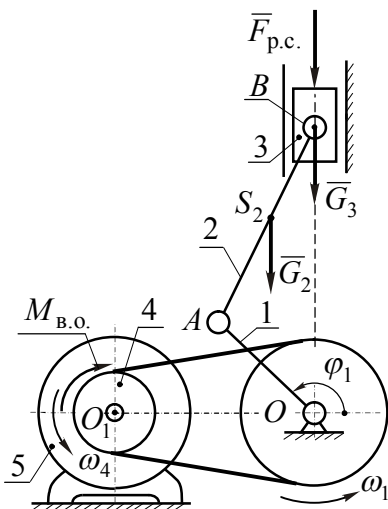


Рис. 3.4.

До поршня 3 прикладена рушійна сила $\bar{F}_{p.c.}$, до ротора 4 робочої машини – момент сил виробничого опору $M_{v.o.}$, до ланок механізму – сили тяжіння (\bar{G}_2 і \bar{G}_3). Крім того в усіх кінематичних парах діють сили тертя (на рис. 3.4 не показані).

У випадку якщо у двигуна внутрішнього згорання буде декілька циліндрів, то число ланок і сил, що на них діють, значно зросте.

Визначення закону руху ланок такої складної багатоланкової системи являє собою важку задачу.

З іншого боку, з огляду на те, що механізм двигуна внутрішнього згорання має *одну* ступінь рухливості ($W = 1$), то досить знати закон руху усього лише однієї з його ланок і якщо прийняти цю ланку за *початкову*, то закони руху інших ланок можна визначити *методами кінематичного аналізу*.

Це приводить до думки, що при динамічному аналізі замість складного багатоланкового механізму можна розглядати рух тільки однієї ланки.

Ланка зі складу механізму, рух якої розглядається, тобто визначається закон її руху, називається *ланкою зведення*.

За *ланку зведення* можна обирати будь-яку ланку механізму, яка рухається обертально чи поступально, але доцільніше обрати таку, яка знаходиться в *безупинному обертальному русі* (кривошип), оскільки таку ланку, як правило, обирають початковою і при проведенні структурного та кінематичного аналізу. Надалі будемо розглядати за ланку зведення ланку, рух якої є обертальним.

Основна вимога, що пред'являється до ланки зведення, полягає в тім, **що її самостійний рух повинний бути таким же, як і в складі механізму**. Розрахункова модель, у якій замість руху всіх ланок механізму розглядається рух тільки однієї ланки за умови, що вона рухається, як у складі механізму, називається *одноланковою динамічною моделлю*.

Так у силовій установці (рис. 3.4) за ланку зведення можна обрати або колінчатий вал 1 механізму двигуна внутрішнього згорання, або ротор 4 робочої машини.

Оберемо в якості ланки зведення – колінчастий вал (кривошип) 1.

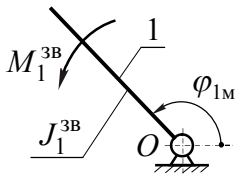


Рис. 3.5.

Тоді одноланкова динамічна модель (в подальшому **ОДМ**) буде складатися зі стійки і ланки зведення 1 (рис.3.5). Ланка зведення буде мати деякий момент інерції J_1^{3B} і її рух відбувається під дією деякого обертаючого моменту M_1^{3B} .

Величини моменту інерції J_1^{3B} і моменту сил M_1^{3B} повинні бути такими, щоб закон руху φ_{1m} ланки зведення **ОДМ** повністю збігався з законом руху φ_1 ланки 1 силової установки (рис.3.4). Таким чином, якщо знайти закон руху цієї простої моделі, то тим самим стане відомим шуканий закон руху початкової ланки заданого механізму.

Зі сказаного випливає, що при побудові **ОДМ** усі сили і моменти, що прикладені до ланок машинного агрегату, зводяться до однієї ланки і замінюються **зведеним моментом** M_1^{3B} , який по дії є еквівалентним усьому цьому навантаженню.

Аналогічно, маси всіх ланок (міри їхньої інертності) також зводяться до ланки зведення і замінюються **зведеним моментом інерції** J_1^{3B} , який є еквівалентом інертності всіх ланок механізму.

Нижній індекс в параметрах зведення J_1^{3B} і M_1^{3B} відповідає номеру ланки зведення.

У результаті переходу до **ОДМ** заданий багатоланковий механізм (рис. 3.4), що навантажений складною системою сил і моментів, виявляється заміненим простою моделлю (рис. 3.5).

Таким чином, побудова одноланкової динамічної моделі полягає в зведенні сил (визначенні закону зміни

M_1^{3B}) і в зведенні мас (визначенню закону зміни J_1^{3B}). При цьому зведення сил і мас у механізмі повинно бути зроблено таким чином, щоб виконувалася умова:

$$\varphi_1 = \varphi_{1M} \quad \text{або} \quad \omega_1 = \omega_{1M}, \quad (3.1)$$

де φ_1 і φ_{1M} – кути повороту кривошипа 1 механізму і **ОДМ** відповідно;

ω_1 і ω_{1M} – кутові швидкості кривошипа 1 механізму і **ОДМ** відповідно.

3.1.5. Зведення сил в механізмі

Виконання рівностей (3.1) буде забезпечено в тому випадку, якщо *при зведенні сил буде дотримана умова рівності елементарних робіт чи потужностей, що розвиваються силами чи моментами, що зводяться, на ланці зведення, і елементарними роботами чи потужностями, що розвиваються тими ж силами і моментами на ланках механізму.*

Зведення сил розглянемо на прикладі механізму, зображеного на рис. 3.4. За ланку зведення обрана ланка 1. Механізм навантажений силами $\bar{F}_{p.c.}$, \bar{G}_2 , \bar{G}_3 і моментом $M_{в.о.}$.

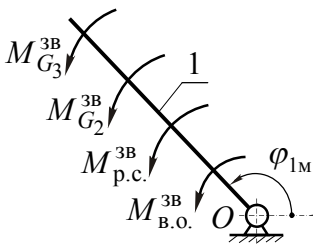


Рис. 3.6.

У результаті зведення сили $\bar{F}_{p.c.}$, \bar{G}_2 , \bar{G}_3 і момент $M_{в.о.}$ на ланці зведення будуть представлені відповідними моментами $M_{p.c.}^{3B}$, $M_{G_2}^{3B}$, $M_{G_3}^{3B}$ і $M_{в.о.}^{3B}$ (рис. 3.6).

Алгебраїчна сума цих моментів дає величину прикла-

деного до ОДМ (рис. 3.5) *зведеного моменту сил* M_1^{3B} :

$$M_1^{3B} = M_{p.c.}^{3B} + M_{G_2}^{3B} + M_{G_3}^{3B} + M_{B.O.}^{3B}. \quad (3.2)$$

Для зведення будь-якої сили, наприклад $\bar{F}_{p.c.}$, необхідно записати рівність між потужністю цієї сили на ланці механізму і потужності моменту $M_{p.c.}^{3B}$ на ланці зведення:

$$M_{p.c.}^{3B} \cdot \omega_{1M} = F_{p.c.} \cdot v_B \cdot \cos \alpha, \quad (3.3)$$

де ω_{1M} – кутова швидкість ланки зведення ОДМ;

v_B – швидкість точки B прикладення сили $\bar{F}_{p.c.}$;

α – кут між вектором сили $\bar{F}_{p.c.}$ і вектором швидкості \bar{v}_B точки B прикладення сили.

З огляду на рівняння (3.1), з якого випливає $\omega_{1M} = \omega_1$, розв'яжемо рівняння (3.3) щодо зведеного моменту:

$$M_{p.c.}^{3B} = F_{p.c.} \frac{v_B}{\omega_1} \cdot \cos \alpha. \quad (3.4)$$

Отримане рівняння (3.4) можна переписати в загальному виді, стосовно до будь-якої сили \bar{F}_i , що діє на ланку механізму, при її зведенні до n -ої ланки:

$$M_n^{3B} = F_i \frac{v_i}{\omega_n} \cdot \cos \alpha_i, \quad (3.5)$$

де v_i – швидкість точки прикладення сили \bar{F}_i ;

ω_n – кутова швидкість ланки зведення;

α_i – кут між векторами сили \bar{F}_i і швидкості \bar{v}_i точки прикладення сили.

Аналогічним чином визначаються зведенні моменти від сил \overline{G}_2 і \overline{G}_3 .

Зведемо момент $M_{\text{в.о.}}$. Запишемо рівність потужності моменту $M_{\text{в.о.}}$, який прикладений до ланки 4 механізму (рис.3.4), і потужності моменту $M_{\text{в.о.}}^{\text{ЗБ}}$ (рис.3.6) на ланці зведення:

$$M_{\text{в.о.}}^{\text{ЗБ}} \cdot \omega_{1\text{М}} = -M_{\text{в.о.}} \cdot \omega_4, \quad (3.6)$$

де $\omega_{1\text{М}}$ і ω_4 – кутові швидкості ОДМ і ланки 4 відповідно.

В правій частині рівняння (3.6) знак “мінус”, оскільки момент $M_{\text{в.о.}}$ і кутова швидкість ω_4 напрямлені в різні боки.

Розв’яжемо рівняння (4.5) відносно $M_{\text{в.о.}}^{\text{ЗБ}}$ з урахуванням того, що $\omega_{1\text{М}} = \omega_1$:

$$M_{\text{в.о.}}^{\text{ЗБ}} = -M_{\text{в.о.}} \frac{\omega_4}{\omega_1}. \quad (3.7)$$

Рівнянню (3.7) можна надати узагальнюючий вигляд у випадку зведення до n -ої ланки:

$$M_n^{\text{ЗБ}} = \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_n}, \quad (3.8)$$

где M_i – момент, який прикладений до ланки механізму;

ω_n – кутова швидкість ланки зведення;

ω_i – кутова швидкість ланки до якої прикладений момент M_i .

У рівнянні (3.8) знак “плюс” у випадку, якщо напрямки моменту M_i і кутової швидкості ω_i ланки прикладення збігаються, а “мінус” – якщо в різні боки

Для систем сил и пар, що прикладені до ланок механізму, формула по визначенню зведеного до n -ої ланки моменту сил, враховуючи раніш отримані вирази (3.5) и (3.8), буде мати вигляд:

$$M_n^{зв} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i}{\omega_n} \cos \alpha_i \pm \sum_{i=1}^l M_i \frac{\omega_i}{\omega_n}, \quad (3.9)$$

де F_i – i -а сила, що прикладена до ланки механізму;

v_i – швидкість точки прикладення сили F_i ;

α_i – кут, утворений векторами \vec{F}_i і \vec{v}_i ;

k – загальне число сил, що прикладені до ланок механізму;

M_i – i -й момент, що прикладений до ланки механізму;

ω_i – кутова швидкість ланки прикладення моменту M_i ;

l – загальне число моментів, що прикладені до ланок механізму;

ω_n – кутова швидкість ланки зведення.

3.1.6. Зведення мас в механізмі

Ланка зведення буде рухатися за тим же самим законом, як і в складі механізму, якщо *при зведенні мас буде дотримана умова рівності кінетичних енергій ланки зведення і кінетичної енергії всіх ланок механізму.*

Розглянемо зведення мас на прикладі того ж самого механізму (рис. 3.4), обравши як ланку зведення – ланку 1.

Оскільки вся інертність **ОДМ** (рис. 3.5) зосереджена в одній рухомій ланці, то *зведений момент інерції $J_1^{зв}$ цієї ланки є еквівалентом інертності всіх ланок механізму.*

Величина J_1^{3B} визначається з умови рівності кінетичних енергій T_M моделі і всього механізму T :

$$T_M = T. \quad (3.10)$$

Кінетична енергія **ОДМ**, з огляду на те, що ланка зведення має обертальний рух, буде дорівнювати:

$$T_M = \frac{J_1^{3B} \cdot \omega_{1M}^2}{2}. \quad (3.11)$$

Кінетична енергія i -ої ланки механізму при плоскому русі, як для найбільш загального випадку руху ланки, може бути записана так:

$$T_i = \frac{m_i \cdot v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \cdot \omega_i^2}{2}, \quad (3.12)$$

де m_i – маса i -ої ланки;

v_{Si} – швидкість центра мас S_i i -ої ланки;

J_{Si} – момент інерції i -ої ланки відносно осі, що проходить через центр мас S_i ланки;

ω_i – кутова швидкість i -ої ланки.

У випадку поступального руху ланки ($\omega_i = 0$) формула (3.12) приводиться до виду:

$$T_i = \frac{m_i \cdot v_{Si}^2}{2},$$

а у випадку обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас S_i ланки ($v_{Si} = 0$), рівняння (3.12) приводиться до виду:

$$T_i = \frac{J_{Si} \cdot \omega_i^2}{2}.$$

Кінетична енергія розглянутого механізму (рис. 3.4) складається з кінетичних енергій усіх його ланок, що рухаються:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Враховуючи, що рух 1 ланки механізму обертальний, 2 – плоский, 3 – поступальний і 4 – обертальний, то їх кінетичні енергії будуть дорівнювати:

$$T_1 = \frac{J_O \cdot \omega_1^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \cdot \omega_2^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot v_B^2}{2};$$

$$T_4 = \frac{J_{O_1} \cdot \omega_4^2}{2}.$$

Відповідно:

$$T = \frac{J_O \cdot \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot v_B^2}{2} + \frac{J_{O_1} \cdot \omega_4^2}{2}.$$

Підставивши вирази для T_M (3.11) и T в (3.10), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{J_l^{np} \cdot \omega_{1M}^2}{2} &= \frac{J_O \cdot \omega_1^2}{2} + \frac{J_{S_2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{S_2}^2}{2} + \\ &+ \frac{m_3 \cdot v_B^2}{2} + \frac{J_{O_1} \cdot \omega_4^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Враховуючи, що кутова швидкість моделі ω_{1M} повинна дорівнювати кутовій швидкості початкової ланки

ω_1 , після розв'язування рівняння (3.13) відносно J_1^{3B} , одержимо:

$$J_1^{3B} = J_O + m_2 (v_{S_2}/\omega_1)^2 + J_{S_2} (\omega_2/\omega_1)^2 + m_3 (v_B/\omega_1)^2 + J_{O_1} (\omega_4/\omega_1)^2. \quad (3.14)$$

Поширюючи отриманий вираз (3.14) на механізм із будь-якою кількістю k рухливих ланок можна записати залежність для визначення **зведеного моменту інерції** в загальному виді у випадку приведення до n -ої ланки:

$$J_n^{3B} = \sum_{i=1}^k \left[J_{S_i} (\omega_i/\omega_n)^2 + m_i (v_{S_i}/\omega_n)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Необхідно звернути увага на те, що у формули зведеного моменту сил (3.9) і зведеного моменту інерції (3.15) входять відношення швидкостей лінійних і кутових до кутової швидкості ланки зведення.

Оскільки при побудові плану швидкостей, через кутову швидкість знаходять тільки швидкість точки початкової ланки, а швидкості інших точок визначаються положенням ланок механізму, то відношення швидкостей, що входять в рівняння (3.9) і (3.15) не будуть залежати від кутової швидкості початкової ланки, а будуть визначатися тільки положенням ланок. Звідси випливає, що зведення сил і мас можна робити на етапі, коли не відомий закон руху початкової ланки. Для цього досить виконати кінематичний аналіз для будь-якої довільної кутової швидкості початкової ланки, побудувати динамічну модель механізму (зробити зведення сил і мас), а потім уже визначати її закон руху.

На закінчення відзначимо, що модель (рис. 3.5), якою заміняється механізм, є *умовним* тілом, тому що

момент її інерції - змінний, тоді як реальні фізичні тіла мають сталі моменти інерції.

3.1.7. Рівняння руху одноланкової динамічної моделі в інтегральній формі

Виконавши зведення сил і мас, будь-який механізм з одною ступінню вільності можна замінити його одноланковою динамічною моделлю (*ОДМ*).

Ланка зведення (*ОДМ*) у загальному випадку має змінний зведений момент інерції $J^{зв}$ і до неї прикладений змінний зведений момент сил $M^{зв}$. (Надалі, для спрощення запису, номер ланки зведення в індексах параметрів зведення, кутових швидкостей і кутів повороту ланки вказувати не будемо).

Як ланку зведення механізму (*ОДМ*), як правило, вибирається ланка, прийнята початковою при проведенні структурного і кінематичного аналізу.

Оскільки зведення сил здійснювалося на підставі рівності елементарних робіт (потужностей), а зведення мас – за умовою рівності кінетичних енергій, то при вивченні руху ланки зведення можна скористатися *теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи*.

В кінцевій формі ця теорема формулюється наступним чином: *збільшення (зміна) кінетичної енергії механізму на кінцевому його переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил, що задаються, і реакцій в'язей на відповідних переміщеннях точок їх прикладення:*

$$T_i - T_0 = \sum A, \quad (3.16)$$

де T_i – кінетична енергія механізму в довільному i -му положенні;

T_0 – кінетична енергія механізму в початковому положенні;

$\sum A$ – алгебраїчна сума робіт усіх сил і моментів, що прикладені до ланок механізму.

Оскільки сили і маси зведені до ланки, яка рухається *обертально*, то кінетична енергія **ОДМ** у проміжному i -му і в початковому положеннях дорівнює відповідно:

$$T_i = \frac{J_i^{3B} \cdot \omega_i^2}{2}; \quad T_0 = \frac{J_0^{3B} \cdot \omega_0^2}{2}, \quad (3.17)$$

де J_i^{3B} і ω_i – зведений момент інерції і кутова швидкість у проміжному положенні ланки зведення;

J_0^{3B} і ω_0 – зведений момент інерції і кутова швидкість у початковому положенні ланки зведення

Алгебраїчну суму робіт усіх сил і моментів сил, що прикладені до ланок механізму, можна записати у виді різниці робіт зведених моментів сил рушійних ($M_{p.c.}^{3B}$) і сил опору ($M_{c.o.}^{3B}$):

$$\sum A = A_{p.c.} - A_{c.o.}, \quad (3.18)$$

де

$$A_{p.c.} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{p.c.}^{3B} \cdot d\varphi, \quad A_{c.o.} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{c.o.}^{3B} \cdot d\varphi, \quad (3.19)$$

оскільки $M_{p.c.}^{3B}$ і $M_{c.o.}^{3B}$ залежать від кута повороту ланки зведення (початкової ланки).

З урахуванням наведених співвідношень (3.17), (3.18) і (3.19) рівняння (3.16) для **ОДМ** набуде вигляду:

$$\frac{J_i^{3B} \omega_i^2}{2} - \frac{J_0^{3B} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{p.c.}^{3B} \cdot d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{c.o.}^{3B} \cdot d\varphi. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) називається **рівнянням руху одноланкової динамічної моделі в енергетичній (інтегральній) формі**.

З рівняння (3.20) можна визначити значення кутової швидкості ланки зведення в будь якому i -му положенні ланки зведення:

$$\frac{J_i^{3B} \cdot \omega_i^2}{2} = \frac{J_0^{3B} \cdot \omega_0^2}{2} + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{p.c.}^{3B} \cdot d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{c.o.}^{3B} \cdot d\varphi,$$

або

$$\frac{J_i^{пр} \cdot \omega_i^2}{2} = T_0 + \Delta A_{0-i},$$

звідки

$$\omega_i = \sqrt{2 \frac{T_0 + \Delta A_{0-i}}{J_i^{пр}}}, \quad (3.21)$$

де ΔA_{0-i} – різниця робіт рушійних сил і сил опору (надлишкова робота на розглянутому переміщенні ланки зведення).

За відомими функціями $M_{p.c.}^{3B}(\varphi)$, $M_{c.o.}^{3B}(\varphi)$, $J^{3B}(\varphi)$ і відомої швидкості в початковий момент ω_0 рівняння (3.21) дозволяє визначити кутову швидкість ω_i ланки зведення при різних переміщеннях ланки зведення. Таким шляхом можна одержати залежність $\omega = f(\varphi)$, тобто установити **дійсний закон руху ланки зведення**.

Оскільки моменти $M_{p.c.}^{3B}$ і $M_{c.o.}^{3B}$ у результаті зведення будуть задані в залежності від кута повороту φ ланки зведення в табличній формі, то інтеграли робіт (3.19) $A_{p.c.}$ і $A_{c.o.}$ визначаються шляхом числового ([9] стор. 162-164) чи графічного ([4] стор. 224-226) інтегрування.

ЛЕКЦІЯ 6

ЗМІСТ

- 3.2. Регулювання руху машин.
 - 3.2.1. Загальна постановка задачі про нерівномірність руху механізмів.
 - 3.2.2. Визначення моменту інерції махових мас.
 - 3.2.3. Визначення моменту інерції маховика по методу Мерцалова.
 - 3.2.4. Визначення основних розмірів маховика.
- Контрольні запитання до теми 3

3.2. Регулювання руху машин

3.2.1. Загальна постановка задачі про нерівномірність руху механізмів

З аналізу залежності (3.21) випливає, що при усталеному русі механізму буде відбуватися зміна (коливання) кутової швидкості початкової ланки. Ця зміна є наслідком двох факторів:

- періодичної зміни зведеного моменту інерції механізму J_i^{3B} ;
- у результаті зміни протягом циклу миттєвих значень зведених моментів рушійних сил $M_{p.c.}^{3B}$ і сил опорів $M_{c.o.}^{3B}$, різниця їхніх робіт буде змінною:

$$\Delta A_{0-i} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{p.c.}^{3B} \cdot d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{c.o.}^{3B} \cdot d\varphi.$$

Коливання швидкості ведучої ланки викликають у кінематичних парах додаткові динамічні навантаження, що

знижують загальний коефіцієнт корисної дії машини і надійність її роботи. Крім того, ці коливання швидкості можуть погіршити той робочий технологічний процес, який виконується механізмами машини, і в деяких випадках можуть викликати значні пружні коливання в ланках механізму, що є небажаним як з точки зору міцності цих ланок, так і з точки зору втрати потужності, яка затрачується на ці пружні коливання.

Колівання швидкостей під час усталеного руху можуть досягти такої величини, що будуть неприпустимими з точки зору забезпечення належної роботи механізму чи машини. Тоді виникає питання про **регулювання** в заздалегідь заданих межах величини коливань кутової швидкості початкової ланки.

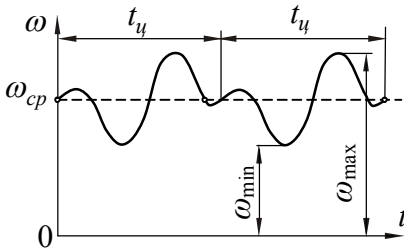


Рис. 3.7.

При усталеному русі механізму чи машини (рис. 3.3) кутова швидкість початкової ланки (рис. 3.7.) періодично повторюється через час $t_{\text{ц}}$ циклу.

Середня кутова швидкість, яка при усталеному русі зберігається сталою, визначається як середня арифметична за час циклу:

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}, \quad (3.22)$$

де ω_{\max} і ω_{\min} – максимальна і мінімальна кутова швидкість початкової ланки.

Різниця між максимальною і мінімальною кутовою швидкістю на усталеному режимі руху називається **абсолютною нерівномірністю** руху машини:

$$\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}.$$

Абсолютна нерівномірність не дає представлення про те, наскільки вона істотна, оскільки не враховує абсолютної величини швидкості початкової ланки.

Тому нерівномірність руху машини визначають відношенням абсолютної нерівномірності руху початкової ланки до середньої кутової швидкості:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_{cp}} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}. \quad (3.23)$$

Величину δ називають *коефіцієнтом нерівномірності руху машини*.

В таблиці 3.1 наводяться допустимі значення коефіцієнтів нерівномірності руху для деяких типів машин.

Таблиця 3.1.

Тип машини	Коефіцієнт нерівномірності руху δ
Сільськогосподарські машини	0,2÷0,02
Борошномельні машини	0,1÷0,02
Двигуни внутрішнього згорання	0,0125÷0,01
Металообробувальні верстати	0,05÷0,02
Насоси	0,33÷0,2
Компресори	0,02÷0,01
Генератори сталого струму	0,01÷0,005
Генератори змінного струму	0,005÷0,0033
Турбогенератори	0,005÷0,001

Зі співвідношення (3.23) видно, що δ характеризує розмах коливань кутової швидкості відносно її середнього значення. Чим менше δ , тим відносно менший розмах коливань, тим спокійніше обертається початкова ланка.

Задача регулювання руху механізму чи машини в період сталого руху зводиться до підбору такого

співвідношення між масами ланок і силами, що на них діють, при якому коефіцієнт δ не перевищував би заздалегідь заданого значення.

Таким чином, оскільки на усталеному режимі руху не можна цілком усунути коливань швидкості початкової ланки, то потрібно, по можливості хоча б зменшити розмах цих коливань.

3.2.2. Визначення моменту інерції махових мас

Знайдемо залежність між коефіцієнтом нерівномірності руху δ і зведеним моментом інерції механізму. Будемо вважати, що *зведений момент інерції J_i^{3B} сталий і дорівнює J^* .*

У відповідності з рівнянням руху в енергетичній формі (3.20) для випадку *сталого моменту інерції* механізму $J_i^{3B} = J^* = const$, буде справедливою рівність:

$$\frac{J^* \cdot \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J^* \cdot \omega_{\min}^2}{2} = \Delta A_{\max},$$

де ΔA_{\max} – максимальна різниця між роботами зведених моментів сил рушійних $M_{p.c.}^{3B}$ і опору $M_{c.o.}^{3B}$.

Останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{J^*}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \Delta A_{\max}. \quad (3.24)$$

Рівняння (3.24) дозволяє з'ясувати, від яких параметрів залежить коефіцієнт нерівномірності руху δ .

Перетворимо це рівняння наступним чином:

$$\Delta A_{\max} = J^* \left[(\omega_{\max} - \omega_{\min}) \cdot \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \right],$$

або

$$\Delta A_{\max} = J^* [(\omega_{\max} - \omega_{\min}) \cdot \omega_{cp}],$$

тоді

$$\frac{\Delta A_{\max}}{J^* \cdot \omega_{cp}} = \omega_{\max} - \omega_{\min}.$$

Поділивши обидві частини рівності на середню кутову швидкість ω_{cp} , дістанемо:

$$\frac{\Delta A_{\max}}{J^* \cdot \omega_{cp} \cdot \omega_{cp}} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = \delta,$$

звідси:

$$\delta = \frac{\Delta A_{\max}}{J^* \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (3.25)$$

Із формули (3.25) витікає, що коефіцієнт нерівномірності руху δ тим *менший*, чим *більший* зведений момент інерції J^* і середня кутова швидкість ω_{cp} , та чим менша величина залишкової максимальної роботи ΔA_{\max} .

Оскільки кутова швидкість ω_{cp} і залишкова максимальна робота ΔA_{\max} визначаються технологічним процесом, що виконується, то *потрібний коефіцієнт нерівномірності руху δ можна забезпечити змінюючи величину зведеного моменту інерції J^** .

У відповідності із заданим значенням δ :

$$J^* = \frac{\Delta A_{\max}}{\delta \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (3.26)$$

Нагадаємо, що при виводі цього рівняння ми прийняли, що *впливом зміни кінетичної енергії ланок*

механізму на зведений момент інерції можна знехтувати ($J_i^{зв} = J^ = const$).*

Практично задачу регулювання нерівномірності руху машини (збільшення J^*) вирішують установкою **додаткової**, так званої **махової маси**. Таку масу конструктивно оформлюють у вигляді **маховика** (масивного суцільного диска або колеса з важким ободом), який закріплюють на осі ланки, що обертається.

Установлена махова маса накопичує кінетичну енергію на ділянках циклу, коли зведений момент рушійних сил більший ніж зведений момент сил опору, тобто коли швидкість кривошипа зростає. На ділянках же циклу з зворотнім співвідношенням цих моментів, тобто коли швидкість кривошипу зменшується, махова маса віддає накопичену кінетичну енергію. Інакше кажучи, махова маса в механізмі (машині) виконує роль *механічного акумулятора кінетичної енергії*.

Таким чином, маховик використовують для обмеження амплітуди періодичних коливань кутової швидкості кривошипу в межах допустимої нерівномірності руху машини.

Розрахунок моменту інерції махових мас виявиться простим, коли можливо знехтувати впливом зміни кінетичної енергії рухомих ланок механізму на зведений момент інерції та прийняти, що увесь момент інерції механізму зосереджений в маховику, тобто:

$$J^* = J_M,$$

де J_M – момент інерції махових мас (маховика).

Тоді, із рівняння (3.26) отримаємо розрахункову формулу для визначення моменту інерції J_M маховика:

$$J_M = J^* = \frac{\Delta A_{\max}}{\delta \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (3.27)$$

Отримана формула не враховує вплив на нерівномірність руху зміни зведеного моменту інерції механізму. Основним фактором, який впливає на коефіцієнт нерівномірності руху δ , в цьому випадку стає різниця робіт рушійних сил $M_{p.c.}^{3B}$ і сил опору $M_{c.o.}^{3B}$. Таким чином, формула (3.27) дозволяє визначити момент інерції маховика для механізмів, у яких з поворотом кривошипа кінетична енергія рухомих ланок механізму мало змінюється. Наприклад, у багатоциліндрових двигунів внутрішнього згорання в силу зміщення циклів одного циліндра відносно другого, яке досягається розвалом шийок колінчатого вала, кінетична енергія механізму практично не змінюється. Різниця ж робіт зведеного моменту від рушійних сил на поршнях і моменту сил виробничого опору на колінчатому валі є основним фактором, який впливає на нерівномірність руху.

3.2.3. Визначення моменту інерції маховика за методом Мерцалова

Розглянемо найбільш простий і наглядний метод визначення моменту інерції маховика запропонований Н.И.Мерцаловим, який розглядав *зміну кінетичної енергії маховика за цикл усталеного руху*.

Нехай на головний вал механізму, який при зведенні прийнято за початкову ланку, встановлено маховик з моментом інерції J_M . Оскільки при усталеному русі кутова швидкість коливається між значеннями ω_{\min} і ω_{\max} , то і кінетична енергія маховика коливається між максимальним і мінімальним значенням:

$$T_{M\max} = J_M \cdot \omega_{\max}^2 / 2;$$

$$T_{M\min} = J_M \cdot \omega_{\min}^2 / 2.$$

Визначимо найбільшу зміну кінетичної енергії маховика:

$$\begin{aligned}\Delta T_{M \max} &= \frac{J_M \cdot \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_M \cdot \omega_{\min}^2}{2} = \frac{J_M}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \\ &= J_M \cdot \omega_{cp} \cdot \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \cdot \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}.\end{aligned}$$

З урахуванням (3.22) і (3.23), дістанемо:

$$\Delta T_{M \max} = J_M \cdot \omega_{cp}^2 \cdot \delta ,$$

або, розв'язавши відносно шуканої величини J_M :

$$J_M = \frac{\Delta T_{M \max}}{\omega_{cp}^2 \cdot \delta} . \quad (3.28)$$

Формула (3.28) є розрахунковою при визначенні зведеного моменту інерції маховика, який необхідний для забезпечення обертання початкової ланки з заданим коефіцієнтом нерівномірності руху δ .

Коефіцієнт нерівномірності руху δ і середню кутову швидкість ω_{cp} початкової ланки задають при проектуванні механізму. Таким чином, для визначення моменту інерції маховика необхідно знати найбільшу зміну його кінетичної енергії $\Delta T_{M \max}$.

Кінетична енергія T механізму складається із кінетичної енергії T_M маховика і кінетичної енергії $T_{л}$ ланок:

$$T = T_M + T_{л} , \quad (3.29)$$

звідки, кінетична енергія маховика дорівнює:

$$T_M = T - T_{л} . \quad (3.30)$$

Кінетичну енергію T механізму виразимо із рівняння (3.16):

$$T = \sum A + T_0, \quad (3.31)$$

де T_0 – кінетична енергія механізму на початку циклу;

$\sum A$ – алгебраїчна сума робіт усіх сил та моментів, що прикладені до ланок механізму.

З урахуванням (3.30) і (3.31) кінетична енергія маховика дорівнює:

$$T_M = \sum A + T_0 - T_{\text{л}}. \quad (3.32)$$

За рівнянням (3.32) для одного повного циклу будують діаграму зміни кінетичної енергії маховика $T_M(\varphi)$ і на цій діаграмі знаходять величину $\Delta T_{M \max}$, яка входить у розрахункове рівняння (3.28).

Визначення $\Delta T_{M \max}$ здійснюється в такий спосіб.

Нехай відома діаграма $\sum A(\varphi)$ (крива 1 на рис. 3.8,а), побудована відносно осі φ і діаграма $T_{\text{л}}(\varphi)$ (крива 2 на рис. 3.8,б) кінетичної енергії ланок механізму.

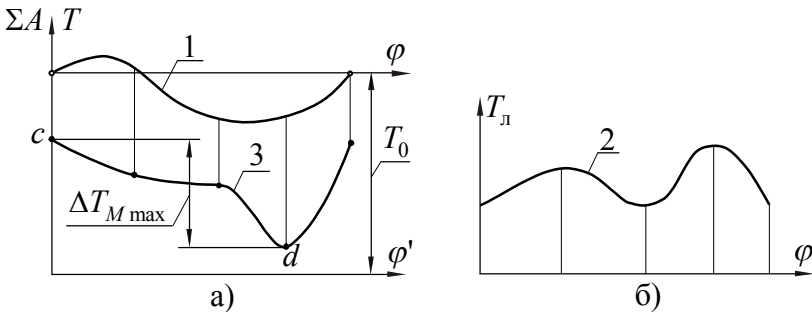


Рис. 3.8.

Відповідно до рівняння (3.31) додамо до суми робіт ΣA значення кінетичної енергії T_0 механізму на початку циклу. Для цього змістимо вісь φ на величину T_0 вниз (рис.3.8,а), після чого крива 1 на рис.3.8,а відносно осі φ' буде зображати кінетичну енергію механізму.

Згідно рівнянню (3.30), віднімемо із кінетичної енергії механізму T кінетичну енергію рухливих ланок $T_{\text{л}}$. Одержана крива 3 на рис.3.8,а, відносно осі φ' буде кривою зміни кінетичної енергії $T_M(\varphi)$ маховика.

Знайдемо на цієї кривій точку максимуму "с" і точку мінімуму "d" і по них визначимо найбільшу зміну кінетичної енергії маховика $\Delta T_{M\text{max}}$, яка необхідна для обчислення J_M за рівнянням (3.28).

Оскільки, для обчислення J_M за формулою (3.28) треба знати не саму кінетичну енергію маховика T_M , а її найбільшу зміну $\Delta T_{M\text{max}}$, яка не залежить від початкового значення T_0 , то для визначення $\Delta T_{M\text{max}}$ не потрібно встановлювати положення зміщеної осі абсцис φ' , тобто не потрібно знати кінетичну енергію механізму на початку циклу T_0 .

Складемо порядок визначення моменту інерції маховика за методом Мерцалова графічним способом.

1. Для ряду положень ланки зведення визначається зведений момент сил виробничих опорів $M_{\text{с.о.}}^{\text{ЗБ}} = M_1^{\text{ЗБ}}$ (технологічна машина) чи зведений момент рушійних сил $M_{\text{р.с.}}^{\text{ЗБ}} = M_1^{\text{ЗБ}}$ (енергетична машина) за формулою (3.9):

$$M_1^{\text{ЗБ}} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i}{\omega_1} \cos \alpha_i \pm \sum_{i=1}^l M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$

В наведеній формулі за ланку зведення обрано 1 ланку.

За отриманими значеннями зведеного моменту в залежності від кута повороту φ ланки зведення будується діаграма $M^{3B} = f_1(\varphi)$ (крива $M_{c.o.}^{3B}$ на рис. 3.9,а).

Масштаб μ_M осі M^{3B} обирається довільно, а масштаб μ_φ осі φ визначається довжиною ℓ відрізка (0,8) осі (рекомендується $180 \div 240$ мм), який зображає кут повороту φ_u ланки зведення за цикл:

$$\mu_\varphi = \varphi_u / \ell.$$

Зображена на рис. 3.9,а діаграма $M^{3B} = f_1(\varphi)$ характерна для технологічних машин. Зведений момент $M_{c.o.}^{3B}$ сил виробничих опорів таких машин, як правило, від'ємний на робочому ході (положення 0 – 5) і дорівнює нулю – при холостому (положення 6 – 8).

В енергетичних машинах зведений момент $M_{p.c.}^{3B}$ рушійних сил на частині циклу буде додатним, а на частині – від'ємним.

2. Діаграму роботи сил виробничих опорів $A_{c.o.} = f_2(\varphi)$ (рис. 3.9,б) одержують шляхом графічного інтегрування діаграми $M^{3B} = f_1(\varphi)$, оскільки ця робота визначається:

$$A_{c.o.} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{c.o.}^{3B} \cdot d\varphi.$$

Як відомо, графічною інтерпретацією інтеграла є площа, що знаходиться між кривою $M_{c.o.}^{3B} = f_1(\varphi)$ і віссю φ .

Наприклад, на ділянці 0-1 робота сил опору дорівнює:

$$A_{c.o.0-1} = \text{пл.}(0, c, 1) \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi,$$

а на ділянці 0-2:

$$A_{c.o.0-2} = A_{c.o.0-1} + A_{c.o.1-2};$$

$$A_{c.o.1-2} = \text{пл.}(1, c, d, 2) \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi,$$

і т.д.

Відклавши для відповідних кутів повороту ланки зведення цієї роботи в масштабі μ_A , одержують діаграму $A_{c.o.} = f_2(\varphi)$.

Практично цих розрахунків не роблять, а виконують наступні графічні побудови. Посередині ділянки, наприклад 0-1, на діаграмі $M_{c.o.}^{3B}$ беруть точку a і зносять її на вісь M^{3B} , тим самим площа фігури 0,с,1 замінюється площею прямокутника висотою $0a'$ і основою 0-1.

Отриману точку a' з'єднують із точкою p початку полюсної відстані інтегрування. Відрізок $p0 = H$ визначає масштаб побудови діаграми робіт:

$$\mu_A = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot H.$$

На ділянці 0-1 діаграми робіт проводять пряму $01'$ паралельно pa' , яка буде зображати роботу $M_{c.o.}^{3B}$ на цій ділянці. Аналогічно, посередині ділянки 1-2 беруть точку b і зносять її на вісь M^{3B} . Отриману точку b' з'єднують із точкою p і на діаграмі робіт із точки $1'$ проводять пряму $1'2'$ паралельно pb' , яка буде зображати роботу $M_{c.o.}^{3B}$ на ділянці 1-2 і т.д.

У результаті побудови одержують ламану лінію $A_{c.o.}$, яка зображає роботу сил виробничих опорів протягом циклу.

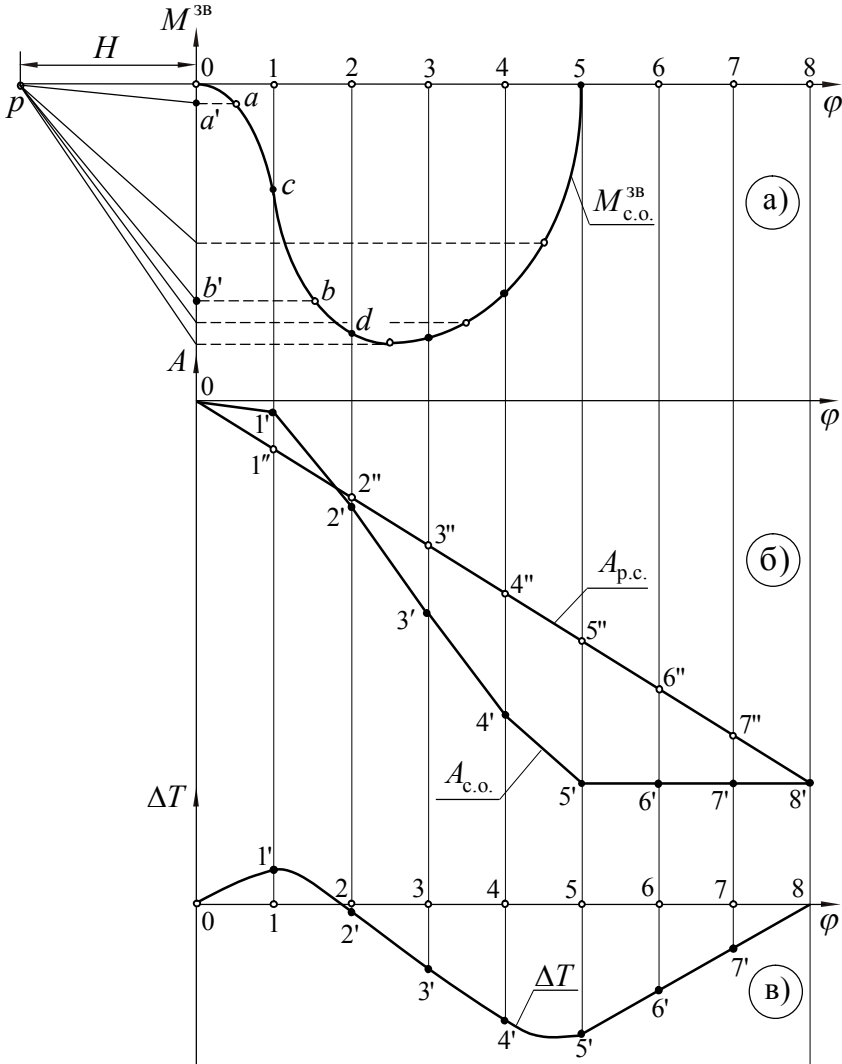


Рис. 3.9.

Зведений момент $M_{p.c.}^{3B}$ рушійних сил для технологічних машин приймають сталим і діаграмою робіт рушійних сил $A_{p.c.}$ буде пряма лінія, яка проходить через

точки 0 і 8' діаграми $A_{c.o.}$ (рис. 3.9,б). Це пояснюється тим, що зміна кінетичної енергії $\Delta T = A_{p.c.} - A_{c.o.}$ за цикл усталеного режиму руху дорівнює нулю, тобто спочатку і наприкінці циклу повинна виконуватися умова $A_{p.c.} = A_{c.o.}$.

У випадку енергетичної машини графічне інтегрування виконують для зведеного моменту $M_{p.c.}^{3B}$ рушійних сил, а сталим приймають момент $M_{c.o.}^{3B}$ сил виробничих опорів.

3. На підставі діаграм робіт рушійних сил $A_{p.c.}$ і сил виробничих опорів $A_{c.o.}$ будується діаграма зміни кінетичної енергії ΔT (рис.3.9,в) механізму з маховиком:

$$\Delta T_i = A_{p.c.i} - A_{c.o.i}.$$

Побудова діаграми зводиться до відкладання для відповідних положень ланки зведення відрізків, що укладені між кривими $A_{p.c.}$ і $A_{c.o.}$ діаграми робіт, тобто для 1 положення ордината 11' діаграми ΔT (рис. 3.9,в) відповідає довжині відрізка 1'1" діаграми робіт (рис. 3.9,б) і т.д. При цьому необхідно враховувати, що якщо $A_{p.c.} > A_{c.o.}$, то $\Delta T > 0$, і навпаки, якщо $A_{p.c.} < A_{c.o.}$, то $\Delta T < 0$. Оскільки відрізки з діаграми робіт переносяться на діаграму кінетичної енергії, то масштаби осей A і ΔT рівні між собою: $\mu_T = \mu_A$.

4. Визначається кінетична енергія T_L ланок механізму в залежності від кута повороту φ ланки зведення. Обчислення виконуються шляхом додавання кінетичних енергій окремих ланок механізму (див. розділ 3.1.6).

5. Будуються сполучені діаграми (рис. 3.10) зміни кінетичних енергій механізму (крива 1), ланок механізму

(крива 2) і маховики (крива 3). Масштабні коефіцієнти для осей ΔT і $T_{\text{л}}$ кінетичних енергій діаграми обов'язково вибираються однаковими – μ'_T .

Діаграма зміни кінетичної енергії $\Delta T = f_3(\varphi)$ механізму (крива 1) на мал.3.10 переноситься в масштабі μ'_T з рис.3.9,в.

Діаграма зміни кінетичної енергії ланок механізму (крива 2) будується в масштабі μ'_T по розрахунковим даним. Відстань від осі φ діаграми $\Delta T = f_3(\varphi)$ до осі φ' діаграми $T_{\text{л}} = f_4(\varphi')$, як було показано вище, може бути довільною.

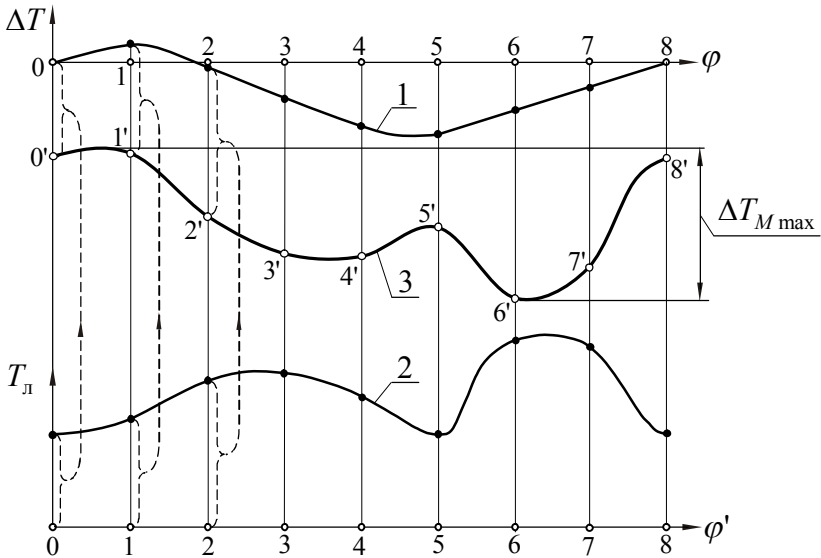


Рис. 3.10.

Діаграма зміни кінетичної енергії маховика (крива 3) будується шляхом графічного віднімання з ординат діаграми $\Delta T = f_3(\varphi)$ ординат діаграми $T_{\text{л}} = f_4(\varphi')$ (на рис.3.10 показано пунктирними лініями). По отриманій

діаграмі визначається в масштабі μ'_T максимальна зміна кінетичної енергії маховика $\Delta T_{M \max}$. Момент інерції J_M маховика відповідно дорівнює:

$$J_M = \frac{\Delta T_{M \max} \cdot \mu'_T}{\omega_{cp}^2 \cdot \delta}. \quad (3.33)$$

4.2.4. Визначення основних розмірів маховика

Маховик, який установлюється на одному із валів привода машини конструктивно оформлюють у вигляді суцільного диска або колеса з важким ободом.

За відомим моментом інерції J_M маховика можна визначити його розміри.

Момент інерції дискового маховика відносно його геометричної осі, яка збігається з віссю обертання, дорівнює:

$$J_M = \frac{1}{8} m \cdot D^2, \quad (3.34)$$

де m – маса диска, кг;

D – зовнішній діаметр диска, м.

Добуток маси маховика на квадрат його діаметра називають *маховим моментом*.

Для диска:

$$m \cdot D^2 = 8 \cdot J_M. \quad (3.35)$$

Якщо виразити масу через об'єм диска і щільність ρ матеріалу маховика (як правило, це сталь), то з формули (3.34) одержимо:

$$J_M = \frac{\pi \cdot b \cdot D^4 \cdot \rho}{32}, \quad (3.36)$$

де b – ширина диска, м.

Тоді, діаметр маховика визначається із формули:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot J_M}{\pi \cdot b \cdot \rho}}. \quad (3.37)$$

Маховик с важким ободом (рис.3.10) складається із масивного обода 1, який з'єднаний з маточиною 2 за допомогою спиць 3 (чи тонким диском).

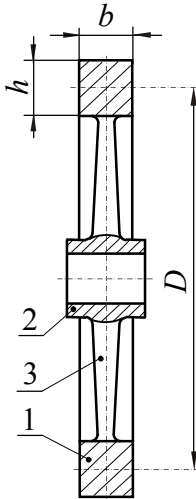


Рис. 3.10.

Основна маса (момент інерції) такого маховика зосереджений в ободі (близько 90%).

Матеріалом маховика є чавун, при колівій швидкості обода 30 - 45 м/с, або сталь – 70 - 120 м/с.

При визначенні діаметра маховика з важким ободом приймають, що вся маса маховика рівномірно розподілена по колу діаметром D .

Тоді момент інерції маховика визначиться за формулою:

$$J_M = \frac{m \cdot D^2}{4}. \quad (3.38)$$

Щоб одержати формулу для розрахунку діаметра D , треба виразити масу обода маховика через його об'єм:

$$V = \pi \cdot D \cdot b \cdot h.$$

Тоді вираз для моменту інерції маховика прийме вид:

$$J_M = \frac{\pi \cdot b \cdot h \cdot \rho \cdot D^3}{4}. \quad (3.39)$$

Виразу (3.39) можна надати іншого вигляду, якщо ввести відносні метричні параметри $\psi = b/D$ і $\gamma = h/D$:

$$J_M = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \psi \cdot \gamma \cdot D^5}{4},$$

тоді діаметр маховика буде визначатися із формули:

$$D = \sqrt[5]{\frac{4 \cdot J_M}{\pi \cdot \rho \cdot \psi \cdot \gamma}}. \quad (3.40)$$

Контрольні запитання до теми 3

1. У чому полягає основна задача динамічного аналізу механізмів?
2. Які сили і моменти діють на ланки механізму?
3. Який параметр є визначальним, при поділі руху механізму на усталений і неусталений?
4. Що називається часом циклу руху?
5. Дайте визначення ланці зведення. Що є визначальним при виборі ланки зведення?
6. Яка умова покладена в основу визначення зведеного моменту сил?
7. Яка умова покладена в основу визначення зведеного моменту інерції?
8. Запишіть рівняння руху одноланкової динамічної моделі в енергетичній формі.
9. Які фактори викликають коливання швидкості вхідної ланки механізму?
10. Що називається коефіцієнтом нерівномірності руху машини?
11. Яка мета установки махового колеса в машині, у яких випадках маховик необхідний і коли він не потрібний?
12. Чим варто керуватися при виборі місця установки махового колеса в машині?
13. Які допущення прийняті при визначенні моменту інерції маховика у способі Мерцалова?
14. У чому полягає регулювання руху механізму?

ЛЕКЦІЯ 7

ЗМІСТ

- 4. Силовий аналіз механізмів.**
- 4.1. Задачі силового аналізу механізмів.
- 4.2. Методи силового аналізу механізмів.
- 4.3. Сили інерції ланок плоских механізмів.
- 4.4. Реакції в кінематичних парах.
- 4.5. Статична визначеність кінематичного ланцюга.
- 4.6. Послідовність силового аналізу механізму.

4.1. Задачі силового аналізу механізмів

При силовому аналізі механізму уважаються заданими закони руху ведучих ланок і деякі зовнішні сили.

Основними силами, які визначають характер руху механізму, є рушійні сили і сили корисного (виробничого) опору, що виникають у процесі виконання механізмом корисної роботи. Робота рушійних сил є додатною, а сил корисного опору – від'ємною. До рушійних сил відносяться: сили тиску робочої суміші на поршень двигуна, момент, який створює електродвигун на ведучому валі технологічної машини, і т.д. Сили корисного опору – це ті сили, для подолання яких призначений механізм. Такими силами є: сили опору різанню в механізмі жнивarki комбайна, сили тиску газу в механізмі поршневого компресора і т.д. Крім цих сил необхідно ще враховувати сили тяжіння ланок, які виконують позитивну чи негативну роботу в залежності від напрямку руху центра мас ланки - вниз чи нагору.

Усі ці сили прийнято називати такими, що задаються. При силовому аналізі механізму рушійні сили і

сили виробничих опорів повинні бути задані. Ці сили як правило задаються у вигляді механічних характеристик.

При роботі механізму в результаті дії всіх прикладених до ланок зазначених сил у кінематичних парах виникають реакції, які безпосередньо не впливають на характер руху механізму, але на поверхнях елементів кінематичних пар викликають сили тертя. Ці сили є силами шкідливого опору.

Реакції в кінематичних парах виникають не тільки унаслідок впливу зовнішніх сил на ланки механізму, але і внаслідок руху окремих мас механізму з прискоренням. Складові реакцій, що виникають у результаті руху ланок механізму з прискоренням, називаються додатковими динамічними навантаженнями.

Тому, *перша задача силового аналізу полягає у визначенні реакцій у кінематичних парах механізмів, або, інакше кажучи, тисків, що виникають у місцях зіткнення елементів кінематичних пар.*

Для забезпечення прийнятого при аналізі механізму закону руху початкової ланки (наприклад, рівномірного) до неї необхідно прикласти, чи рушійний момент (у технологічній машині), чи момент сил корисних опорів від споживачів (в енергетичній машині). При проведенні силового аналізу дія цього моменту прийнято замінювати прикладеної до початкової ланки силою, яку називають *зрівноважуючою*. Момент цієї сили відносно осі обертання початкової ланки дорівнює прикладеному до неї рушійному моменту (технологічна машина) чи моменту сил корисних опорів (енергетична машина).

Таким чином, *друга задача силового аналізу полягає у визначенні величини зрівноважуючої сили.*

4.2. Методи силового аналізу механізмів

У теорії механізмів і машин широке застосування одержав метод силового аналізу механізмів заснований на *принципі Даламбера*:

якщо до кожної точки матеріальної системи крім заданих зовнішніх сил і реакцій в'язей, прикласти ще сили інерції цієї точки, то отримана система сил буде знаходитися в рівновазі і до неї можна буде застосувати всі рівняння статyki.

Заснований на принципі Даламбера силовий метод аналізу, який полягає в перенесенні методів статyki для вирішування задач динаміки механізмів, називається *кінестатичним розрахунком* механізмів на відміну від статичного розрахунку, при якому сили інерції ланок не враховуються.

Таким чином, якщо закони руху всіх ланок механізму відомі, то, приклавши до ланок цього механізму крім сил, що задані, та реакцій у кінематичних парах, ще і *сили інерції*, то можна розглядати, що цей механізм умовно знаходиться в рівновазі і невідомі сили визначити методом статyki, тобто за допомогою рівнянь рівноваги.

Даний метод силового аналізу дозволяє визначити реакції в кінематичних парах механізму і величину сили, що зрівноважує початкову ланку.

Якщо при проведенні силового аналізу необхідно визначити тільки величину сили, що зрівноважує, без визначення реакцій у кінематичних парах, початкову ланку, то застосовується метод силового аналізу, заснований на *принципі можливих переміщень*:

Відповідно до цього принципу, якщо на яку-небудь механічну систему діють сили, то, додаючи до заданих

сил сили інерції і даючи всій системі можливі для даного її положення елементарні переміщення, одержуємо ряд елементарних робіт, сума яких повинна дорівнювати нулю.

Звідси випливає, що елементарна робота сили, що зрівноважує початкову ланку, у сумі з елементарними роботами всіх інших сил, що діють на ланки механізму, у тому числі і сил інерції, повинна бути рівною нулю.

Графічна інтерпретація даного метода отримала назву *важеля Жуковського*.

Важіль Жуковського являє собою повернений на 90° в будь-яку сторону план швидкостей, в однойменні точки якого, не змінюючи величини і напрямки, перенесені всі задані сили, що діють у розглянутий момент часу на ланки механізму, сили інерції і сила, що зрівноважує початкову ланку. Розглядаючи повернений план швидкостей як деякий *важіль* з опорою в полюсі плану швидкостей, що знаходиться в рівновазі під дією всіх прикладених сил, з рівняння моментів усіх перенесених сил відносно полюса визначається величина і напрямок сили, що зрівноважує початкову ланку.

4.3. Сили інерції ланок плоских механізмів

Сили інерції, які виникають при русі ланок механізму, залежать від характеру руху ланки, що розглядається.

Рух ланки по кінематичному признаку розділяють на три види:

- плоский;
- обертальний (коливальний);
- поступальний.

Рух ланки плоский

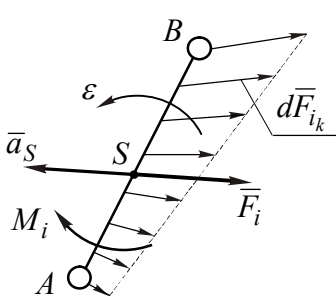


Рис. 4.1.

Усі точки ланки (рис. 4.1) рухаються з різними за величиною і напрямом прискореннями. До кожної точки ланки прикладена елементарна сила інерції $d\bar{F}_{i_k}$, яка дорівнює:

$$d\bar{F}_{i_k} = -dm_k \cdot \bar{a}_k,$$

де dm_k – маса точки;

\bar{a}_k – прискорення точки.

Всі елементарні сили інерції ланки AB можуть бути зведені до головного вектора сил інерції – \bar{F}_i , який прикладений в центрі мас S ланки, і до головного моменту сил інерції – M_i (рис.4.1), величини яких дорівнюють, відповідно:

$$F_i = m \cdot a_S; \quad M_i = J_S \cdot \varepsilon, \quad (4.1)$$

де m – маса ланки;

a_S – прискорення центра мас S ланки;

J_S – момент інерції ланки відносно осі, яка перпендикулярна площині руху ланки і проходить через її центр мас S ;

ε – кутове прискорення ланки.

Враховуючи, що:

- маса ланки m вимірюється в $кг$, а прискорення a_S центра мас ланки – в $м/с^2$, то модуль головного вектора сил інерції \bar{F}_i буде мати розмірність: $[F_i] = [m] \cdot [a] = кг \cdot м/с^2 = Н$;

- момент інерції J_S має розмірність $\text{кг} \cdot \text{м}^2$, кутове прискорення $\varepsilon - 1/\text{с}^2$, то головний момент M_i сил інерції буде мати розмірність:

$$[M_i] = [J_S] \cdot [\varepsilon] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Головний вектор \bar{F}_i сил інерції спрямований протилежно напрямку прискорення \bar{a}_S центра мас ланки, а головний момент M_i сил інерції спрямований убік, протилежний напрямку кутового прискорення ε ланки.

Обертальний рух ланки

1. Ланка обертається навколо осі, що проходить через її центр мас (рис.4.2).

У цьому випадку прискорення центра мас ланки дорівнює нулю ($\bar{a}_S = 0$) і, отже, головний вектор сил інерції дорівнює нулю: $F_i = m \cdot a_S = 0$.

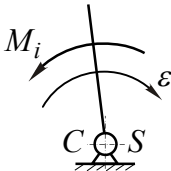


Рис. 4.2.

Якщо кутове прискорення ланки не дорівнює нулю ($\varepsilon \neq 0$), то до ланки прикладається тільки головний момент сил інерції (рис. 4.2), модуль якого дорівнює: $M_i = J_S \cdot \varepsilon$.

2. Ланка обертається навколо осі, яка не проходить через її центр мас (рис. 4.3).

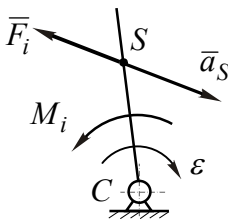


Рис. 4.3.

У цьому випадку, як і при плоскому русі ланки, всі елементарні сили інерції зводяться до головного вектора сил інерції \bar{F}_i і до головного моменту M_i сил інерції, величини яких визначаються за формулами (4.1).

Рух ланки поступальний

Якщо ланка рухається поступально (рис. 4.4) із прискоренням, то прискорення всіх його точок дорівнюють прискоренню центра мас S .

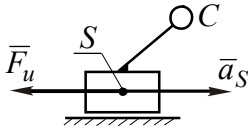


Рис. 4.4.

Оскільки в цьому випадку кутове прискорення ланки дорівнює нулю ($\varepsilon = 0$), то головний момент сил інерції дорівнює нулю ($M_i = 0$) і всі сили інерції зведуться до головного вектора сил інерції: $\bar{F}_i = -m \cdot \bar{a}_S$.

4.4. Реакції в кінематичних парах

Реакції в кінематичних парах по відношенню до всього механізму в цілому будуть силами внутрішніми, але по відношенню до кожної ланки, що входить у кінематичну пару, будуть силами зовнішніми.

Як було показано в розділі 1.4, у плоских кінематичних ланцюгах можуть використовуватися тільки кінематичні пари IV та V класів, причому кінематичні пари IV класу тільки вищі.

Враховуючи, що реакція, як і будь-яка інша сила, характеризується величиною, напрямком і точкою прикладення, то надалі розглянемо визначення цих характеристик для реакцій в кінематичних парах.

Для реакцій, що виникають між елементами кінематичних пар, прийемо наступні позначення: реакцію з боку ланки "k" на ланку "n" позначимо як \bar{R}_{kn} . Очевидно, що $\bar{R}_{kn} = -\bar{R}_{nk}$.

Розглянемо дію сил у кінематичних парах при відсутності тертя.

Вища кінематична пара IV класу

Як відомо з теоретичної механіки, реакція між двома тілами, що дотикаються, при відсутності сил тертя (рис.4.5.) спрямована по спільній нормалі n - n до поверхонь, що дотикаються, і прикладена в точці їх дотику (точці A).

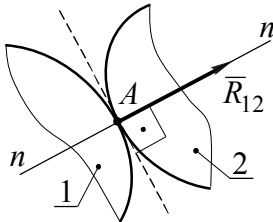


Рис. 4.5.

Таким чином, у вищій кінематичній парі IV класу невідомої є тільки величина реакції.

Обертальна кінематична пара V класу

Сила взаємодії ланок \bar{R}_{32} , що утворюють нижчу пару, являє собою рівнодіючу елементарних сил \bar{q}_{32} , розподілених по поверхні зіткнення ланок (рис. 4.6). Величина розподілених сил і поверхня прикладення залежить від заданих сил, що діють на ланки.

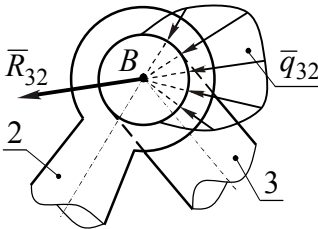


Рис. 4.6.

Оскільки лінія дії кожної з елементарних сил при відсутності сил тертя проходить через центр обертальної кінематичної пари (точку B), то елементарні сили \bar{q}_{32} утворять систему збіжних сил.

Як відомо з теоретичної механіки, систему збіжних сил можна звести до однієї результуючої \bar{R}_{32} , точкою прикладення якої буде точка перетинання ліній дії елементарних сил (центр шарніра B).

Таким чином, в обертальній кінематичній парі відома тільки точка прикладення реакції, а величина і напрямок невідомі.

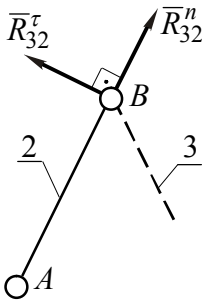


Рис. 4.7.

При виконанні силового аналізу повну реакцію \bar{R}_{32} в обертальній кінематичній парі, наприклад B (рис. 4.7), розкладають на дві складові \bar{R}_{32}^n і \bar{R}_{32}^tau . Складову реакції \bar{R}_{32}^n , спрямовану по осі ланки, називають **нормальною реакцією**, а складову \bar{R}_{32}^tau , спрямовану перпендикулярно до нормальної, **тангенціальною реакцією**.

При такому представленні число невідомих параметрів реакції в обертальній парі не змінюється, невідомими тільки стають величини реакцій \bar{R}_{32}^n і \bar{R}_{32}^tau .

Поступальна кінематична пара V класу

Система елементарних сил \bar{q}_{05} (рис. 4.8,а), розподілених по поверхні зіткнення ланок, являє собою систему паралельних сил, яку можна звести до однієї результуючої \bar{R}_{05} , що спрямована перпендикулярно опорній поверхні.

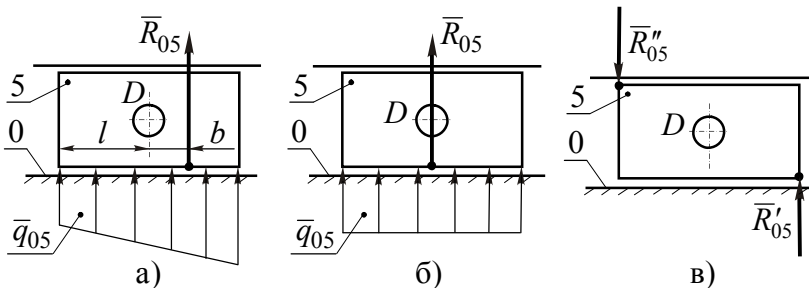


Рис. 4.8.

Невідомими вважаються точка прикладення реакції (плече b) і її величина.

При силовому аналізі, використовуючи відому з теоретичної механіки лему про паралельний перенос сили, реакцію, наприклад \bar{R}_{05} (рис. 4.9), зберігаючи напрямок, переносять у відому точку на повзуні (як правило, у центр установленого на повзуні шарніра), при цьому додають пару сил з невідомим моментом M_{05} .

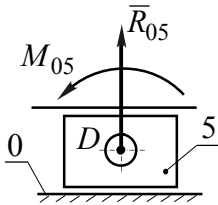


Рис. 4.9.

Величина моменту M_{05} визначає положення реакції \bar{R}_{05} відносно центра шарніра D . Якщо $M_{05} = 0$, то лінія дії реакції \bar{R}_{05} буде проходити через центр шарніра D (рис. 4.8,б), а епюра елементарних сил буде симетричною відносно цього перетину.

Якщо $M_{05} \neq 0$, але $b = M_{05}/R_{05} \leq l$, то реакція \bar{R}_{05} буде прикладена в межах опорної поверхні повзуна 5 (рис. 4.8,а), а епюра елементарних сил носить несиметричний характер.

У випадку якщо $b > l$, реакція \bar{R}_{05} повинна бути прикладена за межами опорної поверхні повзуна 5, що неможливо. У цьому випадку до повзуна буде прикладена вже не одна, а дві спрямовані назустріч одна одній невідомі за модулем реакції \bar{R}'_{05} і \bar{R}''_{05} (рис. 4.8,в). Саме ці дві реакції і представляють реальний силовий вплив на повзун з боку направляючих, а сила \bar{R}_{05} є лише їх рівнодіючою:

$$\bar{R}_{05} = \bar{R}'_{05} + \bar{R}''_{05}.$$

Такий вплив на повзун викликає його перекид в напрямних, у результаті чого при певних умовах можливе заклинювання повзуна. (Більш докладно це питання буде розглянуто у розділі 6).

3.4. Статична визначеність кінематичного ланцюга

Число невідомих, що можна визначити з будь-якої системи рівнянь, повинно збігатися з числом рівнянь. Тому, перш ніж розв'язувати задачу про визначення реакцій у кінематичних парах, треба з'ясувати для яких кінематичних ланцюгів витримується *умова рівності рівнянь кінестатики і числа невідомих складових реакцій у кінематичних парах (умова статичної визначеності кінематичного ланцюга)*.

Оскільки для кожної ланки, що рухається під дією прикладених сил в площині (плоска система сил), можна написати три рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0,$$

то число рівнянь, яке можна скласти для n ланок кінематичного ланцюга дорівнює $3n$.

Припустимо, що до складу кінематичного ланцюга входять тільки кінематичні пари V класу. Реакція кожної такої пари містить дві невідомі величини: обертальна – дві складові сили, поступальна – силу і момент. Таким чином, число невідомих, котрі необхідно визначити, буде дорівнювати $2P_5$, де P_5 – число кінематичних пар V класу. Отже, кінематичний ланцюг буде статично визначеним, якщо виконується умова:

$$3n = 2P_5, \quad \text{або} \quad 3n - 2P_5 = 0,$$

тобто співвідношення між числом ланок n і числом P_5 кінематичних пар V класу дорівнює:

$$P_5 = 3n/2.$$

Отримане співвідношення відповідає структурній формулі групи Ассура.

Таким чином, *група Ассура являє собою статично визначений кінематичний ланцюг.*

Тому найбільш раціональним є визначення реакцій у кінематичних парах плоского механізму по групам Ассура.

3.5. Послідовність силового аналізу механізму

При силовому аналізі механізму II класу бажано дотримувати наступного порядку.

1. Визначаються всі зовнішні сили, прикладені до ланок механізму, від дії яких потрібно знайти реакції в кінематичних парах механізму.

2. Обирається початкова ланка механізму і розбивається ведений кінематичний ланцюг механізму на групи Ассура.

3. Виконується силовий аналіз кожної групи Ассура окремо виходячи з того, що така група є статично визначним кінематичним ланцюгом. Розрахунок починають з останньої, рахуючи від початкової ланки, приєднаної групи Ассура і закінчують початковою ланкою.

4. Порядок силового аналізу кожної групи Ассура II класу залежить від її виду.

Так, при аналізі груп 1, 2 і 4 виду, внутрішня кінематична пара яких є обертальною, спочатку складають рівняння моментів для кожної ланки групи окремо відносно внутрішньої кінематичної пари, а потім складають рівняння векторної суми сил, що діють на групу в цілому і на одну з ланок. При аналізі ж груп Ассура 3 і 5 виду, внутрішня кінематична пара яких є поступальною, розглядають рівновагу кожної ланки окремо, спочатку другої ланки групи, а потім першої. Для другої ланки складають рівняння моментів відносно точки прикладення реакції від стійки на ланку і рівняння векторної суми сил, а для першої ланки – тільки рівняння векторної суми сил.

ЛЕКЦІЯ 8

ЗМІСТ

4.7. Силовий аналіз групи Ассура II класу 1 виду

4.8. Силовий аналіз групи Ассура II класу 2 виду

4.7. Силовий аналіз групи Ассура II класу 1 виду

Розглянемо задачу про визначення реакцій у кінематичних парах групи Ассура II класу 1 виду.

Вихідними даними для проведення силового аналізу є: розміри ланок AB і BC групи (рис. 4.10,а); положення центрів мас ланок S_2 і S_3 ; маси ланок m_2 і m_3 ; моменти інерції ланок J_{S_2} і J_{S_3} відносно осей, що проходять через центри мас ланок перпендикулярно до площини їх руху.

Крім того, відомими повинні бути прискорення \bar{a}_{S_2} і \bar{a}_{S_3} центрів мас ланок і кутові прискорення ε_2 і ε_3 ланок, що визначаються при виконанні кінематичного аналізу.

У деякому масштабі μ_l вичерчуємо групу 2-3 і прикладаємо до ланок цієї групи усі відомі сили і моменти сил (рис. 4.10,а):

- сили тяжіння ланок \bar{G}_2 і \bar{G}_3 прикладаємо в центрах мас ланок і направляємо вертикально вниз;
- сили інерції ланок \bar{F}_{i2} і \bar{F}_{i3} прикладаємо в центрах мас ланок і направляємо їх у сторони, протилежні напрямкам прискорень \bar{a}_{S_2} і \bar{a}_{S_3} ;

- моменти M_{i2} і M_{i3} від сил інерції направляємо протилежно напрямкам кутових прискорень ε_2 і ε_3 ланок.

Числові значення всіх цих сил визначаємо за формулами, наведеними у розділах 3.1.2 і 4.3.

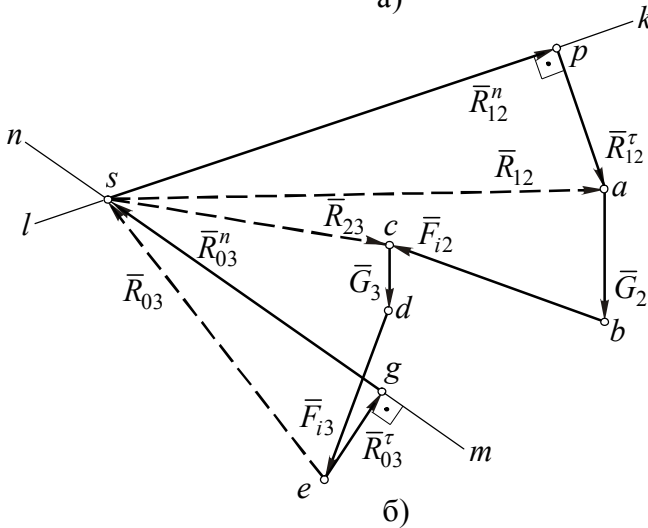
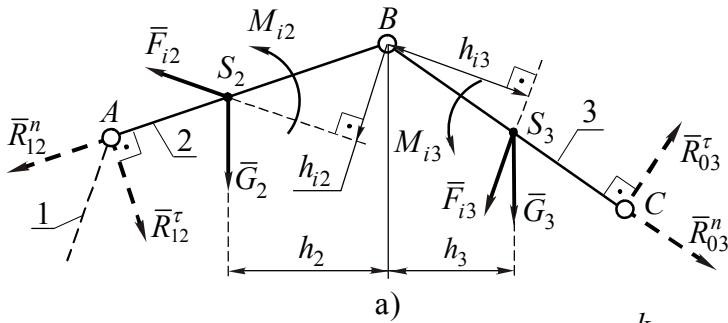


Рис. 4.10.

У результаті силового аналізу групи визначаються реакції в кінематичних парах A , B і C .

У кінематичній парі A на ланку 2 з боку ланки 1 діє реакція \bar{R}_{12} , а в кінематичній парі B на ланку 3 з боку стійки – реакція \bar{R}_{03} . З огляду на те, що ці кінематичні пари обертальні, розкладаємо реакції \bar{R}_{12} і \bar{R}_{03} на нормальні і тангенціальні складові: \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{12}^τ , \bar{R}_{03}^n і \bar{R}_{03}^τ (рис. 4.10,а).

Напрямки цих складових приймаємо довільно. Якщо в результаті розрахунку значення складової одержимо з від’ємним знаком, то це буде свідчити про те, що її дійсний напрямок протилежно раніше прийнятому.

1). Значення R_{12}^τ і R_{03}^τ можна одержати з рівнянь рівності нулю сум моментів усіх сил, що діють на ланки 2 і 3, відносно шарніра B .

Для ланки 2:

$$\sum_2 m_B(\bar{F}_k) = R_{12}^\tau \cdot AB \cdot \mu_l + G_2 \cdot h_2 \cdot \mu_l - \\ - F_{i2} \cdot h_{i2} \cdot \mu_l + M_{i2} = 0. \quad (4.2)$$

Для ланки 3:

$$\sum_3 m_B(\bar{F}_k) = R_{03}^\tau \cdot BC \cdot \mu_l - G_3 \cdot h_3 \cdot \mu_l - \\ - F_{i3} \cdot h_{i3} \cdot \mu_l + M_{i3} = 0. \quad (4.3)$$

У рівняннях (4.2) і (4.3): h_2 і h_3 плечі сил тяжіння \bar{G}_2 і \bar{G}_3 відносно точки B ; h_{i2} і h_{i3} плечі сил інерції \bar{F}_{i2} і \bar{F}_{i3} відносно точки B .

З рівняння (4.2) визначаємо величину і напрямок складової R_{12}^{τ} :

$$R_{12}^{\tau} = \frac{-G_2 \cdot h_2 + F_{i2} \cdot h_{i2} - M_{i2} / \mu_l}{AB}, \quad (4.4)$$

а з рівняння (4.3) величину і напрямок R_{03}^{τ} :

$$R_{03}^{\tau} = \frac{G_3 \cdot h_3 + F_{i3} \cdot h_{i3} - M_{i3} / \mu_l}{CB}. \quad (4.5)$$

Усі лінійні розміри, що входять у рівняння (4.4) і (4.5), вимірюються по кресленню групи (рис 4.10,а).

2). Складаємо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на групу 2-3:

$$\sum_{2,3} \bar{F}_k = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{i2} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{i3} + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{03}^n = 0. \quad (4.6)$$

У цьому рівнянні невідомі величини і напрямки складових \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{03}^n реакцій \bar{R}_{12} і \bar{R}_{03} . При цьому відомо, що лінії дії цих складових проходять вздовж осей ланок AB і BC .

При складанні рівняння векторної суми сил бажано дотримуватися наступного порядку:

- починати і закінчувати рівняння необхідно силами, величини яких невідомі;
- спочатку додавати сили, що діють на одну ланку, а потім на другу.

Величини складових \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{03}^n реакцій можуть бути визначені побудовою згідно рівнянню (4.6) векторного багатокутника (рис. 4.10,б), який називається **планом сил**.

Для цього з довільної точки "p" відкладаємо в масштабі μ_F першу відому силу з рівняння (4.6) – складову \bar{R}_{12}^r реакції \bar{R}_{12} у виді вектора \overline{pa} . Далі, до вектора \overline{pa} додаємо вектор \overline{ab} , що зображає в тому ж масштабі μ_F наступну силу з рівняння (4.6) – силу тяжіння \bar{G}_2 . Продовжуючи геометричне додавання в порядку, зазначеному в рівнянні (4.6), одержуємо послідовно вектори \overline{bc} , \overline{cd} , \overline{de} і \overline{eg} , що зображають відповідно відомі сили \bar{F}_{i2} , \bar{G}_3 , \bar{F}_{i3} і \bar{R}_{03}^r .

Після побудови всіх відомих сил векторного рівняння (4.6), через початок вектора \overline{pa} (точку "p") проводимо пряму kl паралельно лінії дії нормальної реакції \bar{R}_{12}^n (паралельно AB), а через кінцеву точку "g" вектора \overline{eg} – пряму mn , паралельно лінії дії нормальної реакції \bar{R}_{03}^n (паралельно BC).

Точка "s" перетину цих прямих є рішенням рівняння (4.6). Ця точка визначає початок вектора \overline{sp} і кінець вектора \overline{gs} . Знайдені вектори \overline{sp} і \overline{gs} у масштабі μ_F відповідно зображають складові \bar{R}_{12}^n і \bar{R}_{03}^n . Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то напрямком векторів \overline{sp} і \overline{gs} обираємо таким чином, щоб векторний багатокутник був замкнутим.

3). Повні реакції \bar{R}_{12} і \bar{R}_{03} визначаємо як суму відповідних складових за векторними рівняннями:

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{12}^n; \quad \bar{R}_{03} = \bar{R}_{03}^r + \bar{R}_{03}^n. \quad (4.7)$$

З'єднавши точку "s" з точкою "a" на плані сил, одержуємо реакцію \bar{R}_{12} у виді вектора \overline{sa} . Аналогічно, з'єднавши точки "e" і "s", одержуємо реакцію \bar{R}_{03} у виді вектора \overline{es} .

4). Для визначення реакції \bar{R}_{23} в кінематичній парі B запишемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 3:

$$\sum_3 \bar{F}_k = \bar{R}_{23} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{i3} + \bar{R}_{03} = 0. \quad (4.8)$$

Єдиною невідомою в рівнянні (4.8) є реакція \bar{R}_{23} від 2 ланки на 3. Величина і напрямок цієї реакції можуть бути отримані шляхом використання частини вже побудованого силового багатокутника (рис. 4.10,б). Для цього на плані сил досить з'єднати точки "s" і "c" вектором \overline{sc} , який у масштабі μ_F буде зображати реакцію \bar{R}_{23} , а векторний багатокутник $scdg$ буде графічним зображенням рівняння (4.8).

Модулі знайдених реакцій і їх складових визначаємо множенням довжин відповідних відрізків, які вимірюємо на плані сил, на масштабний коефіцієнт μ_F плану:

$$R_{12}^n = (sp) \cdot \mu_F;$$

$$R_{12} = (sa) \cdot \mu_F;$$

$$R_{03}^n = (gs) \cdot \mu_F;$$

$$R_{03} = (es) \cdot \mu_F;$$

$$R_{23} = R_{32} = (sc) \cdot \mu_F.$$

Реакція \bar{R}_{32} від ланки 3 на ланку 2 дорівнює за величиною реакції \bar{R}_{23} , але протилежна за напрямком.

4.8. Силовий аналіз групи Ассура II класу 2 виду

Особливості силового аналізу груп Ассура II класу 2 і 3 видів розглянемо на прикладі силового розрахунку кулісно-важільного механізму, показаного на рис. 4.11.

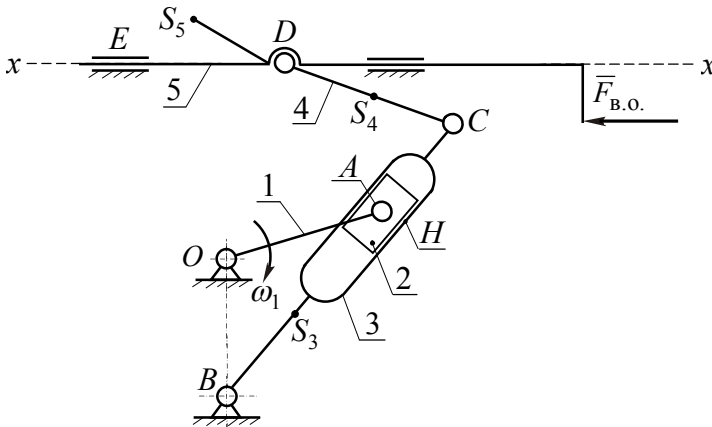


Рис. 4.11.

Механізм, що розглядається, відноситься до другого класу і складається з початкової ланки 1 і двох груп Ассура II класу: групи другого виду (ланки 4 і 5) і групи третього виду (ланки 2 і 3).

Визначення реакцій в кінематичних парах механізму почнемо з останньої в порядку приєднання групи, яка складається із ланок 4 і 5.

Вихідними даними для проведення силового аналізу такої групи є: розмір ланки CD ; положення центрів мас ланок S_4 і S_5 ; маси ланок m_4 і m_5 ; момент інерції J_{S_4} ланки 4 відносно осі, що проходить через центр мас ланки перпендикулярно до площини її руху.

Крім того, у результаті виконання кінематичного аналізу, відомими є прискорення \bar{a}_{S_4} і $\bar{a}_{S_5} = \bar{a}_D$ центрів мас ланок і кутове прискорення ε_4 ланки 4.

Виділимо цю групу зі складу механізму і покажемо сили, що на неї діють (рис.4.12,а):

- сили тяжіння \bar{G}_4 і \bar{G}_5 , прикладені в центрах мас S_4 і S_5 ланок та спрямовані вертикально вниз;
- сили інерції ланок \bar{F}_{i4} і \bar{F}_{i5} , прикладені в центрах мас S_4 і S_5 ланок і спрямовані протилежно прискоренням \bar{a}_{S_4} і \bar{a}_{S_5} цих центрів мас;
- момент від сил інерції M_{i4} ланки 4, спрямований протилежно кутовому прискоренню ε_4 цієї ланки;
- сила виробничого опору $\bar{F}_{\text{в.о.}}$.

У результаті силового аналізу групи визначаються реакції в кінематичних парах C , D і E .

Точка прикладення реакції \bar{R}_{05} в поступальній кінематичній парі E невідома, а напрямок реакції перпендикулярно до опорної поверхні повзуна 5, тобто перпендикулярно до $x - x$.

Переносимо реакцію \bar{R}_{05} в центр шарніра D і задаємося її передбачуваним напрямком, при цьому, відповідно до п. 4.4 (рис. 4.9), додаємо пари сил з невідомим за величиною і напрямком моментом M_{05} (рис.4.12,а).

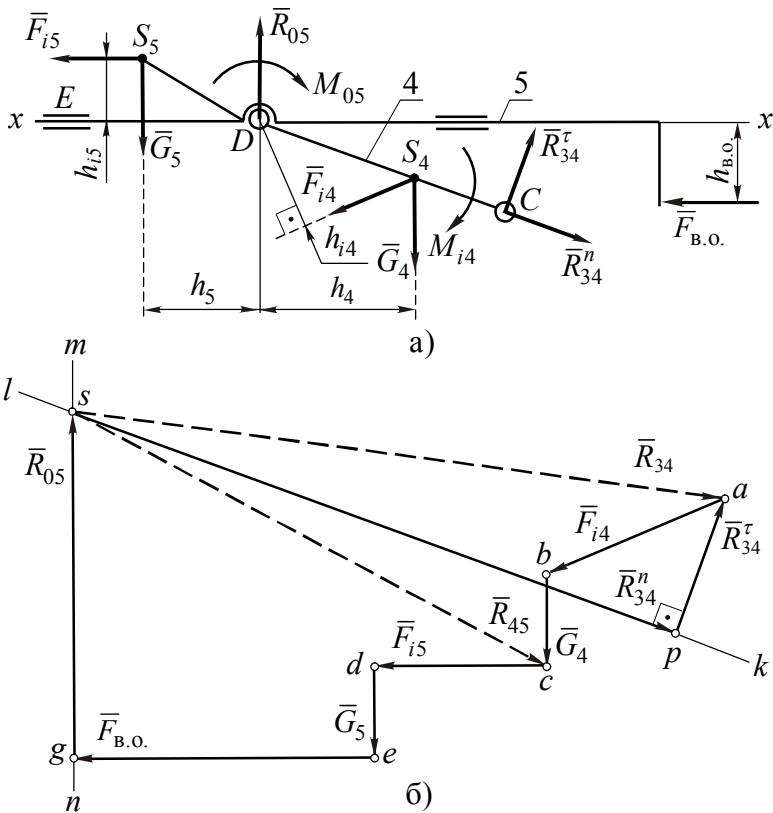


Рис. 4.12.

Невідому за величиною і напрямком реакцію \bar{R}_{34} з боку ланки 3 на ланку 4 в обертальній кінематичній парі C розкладаємо на дві складові: нормальну \bar{R}_{34}^n і тангенціальну \bar{R}_{34}^r . Напрями цих складових обираємо довільно, наприклад, так, як показано на рис. 4.12,а.

1). Враховуючи, що внутрішня кінематична пара цієї групи є обертальною, то рівняння рівноваги моментів

прикладених сил відносно шарніра D складаємо окремо для кожної ланки.

Для ланки 4:

$$\sum_4 m_D(\bar{F}_k) = R_{34}^r \cdot CD \cdot \mu_l - M_{i4} - G_4 \cdot h_4 \cdot \mu_l - F_{i4} \cdot h_{i4} \cdot \mu_l = 0. \quad (4.9)$$

Для ланки 5:

$$\sum_5 m_D(\bar{F}_k) = -M_{05} + F_{i5} \cdot h_{i5} \cdot \mu_l + G_5 \cdot h_5 \cdot \mu_l - F_{в.о.} \cdot h_{в.о.} \cdot \mu_l = 0. \quad (4.10)$$

В рівняннях (4.9) і (4.10) μ_l – масштабний коефіцієнт довжини, за допомогою якого креслилась розрахункова схема групи. Лінійні розміри CD , h_4 , h_{i4} , h_{i5} , h_5 і $h_{в.о.}$ визначаються по цій схемі (рис. 4.12,а).

З рівняння (4.9) знаходимо величину і напрямок складової \bar{R}_{34}^r :

$$R_{34}^r = \frac{M_{i4} / \mu_l + G_4 \cdot h_4 + F_{i4} \cdot h_{i4}}{CD}, \quad (4.11)$$

а з рівняння (4.10) напрямок і величину моменту M_{05} :

$$M_{05} = (F_{i5} \cdot h_{i5} + G_5 \cdot h_5 - F_{в.о.} \cdot h_{в.о.}) \mu_l. \quad (4.12)$$

Якщо величина моменту M_{05} буде від'ємною, то його дійсний напрямок буде протилежний обраному на рис. 4.12,а.

2). Переходимо до визначення реакцій \bar{R}_{34}^n і \bar{R}_{05} .

Для цього складаємо геометричну умову рівноваги сил, що діють на групу 4-5:

$$\sum_{4,5} \bar{F}_k = \bar{R}_{34}^n + \bar{R}_{34}^r + \bar{F}_{i4} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{i5} + \bar{G}_5 + \\ + \bar{F}_{\text{в.о.}} + \bar{R}_{05} = 0. \quad (4.13)$$

При складанні рівняння (4.13) невідомі реакції \bar{R}_{34}^n і \bar{R}_{05} записуємо як перший і останній вектори.

Обираємо масштабний коефіцієнт сил μ_F і за рівнянням (4.13) будуємо силовий багатокутник (план сил).

З довільної точки "p" (рис.4.12,б) проводимо вектор \overline{pa} , що зображає в масштабі μ_F реакцію \bar{R}_{34}^r . До вектора \overline{pa} геометрично додаємо вектор \overline{ab} , що зображає силу інерції \bar{F}_{i4} . Продовжуючи геометричне додавання в порядку, зазначеному у векторному рівнянні (4.13), одержуємо послідовність векторів \overline{bc} , \overline{cd} , \overline{de} і \overline{eg} , що зображають відповідно відомі сили \bar{G}_4 , \bar{F}_{i5} , \bar{G}_5 і $\bar{F}_{\text{в.о.}}$.

Після побудови всіх відомих сил векторного рівняння (4.13) через точку "p" початку вектора \overline{pa} проводимо пряму kl , паралельно CD , уздовж якої буде спрямована нормальна складова реакції \bar{R}_{34}^n , а через кінцеву точку "g" вектора \overline{eg} – пряму mn (перпендикулярно до осі $x - x$ направляючих поступальної кінематичної пари E), уздовж якої буде спрямована реакція \bar{R}_{05} . Точка "s" перетину прямих kl і mn визначає початок вектора \overline{sp} , що зображає складову \bar{R}_{34}^n і кінець

вектора \overline{gs} , що зображає реакцію \overline{R}_{05} . (Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то напрямок векторів \overline{sp} і \overline{gs} повинен бути таким, щоб векторний багатокутник був замкнутим.)

3). Повну реакцію \overline{R}_{34} в кінематичній парі C визначаємо як векторну суму складових:

$$\overline{R}_{34} = \overline{R}_{34}^r + \overline{R}_{34}^n. \quad (4.14)$$

З'єднавши на плані сил точку "s" з точкою "a", отримаємо реакцію \overline{R}_{34} у виді вектора \overline{sa} .

4). Для визначення реакції \overline{R}_{45} у внутрішній кінематичній парі D запишемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 5:

$$\sum_5 \overline{F}_k = \overline{R}_{45} + \overline{F}_{i5} + \overline{G}_5 + \overline{F}_{\text{в.о.}} + \overline{R}_{05} = 0. \quad (4.15)$$

З'єднавши точки "s" і "c" на плані сил (рис.4.12,б) знаходимо реакцію \overline{R}_{45} у вигляді вектора \overline{sc} , а векторний багатокутник $scdeg$ буде графічним зображенням рівняння (4.15).

Величини (модулі) реакцій R_{34} , R_{05} , R_{45} з урахуванням масштабного коефіцієнта сил μ_F будуть дорівнювати:

$$R_{34} = (sa) \cdot \mu_F;$$

$$R_{05} = (gs) \cdot \mu_F;$$

$$R_{54} = (sc) \cdot \mu_F,$$

де (sa) , (gs) , (sc) – довжини відповідних векторів на плані сил.

ЛЕКЦІЯ 9

ЗМІСТ

- 4.9. Силовий аналіз групи Ассура II класу 3 виду.
- 4.10. Силовий аналіз початкової ланки (механізму I класу).
- 4.11. Важіль М.Є. Жуковського.
Контрольні питання до теми 4.

4.9. Силовий аналіз групи Ассура II класу 3 виду

Розглянемо силовий аналіз групи Ассура II класу 3 виду на прикладі механізму, представленого на рис. 4.11.

Група включає ланки 2 і 3, дві зовнішні обертальні кінематичні пари A і B , і внутрішню H поступальну кінематичну пару.

При силовому аналізі групи 2-3 часто масою повзуна 2, у порівнянні з масою куліси 3, нехтують, тобто приймається $m_2 = 0$. У цьому випадку сила тяжіння, сила інерції і момент сил інерції повзуна 2 будуть дорівнюють нулю ($G_2 = 0$, $F_{i2} = 0$ і $M_{i2} = 0$).

Вихідними даними для проведення силового аналізу такої групи є: розміри куліси AB і BC ; положення центра мас S_3 ; маса куліси m_3 і її момент інерції J_{S_3} відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху куліси.

Прискорення \bar{a}_{S_3} центра мас куліси і її кутове прискорення ε_3 визначаються при кінематичному аналізі.

Виділимо цю групу зі складу механізму, накреслимо її схему і покажемо сили, що на неї діють (рис.4.13,а).

На групу 2-3 діють наступні відомі сили:

\bar{G}_3 – сила тяжіння 3 ланки (куліси), прикладена в центрі мас S_3 ланки і спрямована вертикально вниз;

\bar{F}_{i3} – сила інерції 3 ланки, прикладена в центрі мас S_3 ланки і спрямована протилежно прискоренню \bar{a}_{S_3} центра мас куліси;

M_{i3} – момент від сил інерції 3 ланки, спрямований протилежно напрямку кутового прискорення ε_3 куліси;

\bar{R}_{43} – реакція з боку ланки 4 на ланку 3, прикладена в точці C , рівна за модулем і протилежна за напрямом реакції \bar{R}_{34} , яка була визначена при силовому аналізі групи 4-5 (рис.4.12,б).

Потрібно визначити реакцію з боку стійки на кулісу 3 у кінематичній парі B – \bar{R}_{03} , реакцію \bar{R}_{12} – з боку кривошипа 1 на повзун 2 у парі A і реакцію \bar{R}_{23} з боку повзуна 2 на кулісу 3 у парі H .

Спочатку розглядаємо рівновагу повзуна 2 і визначаємо напрямок реакції \bar{R}_{12} .

Повзун 2 знаходиться в рівновазі під дією тільки двох сил: реакції \bar{R}_{12} – з боку кривошипа 1 і реакції \bar{R}_{32} – з боку куліси 3 (рис. 4.13,б). Рівновага тіла під дією двох сил можлива тільки в тому випадку, якщо вони діють вздовж однієї прямої і спрямовані в протилежні сторони. З огляду на те, що реакція \bar{R}_{12} прикладена до центра обертальної кінематичної пари A , а лінія дії реакції \bar{R}_{32} спрямована перпендикулярно до осі куліси BC (перпендикулярно до

направляючих поступальної кінематичної пари H), то лінія дії реакції \bar{R}_{12} буде проходити через точку A перпендикулярно до осі куліси BC .

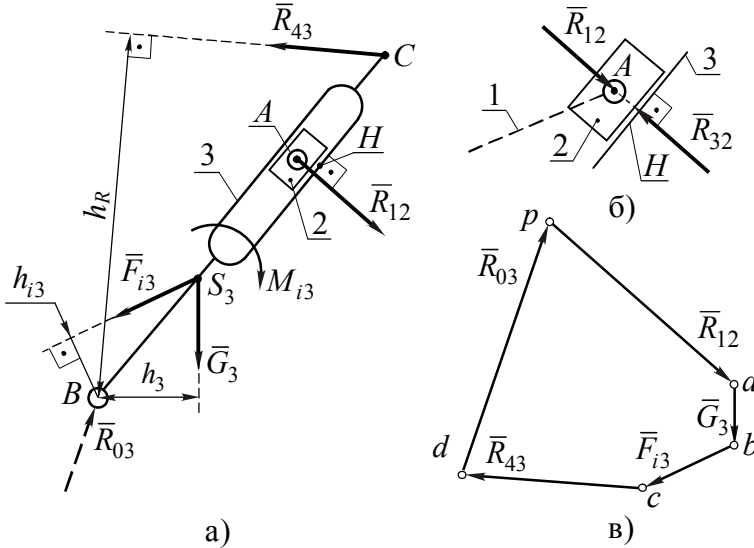


Рис. 4.13.

1) Для визначення величини і напрямку реакції \bar{R}_{12} складемо рівняння рівноваги моментів сил, що діють на групу 2-3, відносно точки B :

$$\sum_{2,3} m_B(\bar{F}_k) = F_{i3} \cdot h_{i3} \cdot \mu_l - G_3 \cdot h_3 \cdot \mu_l - M_{i3} - R_{12} \cdot BA \cdot \mu_l + R_{43} \cdot h_R \cdot \mu_l = 0. \quad (4.16)$$

Звідки:

$$R_{12} = \frac{F_{i3} \cdot h_{i3} - G_3 \cdot h_3 - M_{i3} / \mu_l + R_{43} \cdot h_R}{AB}, \quad (4.17)$$

де h_3 , h_R , h_{i3} – плечі відповідних сил \bar{G}_3 , \bar{R}_{43} , \bar{F}_{i3} відносно точки B (рис. 4.13,а);

μ_l – масштабний коефіцієнт схеми групи.

Якщо в результаті розрахунку по формулі (4.17) величина реакції R_{12} буде додатною, то зазначений на рис. 4.13,а напрямок \bar{R}_{12} – є вірним. Якщо ж результат розрахунку виявиться зі знаком мінус, то дійсний напрямок \bar{R}_{12} є протилежним зазначеному.

2). Після визначення модуля і напрямку реакції \bar{R}_{12} , можна переходити до визначення реакції \bar{R}_{03} .

Для цього запишемо геометричну умову рівноваги сил, що прикладені до групи 2-3:

$$\sum_{2,3} \bar{F}_k = \bar{R}_{12} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{i3} + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{03} = 0. \quad (4.18)$$

Враховуючи, що в рівнянні (4.18) тільки одна невідома – реакція \bar{R}_{03} , то розкласти її на нормальну і тангенціальну складові як в обертальній кінематичній парі немає необхідності.

Обираємо масштабний коефіцієнт сил μ_F і будуємо план сил за векторним рівнянням (4.18). Із довільної точки "p" відкладаємо вектор \overline{pa} , що зображає в масштабі μ_F реакцію \bar{R}_{12} (рис. 4.13,в). Потім послідовно відкладаємо вектори \overline{ab} , \overline{bc} і \overline{cd} , які зображають у масштабі μ_F сили \bar{G}_3 , \bar{F}_{i3} і \bar{R}_{43} .

Кінець останнього вектора, точку "d", з'єднуємо з точкою "p" вектором \overline{dp} . Вектор \overline{dp} є замикаючою стороною векторного многокутника $pacbd$ і визначає напрям реакції \bar{R}_{03} , а довжина цього вектора в масштабі μ_F визначає модуль реакції \bar{R}_{03} :

$$R_{03} = (dp) \cdot \mu_F.$$

Силловий аналіз груп Ассура II класу 4 і 5 видів виконується подібним чином. Невідомі реакції і рівняння рівноваги для цих груп приведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Вид групи	Схема групи (показані тільки невідомі реакції)	Рівняння	Визначити
4		$\sum_5 m_D(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum_{4,5} \bar{F}_k = 0.$	M_{05} $\bar{R}_{34}, \bar{R}_{05}$
5		$\sum_{4,5} m_D(\bar{F}_k) = 0;$ $\sum_5 \bar{F}_k = 0;$ $\sum_4 \bar{F}_k = 0.$	M_{05} $\bar{R}_{45}, \bar{R}_{05}$ \bar{R}_{34}

4.10. Силловий аналіз початкової ланки (механізму I класу)

Прийнята при аналізі механізму початкова ланка (механізм I класу) найчастіше обертається, тобто є кривошипом. У результаті виконаного силлового аналізу приєднаної до початкової ланки групи Ассура, визначена реакція в кінематичній парі, якою ця група приєднується до початкової ланки. Так, наприклад, для механізму зображеного на рис. 4.11 реакція \bar{R}_{12} в кінематичній парі A, якою група 2-3 приєднується до початкової ланки 1, визначена при силловому аналізі цієї групи (рис. 4.13,а).

Таким чином, на початкову ланку 1 діють (рис. 4.14,а):

- реакція \bar{R}_{21} в точці A з боку ланки 2 на ланку 1, яка рівна за величиною, але протилежна за напрямом \bar{R}_{12} ;
- реакція \bar{R}_{01} в кінематичній парі O від дії стійки на ланку 1, величина і напрям цієї реакції невідомі.

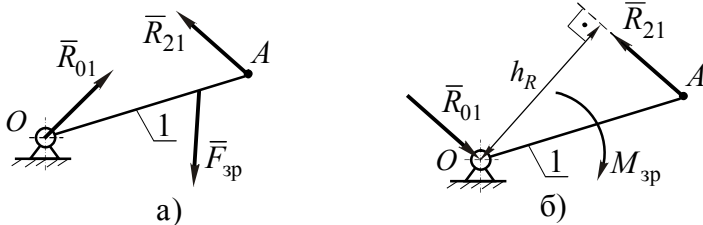


Рис. 4.14.

Під дією цих сил початкова ланка, в загальному випадку, не буде знаходитися в рівновазі. Щоб була рівновага ланки 1, необхідно додатково до неї прикласти силу $\bar{F}_{зп}$ (рис. 4.14,а), або пару сил з моментом $M_{зп}$ (рис. 4.14,б), яка буде зрівноважувати дію \bar{R}_{21} і \bar{R}_{01} .

Сила $\bar{F}_{зп}$ (момент $M_{зп}$) носить назву **зрівноважувальної сили (зрівноважувального моменту)**.

Розглянемо, які ж сили і моменти в машинах будуть такими, що будуть урівноважувати початкову ланку.

Момент, що урівноважує, на валу кривошипа робочої машини створюється двигуном (енергетичною машиною), який надає рух даній машині. У свою чергу момент, що урівноважує, на валу двигуна (енергетичної

машини) створюється робочою машиною, рух якої вона викликає.

Якщо вал 2 кривошипу 1 робочої машини (двигуна) з'єднаний з головним валом двигуна (робочої машини) 3 за допомогою муфти 4 (рис.4.15,а), то до кривошипу 1 буде прикладений невідомий зрівноважувальний момент $M_{зр}$ і розрахункова схема початкової ланки буде мати вид, показаний на рис.4.14,б.

У випадку коли між валом 3 і валом 2 кривошипу 1 встановлений зубчастий механізм 4 (рис.4.15,б), то до зубчатого колеса z_1 , насадженого на вал кривошипа, буде прикладена невідома за модулем зрівноважувальна $\bar{F}_{1зр}$ сила, як показано на рис.4.16,а.

Лінія дії сили $\bar{F}_{1зр}$ визначається геометрією зубчатої передачі – ділильним радіусом r зубчатого колеса и кутом зачеплення α_w . (Питання про зусилля в зубчатому зачепленні більш детально буде розглянуте в розділі 5).

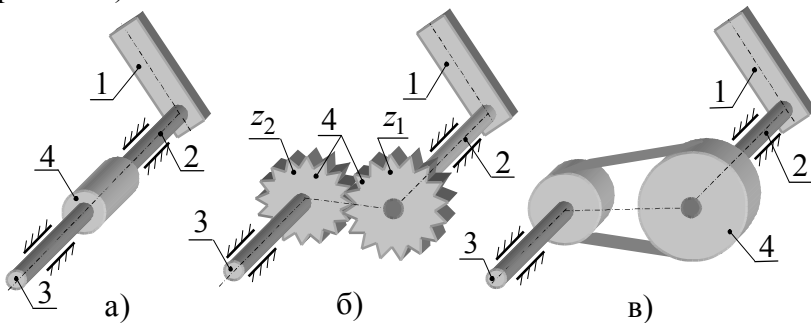


Рис. 4.15.

У випадку пасової передачі (рис. 4.15,в) на шків 4, що насаджений на вал 2 кривошипу 1, діють дві невідомі за модулем сили $\bar{F}_{1зр}$ и $\bar{F}_{2зр}$ (рис.4.16,б), які

створюються натягом віток паса. Лінії дії цих сил визначаються положенням ведучої та веденої віток паса передачі, а величини цих сил пов'язані між собою формулою Ейлера [1].

Таким чином, лінія дії зрівноважувальної сили повністю визначається конструкцією передаточного механізму від двигуна до робочої машини.

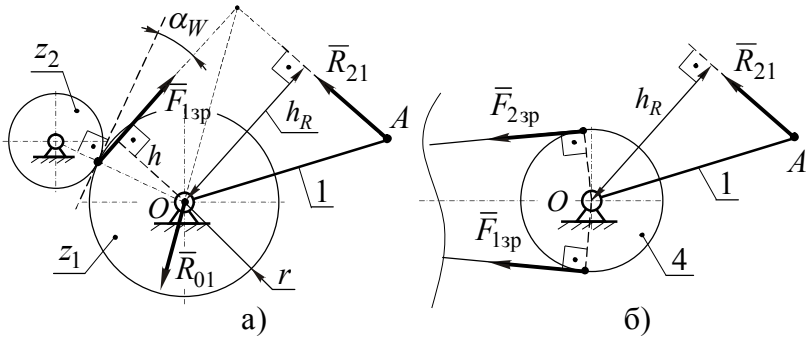


Рис. 4.16.

Розглянемо випадок коли ведучий і ведений вали з'єднані між собою за допомогою муфти (рис.4.15,а).

Запишемо рівняння рівноваги моментів сил, що діють на ланку 1, відносно точки O (рис.4.14,б):

$$\sum_1 M_O(F_k) = R_{21} \cdot h_R \cdot \mu_l - M_{зп} = 0.$$

З цього рівняння отримаємо величину зрівноважувального моменту:

$$M_y = R_{21} \cdot h_R \cdot \mu_l,$$

де μ_l – масштабний коефіцієнт схеми початкової ланки;

h_R – плече реакції \bar{R}_{21} відносно точки O .

Складемо геометричну умову рівноваги сил, що діють на ланку 1:

$$\sum_1 \bar{F}_k = \bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{01} = -\bar{R}_{21}.$$

Таким чином, при з'єднанні ведучого і веденого валів за допомогою муфти реакція \bar{R}_{01} в кінематичній парі O рівна за модулем \bar{R}_{21} , але протилежна їй за напрямом.

У випадку зубчатого передаточного механізму (розрахункова схема зображена на рис.4.16,а) величину зрівноважувальної сили $\bar{F}_{1зр}$ можна знайти з рівняння рівноваги моментів сил, що діють на початкову ланку, відносно точки O :

$$\begin{aligned} \sum_1 M_O(F_k) &= R_{21} \cdot h_R \cdot \mu_l - F_{1зр} \cdot h = 0; \\ F_{1зр} &= \frac{R_{21} \cdot h_R \cdot \mu_l}{h} = \frac{R_{21} \cdot h_R \cdot \mu_l}{r \cdot \cos \alpha_W}, \end{aligned}$$

де $h = r \cdot \cos \alpha_W$.

Величина і напрям реакції \bar{R}_{01} визначається із геометричної умови рівноваги сил, що діють на ланку 1:

$$\sum_1 \bar{F}_k = \bar{F}_{1зр} + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} = 0. \quad (4.19)$$

У векторному рівнянні (4.19) одна невідома сила – реакція \bar{R}_{01} . Розв'язується рівняння побудовою плану сил, подібно рівнянню (4.18).

У тому випадку, коли конструкція передаточного механізму невідома, зрівноважувальну силу $\bar{F}_{зр}$ прикладають в точці A перпендикулярно до кривошипу OA (рис. 4.17,а).

Для визначення зрівноважувальної сили $\bar{F}_{зр}$ і реакції \bar{R}_{01} в цьому випадку скористаємося відомою з теоретичної механіки теоремою про рівновагу тіла під дією трьох сил, які лежать в одній площині. Згідно цій теоремі, при рівновазі тіла під дією трьох сил, лінії дії цих сил перетинаються в одній точці. Враховуючи, що сили \bar{R}_{21} і $\bar{F}_{зр}$ прикладені в точці A , то лінія дії реакції \bar{R}_{01} теж повинна пройти через цю точку, тобто лінія дії реакції \bar{R}_{01} проходить по осі кривошипу OA .

Запишемо векторне рівняння рівноваги трьох сил, що діють на ланку 1:

$$\sum_1 \bar{F}_k = \bar{F}_y + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} = 0. \quad (4.20)$$

Розв'язуємо рівняння (4.20) шляхом побудови плану сил. Для цього із точки " p " (рис. 4.17,б) відкладаємо в попередньо вибраному масштабі μ_F силу \bar{R}_{21} у вигляді вектора \overline{pa} .

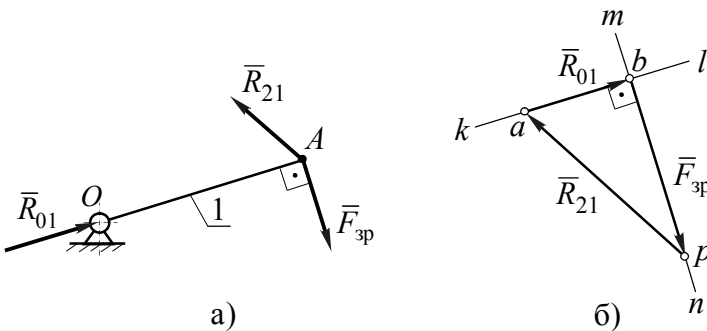


Рис. 4.17.

Потім, через точку " p " проводимо лінію mn (перпендикулярно до OA), вздовж якої буде спрямована

зрівноважувальна сила $\bar{F}_{зр}$, а через точку "a" лінію kl (паралельну OA), вздовж якої буде спрямована реакція \bar{R}_{01} . Перетин цих ліній в точці "b" визначає величину і напрям зрівноважувальної сили $\bar{F}_{зр}$ та реакції \bar{R}_{01} .

Із плану сил визначаємо:

$$F_{зр} = (bp) \cdot \mu_F; \quad R_{01} = (ab) \cdot \mu_F.$$

Зрівноважувальний момент, який буде створений на валі ланки 1 передаточним механізмом дорівнює:

$$M_{зр} = F_{зр} \cdot l_{OA},$$

де l_{OA} – довжина кривошипу.

В силовому аналізі початкової ланки приймалося, що масою кривошипу можна знехтувати, тобто $G_1 = 0$ і $F_{i1} = 0$.

4.11. Важіль М.Е. Жуковського

Раніш відмічалось, якщо при проведенні силового аналізу необхідно визначити тільки величину зрівноважувальної сили без знаходження реакцій в кінематичних парах, то для її визначення можна скористатися важелем Жуковського.

При визначенні зрівноважувальної сили за допомогою важеля Жуковського бажано дотримуватися наступної послідовності:

- зобразити механізм у заданому положенні та визначити всі зовнішні сили і моменти та сили інерції і моменти від сил інерції, що діють на його ланки;
- побудувати в довільному масштабі план швидкостей механізму і за правилом подібності знайти точки прикладення визначених сил;

- повернути план швидкостей навколо полюса (точки "p") на 90° в будь який бік;
- в однойменних точках повернутого плану швидкостей прикласти, зберігаючи їх напрям, сили, що діють на ланки механізму;
- якщо до ланки механізму прикладений **момент**, то перед перенесенням його необхідно представити у вигляді **пари сил**, яку прикласти в характерних точках ланки (як правило в кінематичних парах) і перенести отриману пару сил у відповідні точки повернутого плану швидкостей;
- обрати точку прикладення і прикласти до повернутого плану швидкостей зрівноважувальну $\bar{F}_{зр}^ж$ силу (як правило, обирають точку, в якій початкова ланка приєднується до подальшої схеми механізму);
- розглядаючи повернутий план швидкостей як жорсткий важіль з точкою опори в полюсі (точці "p"), скласти рівняння рівноваги моментів сил цього важеля і знайти величину зрівноважувальної $\bar{F}_{зр}^ж$ сили.

Розглянемо знаходження зрівноважувальної сили за допомогою важеля Жуковського на прикладі кривошипно – шатунного механізму. Нехай на ланки цього механізму (рис.4.18,а) діє система зовнішніх сил:

- сили тяжіння ланок 2 і 3 – \bar{G}_2 і \bar{G}_3 ;
- сили інерції ланок 2 і 3 – \bar{F}_{i2} і \bar{F}_{i3} ;
- момент від сил інерції ланки 2 – M_{i2} ;
- сила виробничого опору – $\bar{F}_{в.о.}$.

У загальному випадку під дією цих сил механізм як система, що володіє однією ступінню рухливості, не знаходиться в рівновазі. Для переведення механізму в урівноважений стан треба в будь якій рухомій точці механізму прикласти силу, що його врівноважує.

В якості такої точки оберемо точку A початкової ланки і задамося напрямком дії сили $\vec{F}_{зр}^{ж}$ (перпендикулярно до осі кривошипа OA).

План швидкостей механізму (рис.4.18,б) повертаємо на 90° в напрямку обертання початкової ланки 1 (рис. 4.18,г). Масштаб побудови поверненого плану швидкостей довільний.

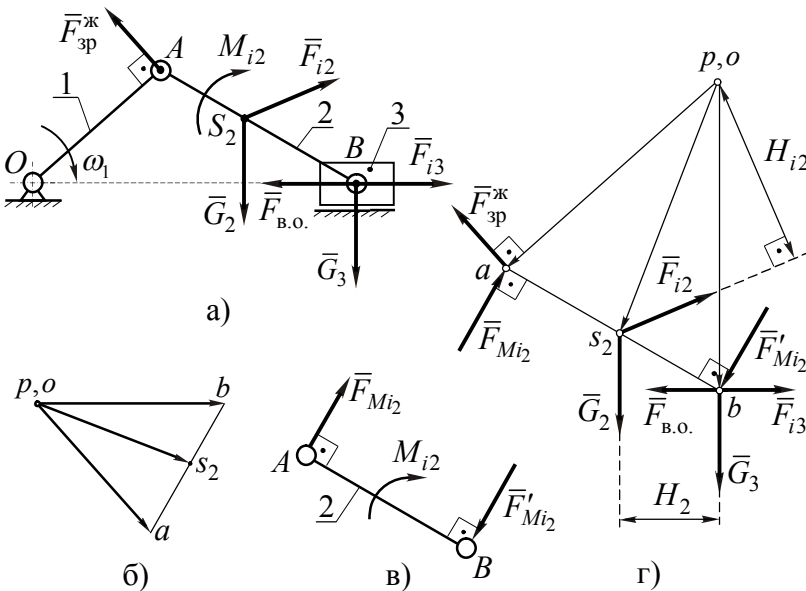


Рис. 4.18.

В однойменні точки поверненого плану швидкостей (рис. 4.18,г) переносимо, зберігаючи напрямок, усі сили,

що діють на ланки механізму, у тому числі і силу $\bar{F}_{зр}^{ж}$, що урівноважує.

Момент від сил інерції M_{i2} представимо як пару сил $\bar{F}_{M_{i2}}$ і $\bar{F}'_{M_{i2}}$, складові якої прикладаємо в точках A і B ланки 2, перпендикулярно до AB (рис.4.18,в). Величину цих складових визначаємо із рівняння:

$$F'_{M_{i2}} = F_{M_{i2}} = M_{i2}/l_{AB},$$

де l_{AB} – довжина ланки AB .

Кожну складову пари $\bar{F}_{M_{i2}}$ і $\bar{F}'_{M_{i2}}$ переносимо в однойменні точки плану швидкостей без зміни їх напрямків.

Потрібно відзначити, що напрямок моменту пари сил на важелі Жуковського може не збігатися з напрямком того ж моменту на плані механізму.

Складаємо рівняння рівноваги моментів відносно полюса p всіх перенесених сил на важелі Жуковського:

$$\sum M_p(\bar{F}_k) = G_2 \cdot H_2 + F_{i2} \cdot H_{i2} + F_{i3} \cdot (pb) - \\ - F_{в.о.} \cdot (pb) - F_{M_{i2}} \cdot (ab) - F_{зр}^{ж} \cdot (pa) = 0. (4.21)$$

В рівнянні (4.21): H_2 і H_{i2} – відповідно плечі сил \bar{G}_2 і \bar{F}_{i2} ; (pb) – плече сил \bar{F}_{i3} і $\bar{F}_{в.о.}$; (pa) – плече сили $\bar{F}_{зр}^{ж}$; (ab) – плече пари сил $F_{M_{i2}}$ і $\bar{F}'_{M_{i2}}$ (рис.4.18,г).

Із рівняння (4.21) визначаємо величину зрівноважувальної $\bar{F}_{зр}^{ж}$ сили:

$$F_{зр}^{ж} = \frac{1}{(pa)} [G_2 \cdot H_2 + F_{i2} \cdot H_{i2} + F_{i3} \cdot (pb) - \\ - F_{в.о.} \cdot (pb) - F_{M_{i2}} \cdot (ab)].$$

Якщо величина сили, що урівноважує, виявиться додатною, то напрямок сили $\vec{F}_{зр}^ж$ був обраний правильно. При від'ємному значенні – напрямок $\vec{F}_{зр}^ж$ необхідно змінити в протилежний бік.

Контрольні питання до теми 4

1. У чому полягають основні задачі силового аналізу?
2. Методи силового аналізу механізмів.
3. Сформулюйте принцип Даламбера.
4. Як визначаються сили інерції ланок механізму за величиною і за напрямком у випадках плоского руху ланки, обертального і поступального?
5. Що можна сказати про точку прикладення і напрямок реакції в обертальній і поступальній кінематичних парах V класу?
6. Як представляють реакції в обертальній і поступальній кінематичних парах при силовому аналізі механізму?
7. Що відомо про реакцію в кінематичній парі IV класу?
8. Які умови статичної визначності кінематичного ланцюга?
9. Який порядок силового аналізу для груп Ассура, внутрішня кінематична пара яких є обертальною?
10. Який порядок силового аналізу для груп Ассура, внутрішня кінематична пара яких є поступальною?
11. Що називається планом сил?
12. Які особливості силового аналізу початкової ланки?
13. Яка сила називається зрівноважувальною?
14. Що таке важіль Жуковського?
15. Як перенести момент від сил інерції на важіль Жуковського?

ЛЕКЦІЯ 10

ЗМІСТ

5. **Зубчасті механізми.**
- 5.1. Прості зубчасті механізми.
- 5.2. Класифікація простих зубчастих механізмів.
- 5.3. Геометричні елементи зубчастого колеса.
- 5.4. Евольвента круга та її властивості.
- 5.5. Елементи евольвентного зачеплення.
- 5.6. Якісні показники зубчастого зачеплення.

5.1. Прості зубчасті механізми

В техніці часто доводиться передавати обертання від одного вала до другого. Це можна зробити за допомогою пасової, ланцюгової або зубчастої передачі. Синтез пасових і ланцюгових передач вивчається в курсі деталей машин, а в даному розділі будуть розглянуті деякі питання синтезу зубчастих передач.

Зубчастою передачею (простим зубчастим механізмом) називають механізм, що складається із трьох ланок (два зубчастих колеса і стійка), в якому передача руху відбувається за допомогою механічного зачеплення зубців вхідного колеса з зубцями вихідного колеса. Обидва зубчастих колеса (рис.5.1,а) мають виступи (зубці) и впадини такої форми, що зубці одного колеса входять у впадини другого, утворюючи при цьому вищу кінематичну пару.

Зубчастим колесом називається ланка з замкнутою системою зубців, що забезпечує за свій повний оберт безперервність руху парної ланки в одному напрямку. Зубчасте колесо передачі з меншим числом зубців називають **шестернею**, а друге – **колесом**. При рівному числі зубців – шестернею називають вхідне колесо.

5.2. Класифікація простих зубчастих механізмів

У залежності від розташування осей валів, між якими відбувається передача обертального руху в просторі, зубчасті передачі поділяються на три типи:

1. Передачі циліндричними зубчастими колесами між паралельними осями.
2. Передачі конічними зубчастими колесами між осями, що перетинаються.
3. Передачі гіперболоїдними зубчастими колесами між осями, що схрещуються.

1. Якщо осі зубчастих коліс паралельні, то зубчастий механізм (рис. 5.1) буде плоским. Найбільш простими і найбільш розповсюдженими зубчастими колесами, що застосовуються в таких механізмах, є **прямозубі** (рис. 5.1,а), зубці яких нарізані паралельно осі колеса. Однак, використовувати такі колеса можна тільки при невеликих колових швидкостях зубців ($v < 3 \div 6 \text{ м/с}$) і середніх навантаженнях. Це пояснюється тим, що зубці в таких передачах входять у зачеплення відразу по всій довжині й у деякі моменти часу в зачепленні знаходиться тільки одна пара зубців.

При великих колових швидкостях зубців ($v > 3 \text{ м/с}$) і великих навантаженнях використовуються **косозубі колеса** (рис. 5.1,б). У таких передачах зубці входять у зачеплення поступово, і в зачепленні увесь час знаходиться декілька пар зубців. У порівнянні з прямозубою передачею косозуба відрізняється високою плавністю ходу і меншим шумом при роботі.

Основним недоліком таких передач (рис. 5.2,б), на відміну від прямозубих (рис. 5.2,а), є те, що зусилля на зубці \bar{F}_n , яке спрямоване перпендикулярно твірній зубця,

розкладається на колову складову \bar{F}_τ , яка обертає зубчасте колесо, і на осьову складову \bar{F}_z , яку змушені сприймати опори валів (підшипники).

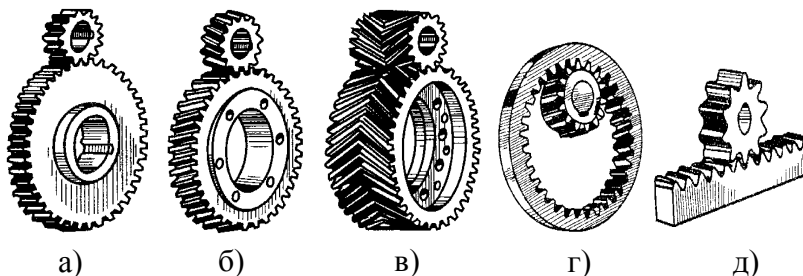


Рис.5.1.

Шевронні зубчасті колеса (рис.5.1,в) поряд із усіма перевагами косозубих коліс, не створюють осьових навантажень на опори валів, тому що осеві сили врівноважуються правою і лівою частиною колеса (рис.5.2,в). Однак виготовлення таких зубчастих коліс складніше і дорожче в порівнянні з косозубими. Тому їх використовують тільки в найбільш відповідальних передачах.

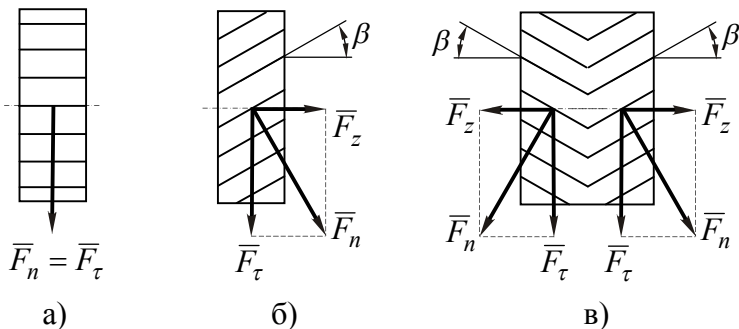


Рис.5.2.

В залежності від взаємного розташування зубчастих коліс циліндричні передачі підрозділяються на передачі

зовнішнього (рис.5.1,а), *внутрішнього* (рис.5.1,г) і *рейкового* зачеплення (рис.5.1,д).

2. Для передачі обертання між валами, осі яких перетинаються, використовуються *конічні зубчасті колеса* (рис.5.3).

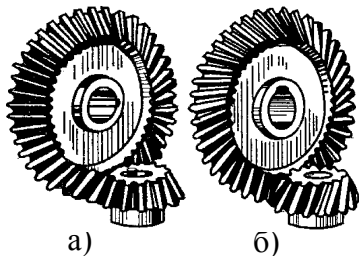


Рис. 5.3.

Осі зубчастих коліс в конічних передачах можуть перетинатися під будь-яким кутом, але частіш за все зустрічаються конічні передачі, у яких осі коліс перетинаються під прямим кутом.

Зубчасті колеса в конічних передачах можуть бути: *радіальними* (прямозубими) (рис.5.3,а), *тангенціальними* (рис.5.3,б) і *криволінійними* (спіральними, евольвентними) зубцями.

В прямозубих конічних колесах зубці нарізані в радіальному напрямі (рис.5.4,а). Використовуються такі передачі для роботи при легких навантаженнях і невисоких швидкостях (звичайно при частоті обертання менш 1000 об/мин). У тангенціальних колесах зубці нарізані за дотичними до деякого кола (рис. 5.4,б)

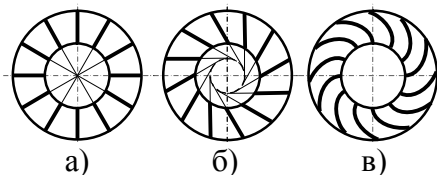


Рис. 5.4.

Для роботи в режимі максимальних навантажень і при великих швидкостях використовуються передачі з криволінійними зубцями (рис.5.4,в).

3. Для передачі обертання між валами, осі яких схрещуються використовуються *гіперболоїдні зубчасті колеса*.

Якщо в основу створення циліндричних і конічних коліс покладені відповідно циліндричні і конічні поверхні, то при створенні гіперболоїдних коліс використовуються поверхні гіперболоїда обертання (рис.5.5).

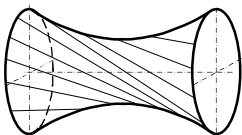


Рис. 5.5.

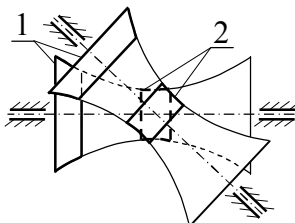
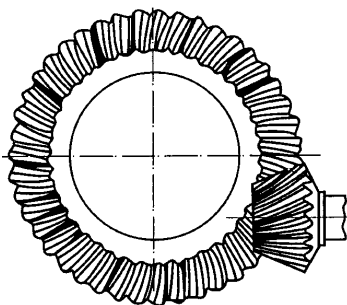
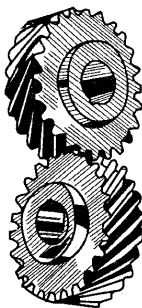


Рис. 5.6.

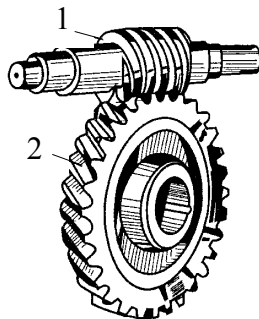
З огляду на те, що такі колеса важко виготовляти, то на практиці використовують найбільш віддалені від горловини 2 частини 1 гіперболоїда обертання (рис.5.6), які наближаються до конічних коліс (*гепіодні передачі*, рис.5.7,а), або частини 2 горловини, які наближаються до циліндричних коліс (*гвинтові передачі*, рис.5.7,б).



а)



б)



в)

Рис. 5.7.

Найбільш розповсюдженою з гіперболоїдних передач є *черв'ячна передача*, у якої кут між осями, що схрещуються, складає 90° (рис.5.7,в). У черв'яка 1 кут нахилу зубця настільки великий, що зубець встигає кілька

разів оповити черв'як, тобто являє собою гвинтову лінію, а для створення зубців черв'ячного колеса 2 використовується поверхня горловини гіперболоїда обертання.

В подальшому будуть вивчатися в основному **циліндричні передачі**.

5.3. Геометричні елементи зубчастого колеса

Розглянемо елементи зубчастого колеса на прикладі прямозубого циліндричного колеса (рис.5.8).

Циліндрична поверхня 3, що відокремлює зубці 2 від тіла 1 зубчастого колеса, називається поверхнею **западин**.

Циліндрична поверхня 4, що обмежує зубці з боку протилежного тілу зубчастого колеса, називається поверхнею **вершин** зубців.

Бокова поверхня зубця 2 складається із **головної** 5 і **перехідної** 6, яку називають **галтеллю**, поверхонь.

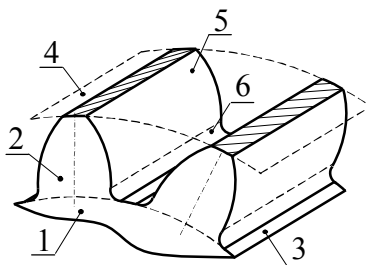


Рис. 5.8.

Головна – це та частина поверхні зубця, яка, взаємодіючи з головною боковою поверхнею другого зубця, забезпечує передачу обертального руху від одного вала до другого. Перехідна – забезпечує спряження головної бокової поверхні 5 з поверхнею западин 3.

Простір між двома сусідніми зубцями називається **впадиною**.

Головна поверхня зубця може бути окреслена будь якою гладкою безперервною кривою (частиною кола, параболою, спіраллю Архімеда і т.д.), але частіш за все використовується **евольвента**. Такі зубчасті колеса та відповідно передачі отримали назву **евольвентних**.

Широке застосування евольвентні передачі отримали в силу ряду переваг:

- забезпечують стале відношення кутових швидкостей зубчастих коліс;
- мають добрі експлуатаційні властивості;
- виготовлення евольвентних зубчастих коліс і інструмента для їх нарізання є найбільш простим.

Враховуючи, що циліндричні передачі є плоскими, то всі параметри зубчастих коліс можна розглядати в перетині перпендикулярному до осі колеса (рис. 5.9).

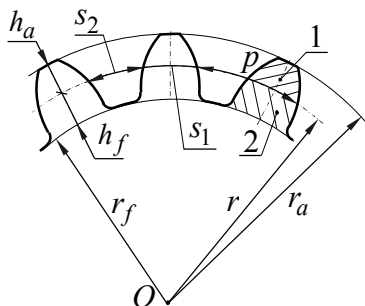


Рис. 5.9.

Тому, замість поверхні западин розглядають коло западин зубців радіуса r_f , замість поверхні вершин – коло вершин зубців радіуса r_a , замість головної і перехідної поверхонь зубця – головний і перехідний профілі зубця.

Розміри зубчастих коліс зручно задавати в частках від деякої лінійної величини, пов'язаної з розміром зубця. **Коловий крок** p (рис. 5.9) для цієї функції не підходить, оскільки є ірраціональним

Коловим кроком називається відстань по дузі кола між двома однойменними точками двох сусідніх зубців.

Дійсно, коловий крок колеса з числом зубців z на колі радіуса r буде дорівнювати:

$$p = 2 \cdot \pi \cdot r / z.$$

Як видно, в формулу визначення колового крока входить трансцендентне число π , а це утруднить підбір

розмірів зубчастих коліс при їх проектуванні та практичному вимірюванні. Тому для визначення основних розмірів зубчастих коліс як основну одиницю прийняте відношення колового кроку p до числа π , якому дали назву *модуля зачеплення*. Модуль зачеплення вимірюється в міліметрах і позначається буквою m :

$$m = p/\pi = 2 \cdot r/z. \quad (5.1)$$

Зубці коліс нарізаються на спеціальних верстатах різальним інструментом, розміри і форма якого залежить від величини модуля. Щоб не мати на машинобудівних заводах, що виготовляють зубчасті колеса, великих комплектів різальних інструментів і забезпечити взаємозамінність коліс під час експлуатації, установлений стандартний ряд модулів, до значень якого повинні округляться модулі, отримані при розрахунку.

Модуль зачеплення є змінним по висоті зубця. Коло зубчастого колеса радіуса r , на якому модуль відповідає стандарту, називається *ділильним*:

$$r = m \cdot z/2. \quad (5.2)$$

Ділильне коло можна визначити і як *коло, яке є базовим для визначення розмірів зубців*.

Крок зубчастого колеса на ділильному колі дорівнює:

$$p = m \cdot \pi.$$

Кожен зубець окреслений двома симетрично розташованими профілями. Відстань між цими профілями, виміряна на будь якому колі, називається *товщиною зубця*. Товщина зубця на ділильному колі позначається через s_1 (рис. 5.9). Якщо товщина зубця на ділильному колі дорівнює ширині западини s_2 ($s_1 = s_2$), то зубчасте колесо називають *нульовим*.

Ділильне коло (рис. 5.9) поділяє зубець на дві частини – *голівку* 1 і *ніжку* 2. **Висота голівки** зубця позначається через h_a , а **висота ніжки** – через h_f . Для нульового колеса:

$$\begin{aligned}h_a &= m ; \\h_f &= 1,25m .\end{aligned}$$

Більший розмір ніжки зуба в порівнянні з голівкою забезпечує в зачепленні зазор між поверхнею вершин першого колеса і поверхнею западин другого.

Тоді товщина зубця s_1 на ділильному колі, а також радіуси кіл западин r_f і вершин r_a зубців для нульового колеса будуть відповідно дорівнювати:

$$\begin{aligned}s_1 &= p/2 = m \cdot z/2; \\r_f &= r - 1,25m; \\r_a &= r + m.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Визначення геометричних розмірів зубчастих коліс, у яких товщина зубця s_1 на ділильному колі не дорівнює ширині западини s_2 ($s_1 \neq s_2$) буде розглянуто пізніше.

5.4. Евольвента круга та її властивості

Як указувалося раніше, головна поверхня зубця є евольвентною. Зупинимося на питанні про те, що собою являє евольвента круга і якими важливими властивостями для зачеплення вона володіє.

Евольвентою круга називається траєкторія будь якої точки, наприклад A (рис. 5.10), прямої лінії $n4'$, яка без ковзання котиться по колу радіуса r_b . Коло радіуса r_b називається **основним колом**, а пряма $n4'$ – **твірною прямою**.

Побудова евольвенти здійснюється в наступному порядку.

Нехай задане коло радіуса r_b з центром у точці O (рис. 5.10).

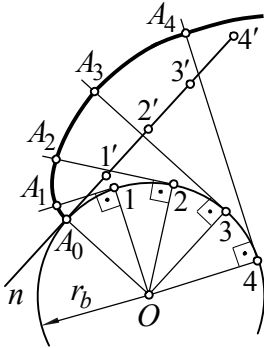


Рис. 5.10.

Проведемо до кола дотичну $n4'$ в точці A_0 і будемо цю пряму без ковзання котити по колу. Для цього ділимо відрізок A_04' на рівні частини (наприклад, на чотири як на рис. 5.10), а на основному колі відкладаємо дуги, рівні відповідним частинам відрізка A_04' : $\cup_{A_01} = \overline{A_01'}$, $\cup_{12} = \overline{1'2'}$, $\cup_{23} = \overline{2'3'}$ і т.д. (при малих центральних кутах дуги можна замінити хордами).

Через отримані на основному колі точки проводимо до нього дотичні (перпендикуляри до радіусів $O1$, $O2$, $O3$, $O4$). Тоді при коченні прямої $n4'$ без ковзання по колу радіуса r_b точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ прямої будуть послідовно співпадати з точками 1, 2, 3, 4 кола. При цьому точка A твірної прямої $n4'$ буде займати відповідно положення A_1 ($\overline{A_11} = \overline{A_01'}$), A_2 ($\overline{A_22} = \overline{A_02'}$), A_3 ($\overline{A_33} = \overline{A_03'}$) і т.д.

Накреслена точкою A крива $A_0 - A_4$ називається **евольвентою кола**.

Евольвента має дві вітки, одна вітка буде накреслена, якщо твірну пряму перекочувати за ходом годинникової стрілки, а друга – якщо проти ходу годинникової стрілки.

Використання евольвенти при проектуванні профілів зубчастих коліс пояснюється сукупністю важливих особливостей.

Відзначимо основні:

- у евольвенти не має точок всередині основного кола;
- нормаль в будь якій точці евольвенти спрямована за дотичною до основного кола;
- центр кривизни евольвенти лежить в точці дотику нормалі до основного кола;
- евольвента є кривою без перегинів, що важливо при виготовленні інструмента, який нарізає зубчасте колесо;
- якщо радіус основного кола спрямувати до нескінченності то і радіус кривизни евольвенти також буде прагнути до нескінченності, тобто евольвента буде вироджуватися в пряму лінію.

5.5. Елементи евольвентного зачеплення.

1. Теоретична лінія зачеплення. Допустимо, що в даний момент часу контакт між зубцями двох коліс має місце в точці A (рис.5.11). Якщо повернути колесо 1 за ходом годинникової стрілки, то колесо 2 повернеться проти ходу годинникової стрілки. Зубці обох коліс пересунуться, і їх контакт відбудеться в новій точці A_1 .

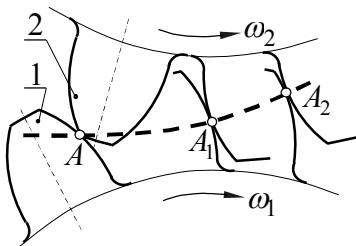


Рис. 5.11.

При наступному повороті колеса 1 контакт між зубцями відбудеться в точці A_2 і т.д. Якщо об'єднати точки A , A_1 , A_2 і т.д. плавною кривою, то вийде деяка лінія, яку називають **лінією зачеплення**.

Таким чином, *лінією зачеплення* називається геометричне місце точок дотикання зубців двох коліс на нерухомій площині.

Визначимо вид лінії зачеплення у випадку, якщо головні поверхні зубців окреслені евольвентами. На рис.5.12 точки O_1 і O_2 – центри обертання зубчастих коліс. Радіусами r_{b1} і r_{b2} проведемо основні кола цих коліс і загальну дотичну KN до них (точки дотику A і B).

Розглянемо, чим характерна ця лінія. Якщо відрізок Kp (точка "p" – точка перетину ліній KN і O_1O_2) перекотити по основному колу першого колеса, то точка "p" накреслить евольвенту ε_1 зубця першого колеса. Якщо ж відрізок Np перекотити по основному колу другого колеса, то точка "p" накреслить евольвенту ε_2 зубця другого колеса, а точка контакту між евольвентами ε_1 і ε_2 знаходиться в точці "p".

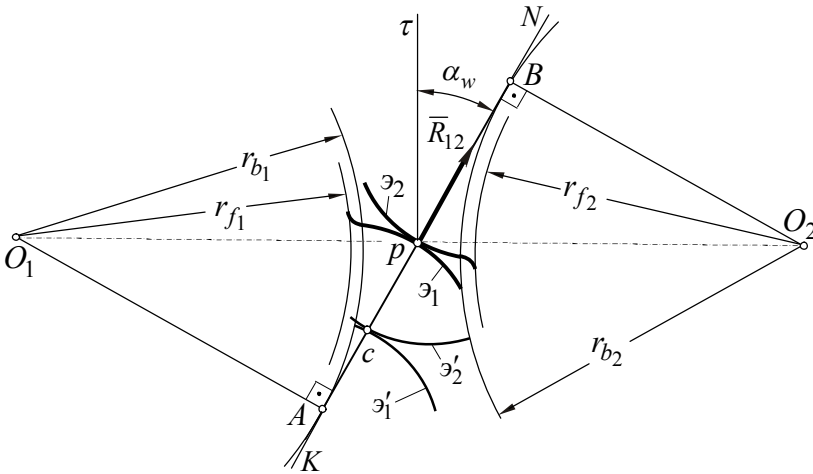


Рис. 5.12.

Аналогічно, для довільної точки "с" дотичної KN , перекотивши Kc по основному колу першого колеса, отримаємо евольвенту ε_1' зубця першого колеса, а перекотивши Nc по основному колу другого колеса, отримаємо евольвенту ε_2' зубця другого колеса. Точка контакту цих евольвент буде збігатися з точкою "с".

Звідси можна зробити висновок про те, що *точка контакту евольвентних поверхонь зубців при обертанні зубчастих коліс увесь час знаходиться на лінії KN* .

Лінія AB , уздовж якої можливий контакт між зубцями зубчастих коліс, що знаходяться в зачепленні, називається **теоретичною лінією зачеплення**. Точка "р" перетину теоретичної лінії зачеплення AB з **лінією центрів** O_1O_2 називається **полюсом зачеплення**.

2. Практична лінія зачеплення. Проведемо радіусами r_{a1} і r_{a2} (рис.5.13) кола вершин зубців першого і другого колеса.

Точка "а" (точка перетину кола вершин зубців другого колеса з лінією теоретичного зачеплення AB) є **точкою входу зубців в зачеплення**. Точка "b" (точка перетину кола вершин зубців першого колеса з лінією теоретичного зачеплення AB) є **точкою виходу зубців із зачеплення**. На ділянках Aa і bB лінії теоретичного зачеплення контакт між зубцями коліс неможливий, оскільки в силу обмежень на висоту зубця відсутня евольвента одного із зубців. Лінія ab , на якій відбувається контакт між зубцями, називається **практичною лінією зачеплення**.

Для показаної на рис. 5.13 лінії зачеплення обертання першого зубчастого колеса відбувається проти ходу годинникової стрілки, а другого – за ходом. У випадку зміни напрямків обертання зубчастих коліс, лінія

зачеплення проходить за загальною дотичною до основних кіл, для якої кут α_w (рис. 5.12) буде відраховуватися вліво.

Відповідно до основної теореми зачеплення [1, стор. 416] *нормаль до поверхонь у точці дотику елементів вищої кінематичної пари кочення і ковзання поділяє лінію центрів на частини, обернено пропорційно кутовим.*

У евольвентному зачепленні нормаль у точці дотику зубців, яка спрямована за дотичною до основного кола (друга особливість евольвенти), буде збігатися з лінією зачеплення, і перетне лінію центрів O_1O_2 у полюсі p зачеплення (рис 5.13).

Враховуючи, що при обертанні зубчастих кіл точка "p" не змінює свого положення на лінії центрів, то евольвентне зачеплення забезпечує *стале передаточне відношення $U_{1,2}$ (відношення куткових швидкостей кіл):*

$$U_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2p}{O_1p} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (5.4)$$

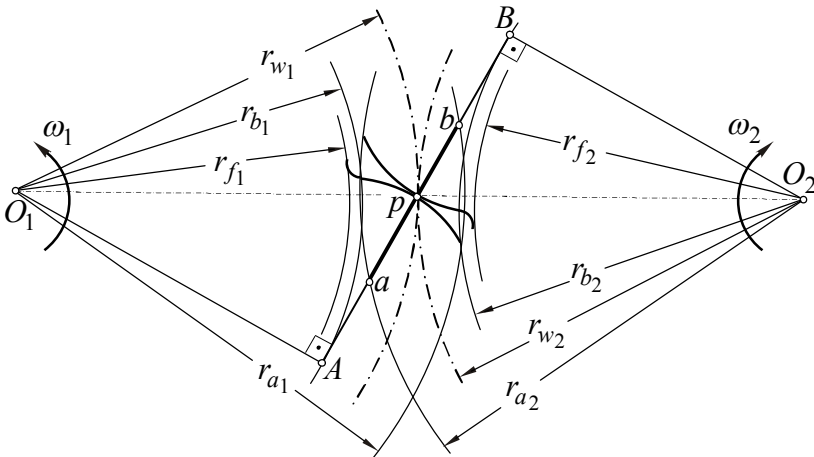


Рис. 5.13.

Кола радіусом r_{w_1} і r_{w_2} , які проходять через полюс зачеплення p (рис.5.13), називаються **початковими**.

Початкові кола можна уявити як два кола в зубчастому зачепленні, які без ковзання котяться одне по другому. Враховуючи це, на початкових колах крок одного зубчастого колеса дорівнює кроку другого. Якщо зубчасті колеса передачі нульові, то початкові кола збігаються з ділильними ($r_{w_1} = r_1$, $r_{w_2} = r_2$).

3. Кут зачеплення. Лінія зачеплення AB відносно перпендикуляра $p\tau$ до лінії центрів O_1O_2 (рис.5.12) відхилена на кут α_w , який називається **кутом зачеплення**.

Враховуючи, що нормаль в будь-якій точці до евольвенти спрямована за дотичною до основного кола, тобто уздовж лінії зачеплення, а реакція у вищій кінематичній парі спрямована по нормалі до поверхні (розділ 4.4), то зусилля \bar{R}_{12} від першого зубця на другий буде спрямовано уздовж лінії зачеплення (рис.5.12).

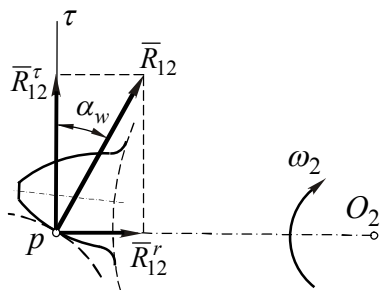


Рис. 5.14.

Зусилля \bar{R}_{12} (рис.5.14) розкладається на дві складові: колову \bar{R}_{12}^r , яка обертає зубчасте колесо, і радіальну \bar{R}_{12}^t , яка сприймається опорами вала (підшипниками). Ці складові відповідно дорівнюють:

$$R_{12}^t = R_{12} \cos \alpha_w ;$$

$$R_{12}^r = R_{12} \sin \alpha_w .$$

4. Дуга зачеплення. Будь який зубець починає зачеплення (дотикається до зубця другого колеса) в той

момент, коли лінія його профілю $\varepsilon_{вх}$ (рис. 5.15) проходить через початок практичної лінії зачеплення (точку "a"). При обертанні колеса точка дотикання зубця буде одночасно рухатися і по практичній лінії зачеплення ab і по профілю зубця. Зубець закінчує зачеплення і перестає дотикатися до зубця другого колеса, коли лінія його профілю $\varepsilon_{вих}$ пройде через точку "b". Евольвента зубця $\varepsilon_{вх}$ в точці входу зубця в зачеплення та евольвента $\varepsilon_{вих}$ в точці виходу зубця із зачеплення відсікає на ділільному колі радіусом r_1 дугу cd , яка називається **дугою зачеплення**.

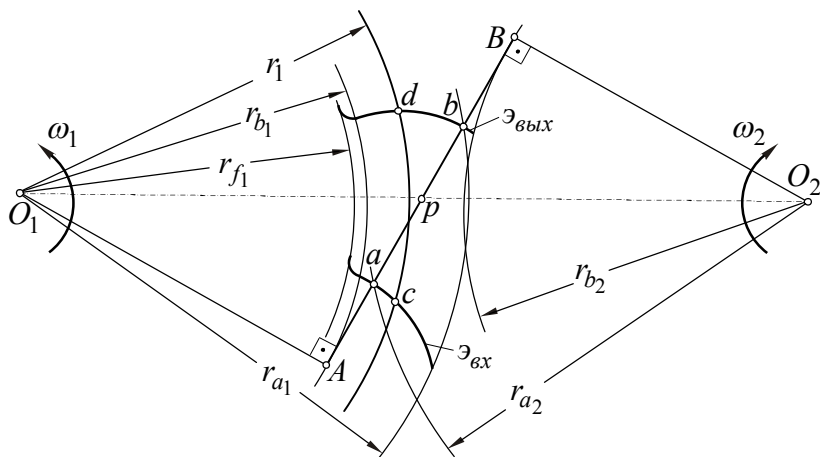


Рис. 5.15.

Якщо дуга зачеплення дорівнює кроку зачеплення на ділільному колі ($\cup cd = p$), то при обертанні колеса тільки одна пара профілів зубців знаходиться одночасно в зачепленні. Якщо дуга зачеплення буде менша кроку ($\cup cd < p$), то в зачепленні відбудеться перерва, і передача буде працювати з ударами при вході в зачеплення кожної нової пари профілів зубців. Якщо, навпаки, дуга зачеплення більша кроку ($\cup cd > p$), то в зачепленні буде знаходитися

завжди одна пара профілів зубців, а в деякі проміжки часу – дві пари.

5.6. Якісні показники зубчастого зачеплення

До якісних показників зубчастого зачеплення відносяться коефіцієнт перекриття і питомі швидкості ковзання зубців.

1. Коефіцієнт перекриття. Якщо перший зубець вийшов із зачеплення в точці b (рис. 5.15), то очевидно, що подальша робота зубчастої передачі можлива тільки за рахунок другого зубця цього колеса, який розташований за першим на відстані кроку p . При цьому необхідно, щоб другий зубець уже ввійшов у зачеплення, тобто пройшов точку a в той момент, коли перший зубець проходить точку b .

Таким чином, при виконанні умови $\cup cd < p$ періодично будуть зустрічатися такі відрізки часу, коли в зачепленні знаходиться одна пара зубців, або дві пари зубців. Можна сказати, що робота однієї пари зубців у цьому випадку *перекриває* роботу іншої.

Відповідно до зазначеного, відношення дуги зачеплення до кроку називається **коефіцієнтом перекриття** і позначається ε :

$$\varepsilon = \frac{\cup cd}{p} = \frac{\cup cd}{m \cdot \pi}. \quad (5.5)$$

У правильно спроектованій передачі коефіцієнт перекриття ε повинний бути більше одиниці. Як правило в прямозубій циліндричній передачі коефіцієнт перекриття виходить у межах:

$$1,05 \leq \varepsilon < 2.$$

Для збільшення коефіцієнта перекриття використовують передачі з косозубими і шевронними колесами (рис. 5.1.б,в).

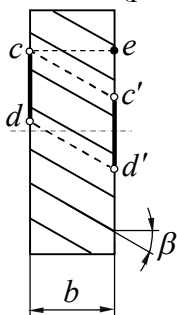


Рис.5.16.

У передачі з косозубими колесами кожен зубець входить у зачеплення не відразу по всій довжині, а поступово. Завдяки нахилу зубця дуга зачеплення cd по ширині колеса зміщується в положення $c'd'$ (рис. 5.16). Загальна довжина дуги зачеплення при цьому збільшується на додаткову величину ec' , яка залежить від ширини колеса b і кута нахилу зубця β :

$$\cup ed' = \cup c'd' + ec' = \cup cd + b \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Коефіцієнт перекриття ε_β для косозубого колеса дорівнює:

$$\varepsilon_\beta = \frac{\cup ed'}{p} = \frac{\cup cd}{p} + \frac{b}{p} \operatorname{tg} \beta = \varepsilon + \frac{b}{m \cdot \pi} \operatorname{tg} \beta, \quad (5.6)$$

де ε – коефіцієнт перекриття прямозубого колеса.

Коефіцієнт перекриття ε можна розглядати як число, що показує, скільки пар зубців у середньому знаходиться в зачепленні. Так, якщо $\varepsilon = 1,6$, то в середньому в зачепленні знаходиться 1,6 пари зубців, а фактично протягом 60% усього часу роботи механізму в зачепленні знаходиться дві пари зубців і протягом 40% усього часу – одна пара зубців

2. Питомі швидкості ковзання зубців.

Розглянемо дві криві I і II (рис. 5.16), які дотикаються одна другій. Позначимо точку дотику на кривій I як A_1 , а на кривій II – як A_2 . Через деякий проміжок часу ці криві будуть дотикатися в точках, наприклад B_1 і B_2 .

При відносному переміщенні кривих одна по другій можливі три випадки:

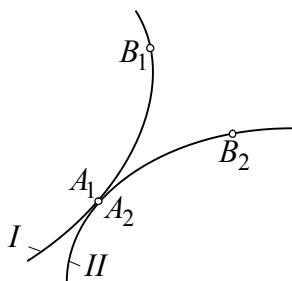


Рис. 5.16.

- дуга A_1B_1 дорівнює дузі A_2B_2 . Такий рух називається *чистим коченням*, тобто криві перекочуються одна по другій без ковзання;
- дуга A_1B_1 не дорівнює дузі A_2B_2 . Такий рух називається *коченням з ковзанням*.
- одна із дуг (A_1B_1 або A_2B_2) дорівнює нулю. Такий рух називається *чистим ковзанням*.

Визначимо швидкість ковзання в евольвентному зачепленні. Припустимо, що контакт між евольвентними профілями має місце в точці C (рис. 5.17). Як було показано вище, точка C буде однієї з точок лінії AB теоретичного зачеплення.

Швидкість \vec{V}_{C_1} точки C_1 , що належить евольвенті ε_1 першого колеса, спрямована убік кутової швидкості ω_1 перпендикулярно O_1C_1 . У свою чергу, швидкість \vec{V}_{C_2} точки C_2 , що належить евольвенті ε_2 другого колеса, буде спрямована перпендикулярно O_2C_2 . Оскільки точки C_1 та C_2 належать різним ланкам і в даний момент часу збігаються, то для швидкостей цих точок можна записати векторне рівняння:

$$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_1} + \vec{V}_{C_2C_1}, \quad (5.7)$$

де $\vec{V}_{C_2C_1}$ – відносна швидкість точки C_2 щодо точки C_1 , спрямована вздовж дотичної $C_1\tau$ до дотичних поверхонь зубців в точці контакту.

Вирішимо рівняння (5.7) графічно шляхом побудови плану швидкостей. За полюс плану швидкостей виберемо точку C_1 (рис. 5.17). Відповідно до правої частини рівняння побудуємо вектор \bar{V}_{C_1} перпендикулярно до O_1C_1 і через його кінець проведемо напрямок $\bar{V}_{C_2C_1}$ (паралельно $C_1\tau$). Згідно лівій частині записаного рівняння, через точку C_1 проведемо напрямок вектора \bar{V}_{C_2} перпендикулярно до O_2C_2 . Точка "c₂" перетину напрямків векторів $\bar{V}_{C_2C_1}$ і \bar{V}_{C_2} буде рішенням рівняння (5.7). Відносна швидкість $\bar{V}_{C_2C_1}$ являє собою швидкість ковзання евольвентних профілів α_1 і α_2 одного по другому в точці C лінії AB теоретичного зачеплення.

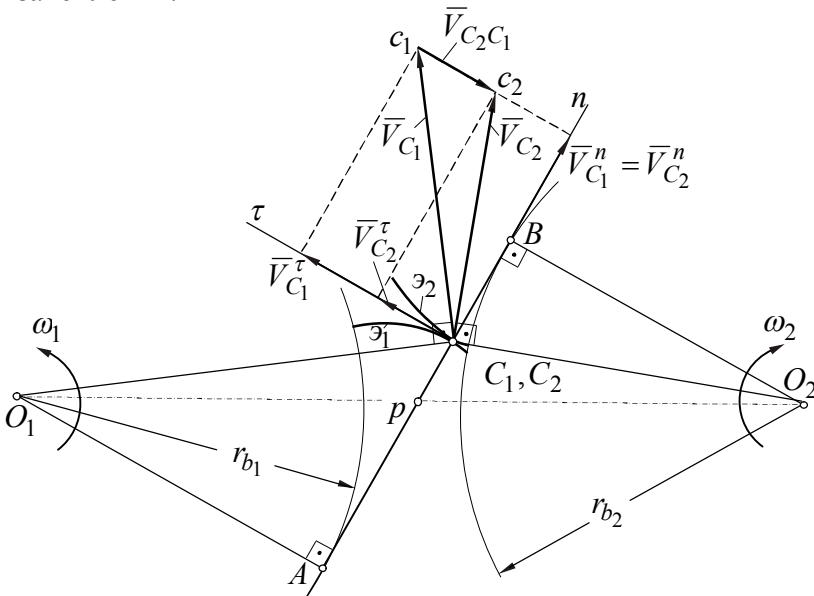


Рис. 5.17.

Необхідно відзначити, що швидкість ковзання буде дорівнювати нулю тільки в полюсі зачеплення p , оскільки

в цій точці швидкості \bar{V}_{C_1} і \bar{V}_{C_2} будуть спрямовані уздовж однієї лінії (перпендикулярно O_1O_2). В усіх інших точках лінії теоретичного зачеплення швидкість $\bar{V}_{C_2C_1}$ ковзання обов'язково буде присутня. Причому, чим більш віддалена розрахункова точка на лінії теоретичного зачеплення від полюса p тим більша буде швидкість ковзання.

Однак, при одній і тій же швидкості ковзання зношуваність у дотичних профілів може бути різною, оскільки на зношуваність профілю впливає не тільки швидкість ковзання, але і швидкість переміщення точки контакту по профілю. За інших рівних умов зношуваність буде більша на тому профілі, по якому точка контакту рухається з меншою швидкістю і буде максимальною у випадку, якщо точка контакту нерухома. Для кількісної оцінки зношуваності поверхні вводиться поняття **питомої швидкості ковзання** λ для довільної точки кожного з дотичних профілів.

Питомою швидкістю ковзання λ_1 для точки C_1 профілю ε_1 називається відношення:

$$\lambda_1 = V_{C_1C_2} / V_{C_1}^{\tau}, \quad (5.8)$$

а питомою швидкістю ковзання λ_2 для точки C_2 профілю ε_2 називається відношення:

$$\lambda_2 = V_{C_2C_1} / V_{C_2}^{\tau}, \quad (5.9)$$

де $V_{C_1}^{\tau}$ і $V_{C_2}^{\tau}$ – відповідно швидкості переміщення точок контакту C_1 і C_2 по профілям ε_1 і ε_2 ;

$V_{C_2C_1}$ – швидкість ковзання точки C_2 відносно точки C_1 , $\bar{V}_{C_2C_1} = -\bar{V}_{C_1C_2}$.

Розкладемо повні швидкості \bar{V}_{C_1} і \bar{V}_{C_2} точок C_1 і C_2 за дотичним $C_1\tau$ і нормальним C_1n до поверхонь дотикання напрямком (рис. 5.17). Дотичні складові $\bar{V}_{C_1}^\tau$ і $\bar{V}_{C_2}^\tau$ являють собою швидкості переміщення точок контакту по профілям ε_1 і ε_2 . Нормальні складові $\bar{V}_{C_1}^n$ і $\bar{V}_{C_2}^n$ між собою повинні бути рівними, інакше або відбудеться розмикання вищої кінематичної пари C (якщо $V_{C_2}^n > V_{C_1}^n$) або вдавлювання одного профілю в другий (якщо $V_{C_2}^n < V_{C_1}^n$).

Визначення питомих швидкостей ковзання за допомогою плану швидкостей є трудомістким, тому для побудови діаграм доцільно використовувати формули [6], у яких коефіцієнти λ_1 і λ_2 виражені через довжину лінії теоретичного зачеплення AB і передатне відношення $U_{1,2} = z_2/z_1$:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{U_{1,2}} - \frac{AB}{x \cdot U_{1,2}}; \quad (5.10)$$

$$\lambda_2 = 1 + U_{1,2} - \frac{AB}{AB - x} U_{1,2}, \quad (5.11)$$

де x – відстань від точки A до розрахункової точки на лінії теоретичного зачеплення AB .

На рис. 5.18 показаний приклад діаграми питомих швидкостей ковзання, яка показує, що в евольвентному зачепленні зношуваність зубців нерівномірна вздовж лінії зачеплення. Характер зміни кривих питомих швидкостей ковзання для шестірні λ_1 і колеса λ_2 уздовж лінії AB теоретичного зачеплення подібний. Найбільшої зношуваності поверхня зубця зазнає на початку лінії ab практичного зачеплення. Ближче до полюса p

зношуваність поверхні зубця зменшується і у самому полюсі припиняється. Далі зношуваність знову збільшується до голівки зубця. На ніжці першого колеса (шестірні) питомі швидкості ковзання λ_1 значно більші, ніж на ніжці другого колеса λ_2 . Це значить, що зношуваність ніжки зубця шестірні при роботі передачі буде більше, ніж зношуваність ніжки зубця колеса. У точці A (початок лінії теоретичного зачеплення) $\lambda_1 = -\infty$ і в точці B (кінець лінії теоретичного зачеплення) $\lambda_2 = -\infty$, тобто якщо лінія ab практичного зачеплення буде чи починатися чи закінчуватися в цих точках, то на відповідних профілях буде чисте ковзання.

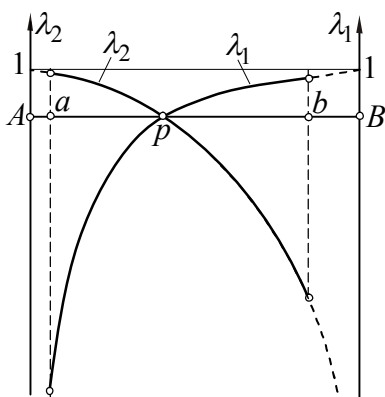


Рис. 5.18.

У полюсі зачеплення p питомі швидкості ковзання дорівнюють нулю, тобто профілі котяться один по другому без ковзання. Однак це не означає, що точка профілю, яка проходить через полюс зачеплення, є самою стійкою. Справа в тім, що швидкість ковзання одного зубця відносно іншого змінює свій напрям саме в цій точці.

Ця зміна напрямку відносного руху, яка повторюється при кожному вході зубця в зачеплення, приводить до постійного змінання матеріалу профілю то в один бік, то в інший. У результаті на профілі зубця біля цієї точки з'являються дрібні тріщини, які, збільшуючись, приводять до викришування матеріалу зубця. Зношуваність поверхонь зубців в результаті їх ковзання одного по другому представляє істотний недолік евольвентного зачеплення.

ЛЕКЦІЯ 11

ЗМІСТ

- 5.7. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс. Інструментальна рейка.
- 5.8. Підрізання профілів зубців.
- 5.9. Зубчасті колеса нарізані зі зміщенням твірного контуру.
- 5.10. Визначення основних геометричних розмірів зубчастої передачі.

5.7. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс. Інструментальна рейка

Зубчасті колеса з евольвентним профілем зубця звичайно нарізаються на спеціальних верстатах двома способами: *методом копіювання* і *методом обкатування (огинаючих)*.

Розглянемо основу цих способів, оскільки питання нарізання зубців тісно пов'язане з теорією їхнього профілювання.

Метод копіювання полягає в тому, що за кресленням профілю зубця зубчастого колеса виготовляється модульна (дискова або пальчикова) фреза. Різальні кромки фрези мають обриси западини між зубцями.

Обертаючись (рис. 5.19), фреза 1 рухається уздовж осі заготовки 2. За кожен хід фрези нарізається одна западина між зубцями. Після нарізання всієї западини фреза повертається у початкове положення. Колесо, що нарізається, повертається на кут між зубцями ($\varphi = 2 \cdot \pi / z$) і процес повторюється.

Основні недоліки даного метода полягають в наступному:

- крайки різального інструмента виконані по евольвенті, тобто при виготовленні криволінійної крайки інструмента неминучі відхилення від дійсного профілю западини;
- для кожного сполучення модуля m і числа зубців z , що нарізаються на колесі, необхідно мати окремий інструмент, оскільки форма западини між зубцями визначається цими параметрами.

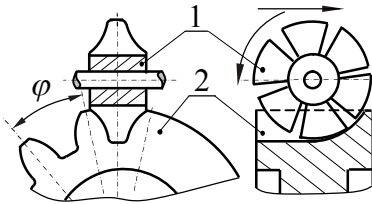


Рис. 5.19.

Враховуючи недоліки метода копіювання, його доцільно використовувати при індивідуальному чи дрібносерійному виробництві зубчастих коліс.

Метод обкатки (огинаючих) полягає в тому, що різальному інструменту і заготовці задається такий відносний рух, який мали б два зубчасті колеса, що знаходяться в правильному зачепленні. У такому випадку різальний інструмент повинний мати форму зубчастого колеса. Оскільки для евольвентної поверхні зубця будь-якого зубчастого колеса можна спроектувати сполучену прямолінійну поверхню, то інструмент для нарізання зубчастого колеса може мати форму рейки (колеса з числом зубців $z = \infty$), який називають **інструментальною рейкою** або **гребінкою**.

При нарізанні зубчастого колеса (рис.5.20) рейка 2 робить зворотно поступальні рухи S_p , під час яких відбувається різання матеріалу заготовки 1. Крім того, у

момент часу, коли рейка знаходиться над заготовкою, заготовці 1 задається кут повороту $\Delta\varphi$, а рейці 2 прямолінійне переміщення ΔS .

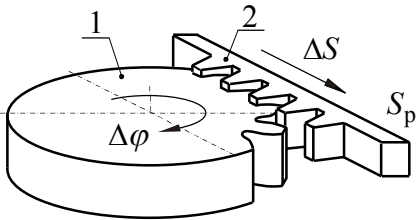


Рис. 5.20.

Співвідношення між кутом $\Delta\varphi$ повороту заготовки і переміщенням рейки ΔS таке, яке було б при зачепленні зубчастого колеса 1, що нарізається, з рейкою 2.

Увесь цей процес здійснюється на спеціальних зуборізних верстатах. Профіль зубця, що нарізається, формується не відразу, а як огинаюча лінія для всіх положень крайки інструмента у формі рейки (гребінки) відносно заготовки (рис. 5.21).

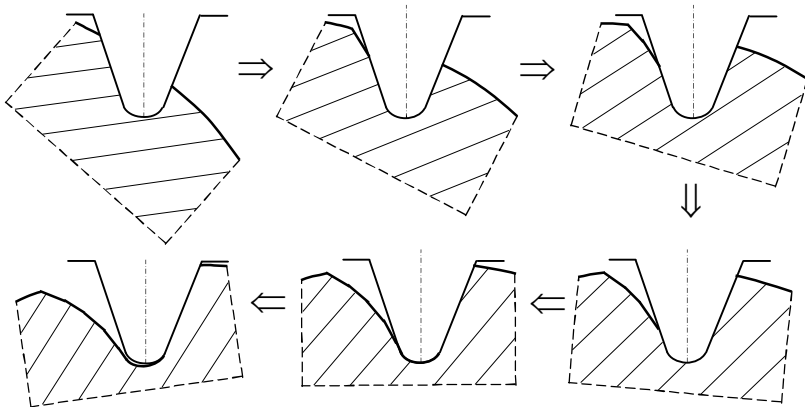


Рис. 5.21.

Гребінка найбільш простий, а тому найбільш точний різальний інструмент рейкового типу. Але число зубців гребінки обмежено, оскільки довгі гребінки важко робити. Тому процес обкатування гребінкою не може бути безупинним. Після того як заготовка перекотиться по всій довжині гребінки, процес зупиняють і гребінку

повертають у початкове положення. Таке періодичне переривання процесу зменшує точність і продуктивність нарізання зубців.

Для того, щоб процес обкатування зробити безупинним, використовують **черв'ячні фрези**. Черв'ячна фреза (мал. 5.22) являє собою гвинт із трапецієподібною нарізкою.

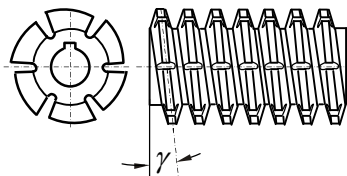


Рис. 5.22.

Профіль трапецієподібною нарізки може бути отриманий шляхом переміщення рейки по гвинтовій лінії з деяким кутом γ підйому. Звичайно кут підйому не перевищує 5° .

Зачеплення фрези 1 з колесом 2 (рис. 5.23), що нарізається, аналогічно зачепленню черв'яка з черв'ячним колесом. Тому кутова швидкість заготовки ω_3 повинна бути такою, щоб за кожен оберт фрези, яка обертається з кутовою швидкістю ω_p , заготовка поверталася на кут, що вміщає один зуб і одну западину. Для нарізання зубця по всій ширині колеса, фрези, крім обертального руху, задають подачу S_p паралельно осі колеса.

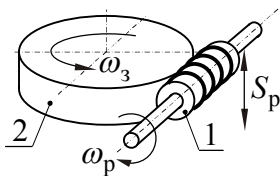


Рис. 5.23.

Фрезу відносно заготовки встановлюють так, щоб зубці фрези були паралельні осі заготовки, тобто вісь фрези з віссю заготовки утворює кут $90^\circ + \gamma$.

Метод обкатування використовується і при виготовленні зубчастих коліс шляхом накатки зубців у холодному (при невеликих модулях $m \leq 2$) чи гарячому стані. Інструменту у виді зубчастого колеса і заготовці

задають на верстаті такі відносні рухи, як начебто вони знаходяться в зачепленні. Інструмент у результаті пластичної деформації матеріалу заготовки формує на ній зубці.

На закінчення необхідно відзначити, що перевагами методу обкатування є велика продуктивність, підвищена точність виготовлення і мала кількість різального інструмента (форма інструмента залежить тільки від модуля m і не залежить від числа зубців, що нарізається на зубчастому колесі).

На підставі багаторічної практики при стандартизації зубчастих коліс і інструменту для їх нарізання, у всіх країнах світу були прийняті параметри зубчастої рейки з прямолінійним контуром (рис.5.24). Це рейковий контур із зубцями трапецієподібної форми. Перехід від профілю зубця до лінії западин окреслений дугою кола.

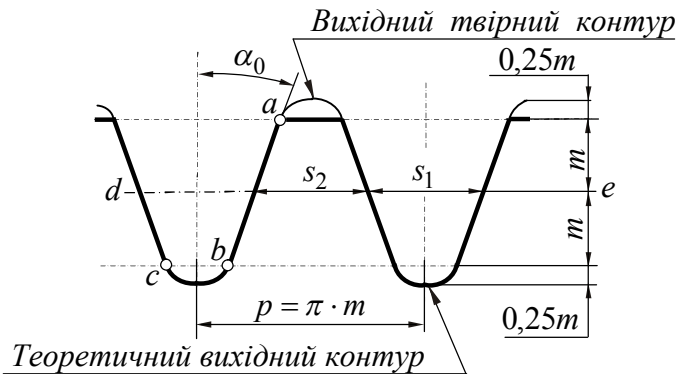


Рис. 5.24.

Рейковий контур, що покладений в основу стандарту (ГОСТ 13755-68), називається **теоретичним вихідним контуром**.

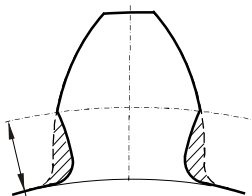
Даний контур є основою для визначення форм і розташування крайок інструмента, яким нарізають зубчасті колеса. Різальний інструмент з рейковим контуром начебто заповнює западини теоретичного контуру і називається *твірним*. При цьому між лінією западин твірного і лінією вершин теоретичного зберігається радіальний зазор $0,25m$.

Модуль m , у частках якого зазначені розміри цього профілю, вибирається зі стандартного ряду модулів зубчастих коліс. Пряма лінія de , на якій ширина зубця s_1 дорівнює ширині западини s_2 ($s_1 = s_2 = p/2$), отримала назву *ділильної прямої рейки*.

Прямолінійна ділянка ab профілю рейки при нарізанні зубчастого колеса формує евольвентну поверхню зубця, а ділянка cb – перехідну поверхню (галтель). Кут нахилу α_0 прямолінійної ділянки ab відносно осі симетрії зубця згідно ГОСТ 13755-68 дорівнює 20° .

5.8. Підрізання профілів зубців

При виробництві зубчастих коліс способом обкатування в деяких випадках виходить так, що голівки різального інструмента врізаються в ніжки зубців колеса, що нарізається. У результаті ніжки зубців колеса виявляються як би підрізаними (рис. 5.25), звідкіля і саме явище одержало назву *підрізання*.



Підрізана частина
ніжки зубця

Рис. 5.25.

При підрізанні ніжки зубець послаблюється, оскільки зменшується його ширина біля ніжки. Крім того, при цьому зрізається частина евольвентної (робочої) поверхні зубця. Таким чином

прямолінійній ділянці ab твірного контуру, яка при нарізанні зубчастого колеса формує евольвентну поверхню зубця. З іншого боку, лінія pc зачеплення дотична до твірного кола радіуса r_b (рис. 5.26).

З трикутника ΔpNO для радіуса r_b твірного кола одержимо:

$$r_b = (Op) \cos \alpha_0 = r \cdot \cos \alpha_0, \quad (5.12)$$

де α_0 – кут нахилу ділянки ab профілю рейки.

На рис. 5.24 інструмент (рейка) рухається відносно колеса горизонтально, отже, траєкторіями всіх точок рейки будуть горизонтальні лінії. З огляду на те, що евольвента зубця є кривою, обмеженою початковою точкою, яка розташовується на основному колі, то траєкторія точки a рейки повинна пройти через точку N лінії зачеплення (кінцеву точку лінії теоретичного зачеплення pN). У цьому випадку при нарізанні зубчастого колеса евольвентна поверхня зубця буде сформована рейкою цілком від початкової точки (на твірному колі) до кола вершин зубців.

Якщо траєкторія точки a перетинає лінію зачеплення pc в точці S (рис. 5.27,а), що лежить у межах лінії теоретичного зачеплення pN , то частина евольвентної поверхні зубця (на ділянці SN лінії зачеплення) буде не нарізаною.

Якщо ж траєкторія точки a перетинає лінію зачеплення pc в точці L (рис. 5.27,б), що лежить за межами лінії теоретичного зачеплення pN , то частина евольвентної поверхні зубця буде вирізана зворотною віткою евольвенти і виникне підрізання ніжки зубця.

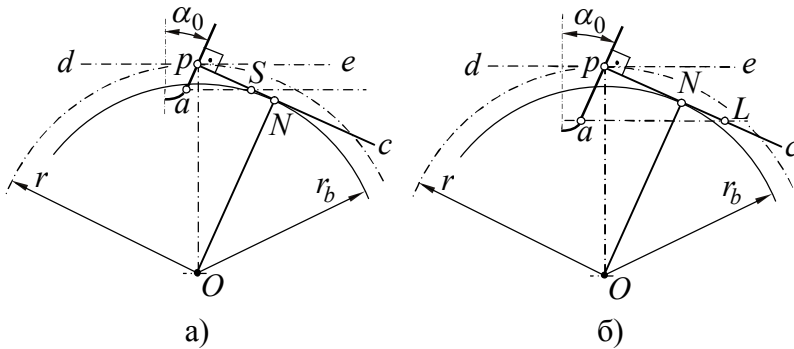


Рис. 5.27.

Визначимо мінімальний радіус $r = r_{\min}$ дільного кола при якому траєкторія точки a буде проходити через точку N . З трикутників ΔpNO і ΔpNA дістанемо:

$$(pN) = (Op) \sin \alpha_0 = r_{\min} \cdot \sin \alpha_0; \quad (5.13)$$

$$(pA) = (pN) \sin \alpha_0 = r_{\min} \cdot \sin^2 \alpha_0. \quad (5.14)$$

Враховуючи, що (pA) дорівнює відстані від точки a до середньої прямої de рейки, що дорівнює модулю m (рис. 5.26), а $r_{\min} = mz_{\min}/2$ то:

$$m = \frac{mz_{\min}}{2} \sin^2 \alpha_0 \quad \text{або} \quad z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}, \quad (5.15)$$

де z_{\min} – мінімальне число зубців на колесі, яке можна нарізати без підрізання ніжки зубця.

Таким чином, при нарізанні зубчастого колеса підрізання ніжки зубця буде відбуватися у випадку якщо число зубів на колесі $z < z_{\min}$. Як видно з формули (5.15), мінімальне z_{\min} число зубів, яке можна нарізати на колесі без підрізання ніжки зубця, залежить тільки від кута нахилу α_0 ділянок рейки, що формують евольвентну поверхню зубця.

В таблиці 5.1 показано як змінюється z_{\min} в залежності від обраного значення для кута α_0 .

Зі збільшенням кута α_0 зменшується z_{\min} , отже, зменшується ділительний радіус r зубчастого колеса, його габарити і маса. Однак, кут α_0 впливає і на радіальне F^r зусилля в зубчастому зачепленні (див. розділ 5.5), яке сприймається опорами (підшипниками) валів. Причому, зі збільшенням кута α_0 , при однаковому обертаючому моменті на валу, радіальне зусилля зростає (таблиця 5.1). (У таблиці 5.1 радіуси r ділительних кіл і радіальних F^r зусиль віднесені до значень, отриманим при $\alpha_0 = 20^\circ$).

Таблиця 5.1.

α_0	13°	20°	26°
z_{\min}	40	17	11
$r/(r)_{\alpha_0=20^\circ}$	2,35	1,0	0,64
$F^r/(F^r)_{\alpha_0=20^\circ}$	0,27	1,0	2,07

Таким чином, при виборі кута α_0 необхідно враховувати не тільки габарити зубчастого механізму але і міцність опор валів, тобто підшипників. В даний час стандартом визначений кут $\alpha_0 = 20^\circ$, для якого $z_{\min} = 17$.

5.9. Зубчасті колеса нарізані зі зміщенням твірної контуру

Зубчасті колеса, при нарізанні яких ділительна пряма рейки de (рис. 5.26) дотична до ділительного кола, отримали назву *нульових* або *без зміщення твірної контуру*.

Коефіцієнт зміщення x в цьому випадку вважається додатним і зубчасте колесо називають **додатним**.

У другому положенні (рис. 5.28,б) ділильна пряма de рейки зміщена до центра заготовки на величину $\Delta = xm$, коефіцієнт зміщення x в цьому випадку вважається від'ємною величиною і таке колесо називається **від'ємним**. По ділильному колу котиться без ковзання пряма kl . Товщина зубця на ділильному колі визначається за формулою (5.12) і, внаслідок того що $x < 0$, буде меншою, чим у нульового колеса, а ширина западини – більшою.

Зміщення твірною контуру використовується:

- коли необхідно нарізати зубчасте колесо з числом зубців $z < z_{\min}$;
- коли необхідно покращити якісні показники зубчастого зачеплення.

Розглянемо нарізання зубчастого колеса з числом зубців $z < z_{\min}$. При нарізанні такого зубчастого колеса як нульового виникне підрізання ніжки зубця, оскільки траєкторія точки a рейки пройде за межами лінії теоретичного зачеплення pN (рис. 5.27,б).

Змістимо ділильну пряму de рейки від центра заготовки (рис. 5.29) на деяку відстань Δ_{\min} , при якій траєкторія точки a буде проходити через точку N лінії теоретичного зачеплення.

Згідно формулі (5.14):

$$(pA) = r \cdot \sin^2 \alpha_0 = \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha_0. \quad (5.18)$$

Виходячи із розмірів рейки (рис. 5.29):

$$(pA) = m - \Delta_{\min} = m - x_{\min} m = m(1 - x_{\min}), \quad (5.19)$$

де x_{\min} – мінімальний коефіцієнт зміщення, при якому усувається підрізання ніжки зубця.

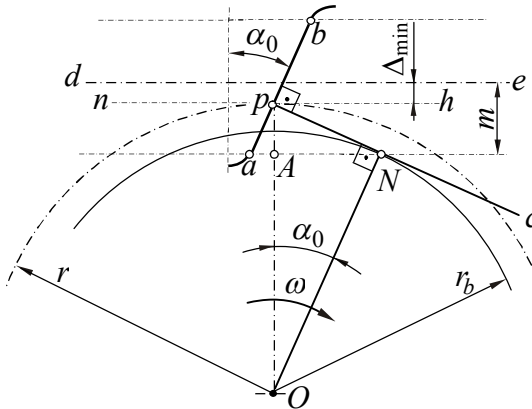


Рис. 5.29.

Прирівнявши рівняння (5.18) і (5.19) отримаємо:

$$\frac{mz}{2} \sin^2 \alpha_0 = m(1 - x_{\min}). \quad (5.20)$$

Звідки:

$$x_{\min} = 1 - z \frac{\sin^2 \alpha_0}{2}. \quad (5.21)$$

Враховуючи, що $\sin^2 \alpha_0 / 2 = 1/z_{\min}$, то:

$$x_{\min} = \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}. \quad (5.22)$$

Як випливає із формули (5.22), мінімальний x_{\min} коефіцієнт зміщення рейки, при якому усувається підрізання ніжки зубця при нарізанні зубчастого колеса з числом зубців $z < z_{\min}$, визначається тільки z і z_{\min} .

При куті $\alpha_0 = 20^\circ$ формула (5.22) набуде виду:

$$x_{\min} = \frac{17 - z}{17}. \quad (5.23)$$

Таким чином, для усунення підрізання ніжки зубця при нарізанні зубчастого колеса коефіцієнт зміщення x твірною контуру повинен бути більшим за x_{\min} .

Потрібно зауважити, що для колеса з числом зубців $z > z_{\min}$ мінімальний коефіцієнт зміщення $x_{\min} < 0$. Тому при нарізанні такого колеса можна зробити від'ємне зміщення (рис. 5.28,б), тобто ділильна пряма *de* рейки змістити до центра заготовки.

Максимальний коефіцієнт зміщення x_{\max} рейки визначається загостренням голівки зубця. На рис. 5.30 показані профілі зубців трьох коліс, у яких однакове число зубців, що нарізані одним і тим же самим інструментом, але з різними коефіцієнтами зміщення: $x_3 > x_2 > x_1$. У коліс однакові радіуси ділильних і твірних кіл, а отже, профілі зубців усіх трьох коліс окреслені одною і тою ж самою евольвентою. Як впливає з формули (5.17) товщина зубців на ділильному колі в коліс буде різною:

$$s_1 = \cup ab; \quad s_2 = \cup ac; \quad s_3 = \cup ad, \quad \text{тобто} \quad s_3 > s_2 > s_1.$$

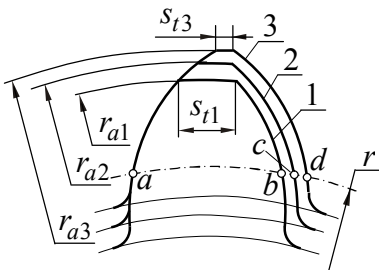


Рис. 5.30.

Незважаючи на те, що зі збільшенням коефіцієнта зміщення товщини зубців на ділильному колі зростають, зміна товщин зубців на колах r_{a1} , r_{a2} , r_{a3} вершин зубців (рис. 5.30) носить зворотний характер $s_{t3} < s_{t2} < s_{t1}$.

Це пояснюється тим, що при великих коефіцієнтах зміщення для бокової поверхні профілю зубця використовуються частини евольвенти, які віддалені від твірного кола. Чим більш віддалена частина евольвенти від твірного кола тим більший її нахил до осі зубця (див. рис. 5.10).

Загострення голівки зубця є небажаним, оскільки з точки зору міцності вершина загостреного зубця не здатна передавати задані навантаження. Тому товщину зубця на колі вершин приймають $s_t \geq 0,25m$ для кінематичних передач і $s_t \geq 0,4m$ – для силових.

Таким чином, коефіцієнт зміщення твірного контуру при нарізанні зубчастого колеса може змінюватися в діапазоні: $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$.

Зміщення твірного контуру робить передачу більш міцною і довговічною, оскільки для меншого колеса (з менш міцними зубцями) коефіцієнт зміщення обирається додатним, що робить його зубці більш міцним. В результаті зубці шестерні та колеса стають більш рівноміцними і працездатність передачі в цілому зростає.

Спочатку зміщення твірного контуру виконувалося тільки для усунення підрізання ніжки зубця. В даний час зміщення застосовується ще і з метою збільшення міцності передачі, зменшення зносу і для досягнення необхідної відстані між центрами зубчастих коліс. Зміщення твірного контуру дозволяє підвищити контактну міцність зубців на 20%, міцність на згин – на 100% і довговічність – на 200% при тих же габаритах і матеріалах зубчастих коліс.

Враховуючи сказане, *коефіцієнти зміщення обираються одночасно для пари зубчастих коліс, що будуть працювати в зачепленні, тобто для передачі.*

Для вибору коефіцієнтів зміщення можна скористатися або *табличними методами*, або *методом блокувальних контурів*.

В *табличних методах* [6] для кожного сполучення числа зубців шестерні z_1 і колеса z_2 наводяться оптимальні, з точки зору розробників таблиць, коефіцієнти зміщення x_1 і x_2 .

В методі *блокувальних контурів* [4, 5] для кожного сполучення числа зубців z_1 і z_2 пари зубчастих коліс у прямокутній системі координат, осі якої є коефіцієнти зміщення x_1 і x_2 , побудовані криві, що визначають границі існування передачі, а також тих чи інших її особливостей (рис. 5.29).

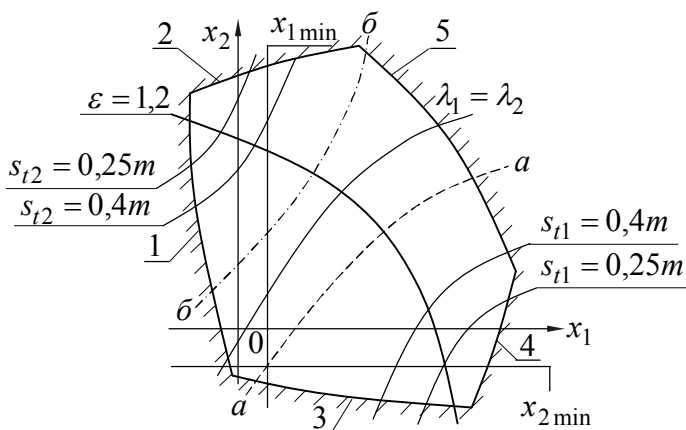


Рис. 5.29.

Лінії 1 і 2 обмежують границі існування передачі, за якими на профіль зубця ніжки колеса накладається профіль головки зубця шестерні, виникає так звана інтерференція зубців, а в реальному механізмі відбудеться заклинювання передачі. Лінії 3 і 4 – те ж явище на ніжці

зубця шестерні. Лінія 5 – коефіцієнт торцевого перекриття $\varepsilon = 1$. Заборонені зони зміни коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2 на блокувальному контурі заштриховані.

Крім того в середині контуру нанесені обмежувальні лінії: коефіцієнт торцевого перекриття $\varepsilon = 1,2$; товщини вершин зубців $s_t = 0,25m$ і $s_t = 0,4m$ для шестірні і колеса; лінії початку підрізання ніжки зубця шестірні $x_{1\min}$ і колеса $x_{2\min}$. За межі обмежувальних ліній конструктор при виборі коефіцієнтів зміщення може виходити.

У середині контуру також нанесені: лінія коефіцієнтів зміщення, при яких вирівнюються питомі швидкості ковзання зубців на початкових колах зубчастих коліс $\lambda_1 = \lambda_2$; лінії aa і bb коефіцієнтів зміщення, при яких забезпечується рівна міцність зубців, якщо матеріал і термічна обробка обох коліс однакові. Лінія aa відповідає випадку, коли ведучою є шестірня, а лінія bb – колоесо.

Коефіцієнти зміщення по блокувальному контуру обираються безпосередньо конструктором виходячи з умов роботи зубчастої передачі.

5.10. Визначення основних геометричних розмірів зубчастої передачі

У залежності від величин зміщення кожного колеса можна одержати три типи передач, що відрізняються розташуванням початкових і ділильних кіл.

В *нульовій передачі* ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), як уже відзначалося вище, початкові і ділильні кола збігаються ($r_{w1} = r_1$, $r_{w2} = r_2$), кут зачеплення α_w дорівнює $\alpha_0 = 20^\circ$, товщини зубів на ділильних колах дорівнюють половині

кроку $s_1 = s_2 = p/2 = 0,5\pi m$ і міжосьова відстань дорівнює сумі ділительних радіусів $A_w = r_1 + r_2$.

Така передача може бути спроектованою тільки у випадку, коли $z_1 \geq 17$ і $z_2 \geq 17$. Формули для визначення основних розмірів нульових зубчастих коліс були наведені в розділі 5.3.

Рівнозміщена передача ($x_1 = -x_2$), тобто коефіцієнти зміщення рівні за величиною, але для шестерні – додатний, а для колеса – від’ємний. Дана передача може бути спроектована тільки у випадку, якщо $z_1 + z_2 \geq 34$.

У такій передачі початкові і ділительні кола збігаються ($r_{w1} = r_1$, $r_{w2} = r_2$), кут зачеплення α_w дорівнює $\alpha_0 = 20^\circ$ і міжосьова відстань дорівнює сумі ділительних радіусів $A_w = r_1 + r_2$. Товщини зубців на ділительних колах різні, у шестірні – більше половини кроку $s_1 > 0,5p$, у колеса – менше $s_1 < 0,5p$, але в сумі дорівнюють кроку $s_1 + s_2 = p$.

Нерівнозміщена передача може бути **додатною**, якщо $x_1 + x_2 > 0$, і **від’ємною** $x_1 + x_2 < 0$.

У випадку **додатної** передачі на ділительних колах товщина зубця одного з коліс більша ширини западини іншого колеса. Отже початкові і ділительні кола в такій передачі не можуть збігатися, осі коліс необхідно розсунути (у порівнянні з нульовою передачею) до одержання зачеплення без бічних зазорів між зубцями. При цьому міжосьова відстань збільшується і зростає кут зачеплення $\alpha_w > \alpha_0 = 20^\circ$.

У випадку *від'ємної* передачі на ділильному колі товщина зубця одного з коліс менше ширини западини іншого колеса. Отже початкові і ділильні кола в такій передачі так само не можуть збігатися. Для одержання зачеплення без бічних зазорів між зубцями міжосьова відстань повинна бути зменшена і відповідно зменшиться кут зачеплення $\alpha_w < \alpha_0 = 20^\circ$.

Таким чином, для визначення основних розмірів зубчастого зачеплення необхідно задати: модуль зубчастих коліс m ; числа зубів z_1 і z_2 ; коефіцієнти зміщення x_1 і x_2 . При визначенні основних розмірів зубчастого зачеплення необхідно дотримувати наступного порядку.

1. Крок зачеплення на ділильному колі:

$$p = \pi m . \quad (5.24)$$

2. Радіуси ділильних кіл:

$$r_1 = mz_1/2 ; \quad r_2 = mz_2/2 . \quad (5.25)$$

3. Радіуси основних кіл:

$$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha_0 ; \quad r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha_0 . \quad (5.26)$$

4. Кут зачеплення:

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_0 + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha_0 , \quad (5.27)$$

де $\operatorname{inv} \alpha_0$ – інволюта кута α_0 , $\operatorname{inv} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 - \alpha_0$, визначається за таблицями інволют по куту α_0 .

Після обчислення $\operatorname{inv} \alpha_w$, кут зачеплення α_w визначається за таблицями інволют по значенню $\operatorname{inv} \alpha_w$.

5. Радіуси початкових кіл:

$$r_{w1} = r_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}; \quad r_{w2} = r_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}. \quad (5.28)$$

6. Міжосьова відстань:

$$A_w = \frac{r_1 + r_2}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}. \quad (5.29)$$

7. Радіуси кіл западин зубців:

$$r_{f1} = r_1 - m(1,25 - x_1); \quad r_{f2} = r_2 - m(1,25 - x_2). \quad (5.30)$$

8. Радіуси кіл вершин зубців:

$$r_{a1} = A_w - r_{f2} - 0,25m; \quad r_{a2} = A_w - r_{f1} - 0,25m. \quad (5.31)$$

9. Товщини зубців на ділильному колі:

$$s_1 = \frac{p}{2} + 2x_1m \cdot \operatorname{tg} \alpha_0; \quad s_2 = \frac{p}{2} + 2x_2m \cdot \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (5.32)$$

Наведені формули справедливі для коліс, нарізаних інструментом рейкового типу (гребінкою, черв'ячною фрезєю).

Враховуючи вирази для радіусів початкових (5.28) і ділильних кіл (5.25) для передаточного відношення (5.4) евольвентного зубчастого зачеплення отримуємо:

$$U_{1,2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{mz_2/2}{mz_1/2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.33)$$

Таким чином, *передаточне відношення пари зубчастих коліс обернено пропорційно відношенню їх числа зубців.*

Приклад 1. Міжосьова відстань нульової зубчастої передачі зовнішнього зачеплення $A_w = 88$ мм, число зубців коліс $z_1 = 17$ і $z_2 = 27$.

Визначити крок зачеплення p .

Розв'язування. У нульовій передачі міжосьова відстань дорівнює сумі ділительних радіусів:

$$A_w = r_1 + r_2,$$

де $r_1 = mz_1/2$; $r_2 = mz_2/2$, тобто

$$A_w = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(17 + 27) = 22m.$$

Відкіля модуль і крок зачеплення відповідно дорівнюють:

$$m = A_w/2 = 88/22 = 4 \text{ мм};$$

$$p = \pi m = 3,14 \cdot 4 = 12,56 \text{ мм}.$$

Відповідь: $p = 12,56 \text{ мм}$

Приклад 2. Для нульової шестерні задано модуль $m = 6 \text{ мм}$ і радіус кола западин $r_{f1} = 76,5 \text{ мм}$.

Визначити число зубців z .

Розв'язування. Радіус кола западин нульового колеса пов'язаний з числом зубців і модулем залежністю (5.3):

$$r_f = r - 1,25m,$$

де $r = mz/2$ – радіус ділительного кола.

Тоді $r_f = 0,5mz - 1,25m$, відкіля:

$$z = \frac{r_f - 1,25m}{0,5m} = \frac{76,5 - 1,25 \cdot 6}{0,5 \cdot 6} = 28$$

Відповідь: $z = 28$.

Приклад 3. Для пари нульових зубчастих коліс зовнішнього зачеплення задані: міжосьова відстань

$A_w = 132$ мм, передатне відношення $U_{1,2} = 2,3$ і модуль зачеплення $m = 4$ мм.

Визначити числа зубців обох коліс.

Розв'язування. Залежність між числами зубців z_1 і z_2 знайдемо, скориставшись передатним відношенням $U_{1,2}$ (5.33):

$$U_{1,2} = z_2/z_1 = 2,3; \Rightarrow z_2 = 2,3z_1.$$

Крім того, залежність між z_1 і z_2 можна установити із формули для визначення міжосьової відстані для нульового зачеплення:

$$A_w = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2),$$

або

$$z_1 + z_2 = \frac{2A_w}{m} = \frac{2 \cdot 132}{4} = 66.$$

Тоді:

$$z_1 = 66 - z_2 = 66 - 2,3z_1; \quad 3,3z_1 = 66; \quad z_1 = 20;$$

$$z_2 = 2,3z_1 = 2,3 \cdot 20 = 46.$$

Відповідь: $z_1 = 20$; $z_2 = 46$.

Приклад 4. Обертання від ведучого вала на ведений передається за допомогою трьох зубчастих коліс 1, 2 і 3 (рис. 5.30), з яких середнє колесо є проміжним. Осі обертання усіх коліс лежать на одній прямій лінії. Передатне відношення цього зубчастого ряду $U_{1,3} = 5$.

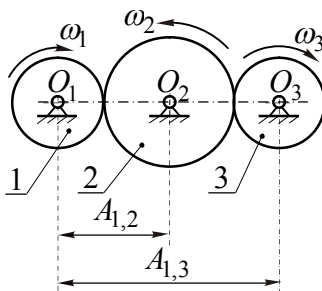


Рис. 5.30.

Визначити числа зубців усіх коліс, якщо міжосьові відстані $A_{1,2} = 202,5$ мм, $A_{1,3} = 595$ мм і модуль зубчастих коліс $m = 5$ мм.

Розв'язування. Знайдемо міжосьову відстань $A_{2,3}$:

$$A_{2,3} = A_{1,3} - A_{1,2} = 595 - 202,5 = 392,5 \text{ мм.}$$

Виразимо $A_{1,2}$ і $A_{2,3}$ через модуль m та числа зубців відповідних зубчастих коліс:

$$A_{1,2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2}; \quad (1)$$

$$A_{2,3} = \frac{mz_2}{2} + \frac{mz_3}{2}. \quad (2)$$

Віднімемо від рівняння (2) рівняння (1):

$$A_{2,3} - A_{1,2} = \frac{mz_2}{2} + \frac{mz_3}{2} - \frac{mz_1}{2} - \frac{mz_2}{2},$$

або

$$A_{2,3} - A_{1,2} = \frac{mz_3}{2} - \frac{mz_1}{2}.$$

Тоді

$$z_3 - z_1 = \frac{2(A_{2,3} - A_{1,2})}{m} = \frac{2(392,5 - 202,5)}{5} = 76.$$

Оскільки

$$U_{1,3} = U_{1,2}U_{2,3} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1}, \text{ то } z_3 = 5z_1.$$

Підставивши вираз для z_3 в попереднє рівняння отримаємо:

$$5z_1 - z_1 = 76; \quad z_1 = 19.$$

Тоді

$$z_3 = 5z_1 = 5 \cdot 19 = 95.$$

Число зубців другого колеса визначимо із формули (1):

$$z_2 = \frac{2}{m} \left(A_{1,2} - \frac{mz_1}{2} \right) = \frac{2}{5} \left(202,5 - \frac{5 \cdot 19}{2} \right) = 62.$$

Відповідь: $z_1 = 19$; $z_2 = 62$ $z_3 = 95$.

Контрольні запитання до теми 5

1. Як класифікуються прості зубчасті механізми?
2. Які переваги у шевронних зубчастих коліс?
3. До яких передач відноситься черв'ячна передача?
4. Які переваги у евольвентних зубчастих коліс?
5. Що таке модуль зубчастого колеса?
6. Яке коло зубчастого колеса називається ділильним?
7. Які основні властивості у евольвенти?
8. Що показує коефіцієнт торцевого перекриття?
9. В якій передачі початкові і ділильні кола збігаються?
10. Які існують способи нарізання зубчастих коліс?
11. Що таке інструментальна рейка?
12. Які зубчасті колеса називаються нульовими?
13. Як змінюється товщина зубця на ділильному колі при зміщенні твірною контуру?
14. В якому випадку відбувається підрізання ніжки зубця?
15. Що таке зміщення твірною контуру?
16. Чим визначається мінімальне число зубців, які можна нарізати без зміщення твірною контуру?
17. Які бувають типи передач у залежності від обраних коефіцієнтів зміщення?
18. Що таке загострення голівки зубця? Коли воно відбувається?

ЛЕКЦІЯ 12

ЗМІСТ

6. Багатоланкові зубчасті механізми.

- 6.1. Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями обертання зубчастих коліс.
- 6.2. Зубчасті механізми з рухомими осями обертання зубчастих коліс.
- 6.3. Планетарні редуктори.

6. Багатоланкові зубчасті механізми

При проектуванні більшості машин виникає необхідність передачі обертання від вхідного вала на вихідний чи з великим передатним відношенням чи на значну відстань між осями. У цих випадках використовуються багатоланкові зубчасті механізми.

Необхідність використання багатоланкових зубчастих механізмів викликана тим, що одна пара зубчастих коліс (простий зубчастий механізм) забезпечує обмежене передатне відношення. Як було показано в розділі 5, передатне відношення $U_{1,2}$ пари зубчастих коліс (з числом зубів z_1 і z_2) дорівнює:

$$U_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (6.1)$$

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості зубчастих коліс 1 і 2.

Мінімальна кількість зубців z_1 на шестерні обмежена явищем підрізання ніжки зубця, тобто $z_{1\min} = 12-17$. При виборі числа зубців на більшому колесі виходять із габаритних обмежень і маси

конструкції. В підйомно-транспортних та інших машинах максимальне число зубців колеса обмежується значенням $z_{2\max} = 125 \div 150$. Таким чином, для одної пари зубчастих коліс можна отримати максимальне передаточне відношення на рівні 10. В машинобудуванні для силових передач, як правило, беруть передаточні відношення ще меншими:

$$1 \leq |U_{1,2}| \leq 6.$$

Для отримання великих передатних відношень застосовують декілька послідовно з'єднаних пар зубчастих коліс. В таких механізмах крім вхідного і вихідного зубчастих коліс є і проміжні колеса. Такі складні зубчасті механізми одержали назва багатоланкових, причому, якщо кутова швидкість обертання вихідного вала зменшується в порівнянні з вхідним, то такий зубчастий механізм називають *редуктором*, а якщо збільшується – *мультиплікатором*.

Кінематичний аналіз багатоланкових зубчастих механізмів полягає у визначенні їх передаточного відношення.

Перед розглядом кінематичного аналізу багатоланкових зубчастих механізмів зупинимося на питанні знаку передаточного відношення в формулі (6.1).

Передаточне відношення має знак “+” у випадку внутрішнього зачеплення пари зубчастих коліс (рис.6.1,а), оскільки напрями обертання 1 і 2 колеса (1 і 2 вала) при такому зачепленні співпадають. У випадку ж зовнішнього зачеплення передаточне відношення має знак “–”, оскільки обертання коліс (валів) в такому зачепленні відбувається в різні сторони (рис.6.1,б).

В силу цього, якщо передаточне відношення багатоланкового зубчастого механізму додатне, то його вхідний і вихідний вали обертаються в один бік, та в різні боки – якщо передаточне відношення від’ємне.

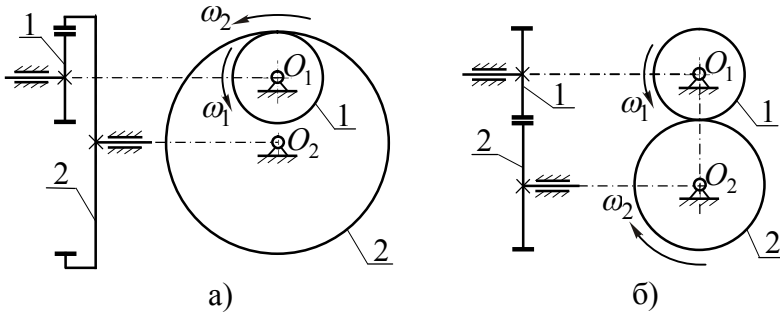


Рис. 6.1.

У залежності від конструкції багатоланкові зубчасті механізми діляться на дві групи:

- механізми, у яких всі зубчасті колеса обертаються навколо нерухомих осей (підшипники осей обертання нерухомі);
- механізми, до складу яких входять зубчасті колеса з рухомими осями обертання.

6.1. Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями обертання зубчастих коліс

Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями обертання зубчастих коліс підрозділяються на *рядові* і *ступінчасті*.

Рядовий зубчатий механізм, являє собою послідовне зачеплення декількох зубчастих коліс. У зубчастому механізмі, дві проекції якого показані на рис. 6.2, ведуче зубчасте колесо 1 знаходиться в зачепленні з колесом 2, яке одночасно знаходиться в зачепленні з

колесом 3, а колесо 3, у свою чергу, одночасно знаходиться в зачепленні з веденим колесом 4.

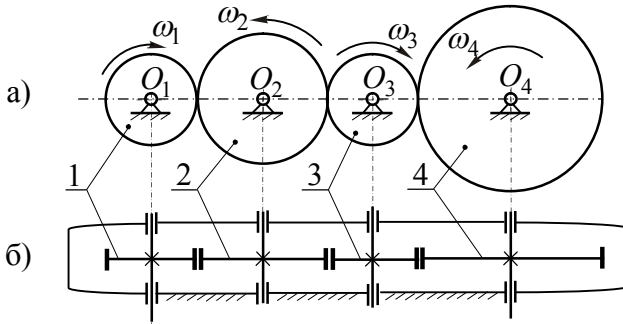


Рис. 6.2.

Позначимо кутову швидкість колеса 1 як ω_1 , кутову швидкість колеса 2 – ω_2 , колеса 3 – ω_3 і т.д. Загальне передатне відношення всього механізму буде дорівнювати:

$$U_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (6.2)$$

Запишемо передатні відношення для кожної пари зубчастих коліс:

$$U_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad U_{2,3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}; \quad U_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}. \quad (6.3)$$

Перемножимо записані передаточні відношення:

$$U_{1,2} \cdot U_{2,3} \cdot U_{3,4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (6.4)$$

З урахуванням (6.2) отримаємо:

$$U_{1,4} = U_{1,2} \cdot U_{2,3} \cdot U_{3,4}. \quad (6.5)$$

Таким чином, *передатне відношення багатоланкового зубчастого механізму з нерухомими осями обертання коліс дорівнює добутку узятих зі своїм знаком передатних відношень окремих його ступіней.*

Враховуючи, що передатні відношення окремих ступіней механізму, що розглядається, відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned}U_{1,2} &= -z_2/z_1; \\U_{2,3} &= -z_3/z_2; \\U_{3,4} &= -z_4/z_3,\end{aligned}\tag{6.6}$$

то для $U_{1,4}$ отримаємо:

$$U_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1},\tag{6.7}$$

де z_1, z_2, z_3, z_4 – числа зубців відповідних зубчастих коліс.

В загальному випадку для рядового механізму, до складу якого входить n – е число коліс:

$$U_{1,n} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}.\tag{6.8}$$

Таким чином, *загальне передаточне відношення рядового зубчастого механізму стає і дорівнює відношенню чисел зубців останнього колеса до першого.* Знак передаточного відношення, тобто напрям обертання вхідного вала по відношенню до вихідного, визначається множителем $(-1)^k$, де k – число зовнішніх зачеплень. Для механізму, що розглядається, $k = 3$.

Як впливає із формули (6.8), передаточне відношення рядового зубчастого механізму еквівалентне

передаточному відношенню простого зубчастого механізму з числом зубців коліс z_1 і z_n .

Розміри проміжних коліс (числа зубців), які знаходяться одночасно в зачепленні з попередніми і наступними колесами (2 і 3 на рис. 6.2), не впливають на величину загального передаточного відношення механізму, а змінюють тільки напрямок обертання вихідного вала по відношенню до вхідного.

Зубчасті колеса, які не впливають на величину загального передаточного відношення, одержали назву **паразитних**.

Застосовують рядові зубчасті механізми там, де необхідно змінити напрямок обертання вихідного вала при незмінному напрямку обертання вхідного (коробки швидкостей автомобілів, тракторів, верстатів і т.д.), або там, де необхідно забезпечити передачу руху на велику відстань між осями вихідного і вхідного валів.

Ступінчасті зубчасті механізми являють собою послідовне зачеплення декількох пар зблокованих (спарених) коліс.

В зубчастому механізмі, дві проекції якого показані на рис. 6.3, колесо 1 знаходиться в зачепленні з колесом 2. На осі обертання колеса 2 жорстко насаджено (зблоковано) колесо 2', яке в зачепленні з колесом 3. Колесо 3 зблоковано з колесом 3', яке в зачепленні з колесом 4. Зблоковані колеса обертаються з однаковими кутовими швидкостями, тобто колеса 2 і 2' з кутовою швидкістю ω_2 , а колеса 3 і 3' – ω_3 .

Передаточне відношення механізму дорівнює:

$$U_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2'}{\omega_3} \frac{\omega_3'}{\omega_4} = U_{1,2} \cdot U_{2',3} \cdot U_{3',4}, \quad (6.9)$$

де $\omega_2 = \omega'_2$; $\omega_3 = \omega'_3$ – кутові швидкості спарених коліс.

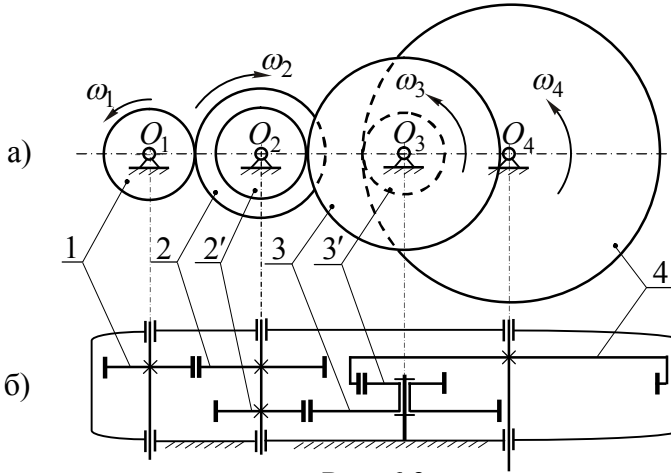


Рис. 6.3.

Після підстановки чисел зубців зубчастих коліс:

$$U_{1,4} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_3}{z'_2} \right) \left(\frac{z_4}{z'_3} \right) = \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3}, \quad (6.10)$$

або в загальному вигляді при n – му числі ступіней:

$$U_{1,n} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z'_2 \cdot \dots \cdot z'_{n-1}}. \quad (6.11)$$

Знак передаточного відношення визначається множителем $(-1)^k$, де k – число зовнішніх зачеплень.

Таким чином, *загальне передатне відношення ступінчастого зубчастого механізму стало і дорівнює добутку узятих зі своїм знаком передатних відношень окремих ступіней.*

За рахунок підбору числа зубців коліс у ступінчастому зубчастому механізмі можна одержати великі передатні відношення.

Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями обертання зубчастих коліс широко застосовуються в коробках швидкостей. **Зубчастою коробкою швидкостей** називається зубчастий механізм зі ступінчастою зміною передатного відношення. З коробками швидкостей проектується ті машини, робочі органи яких повинні обертатися з різними кутовими швидкостями в залежності від умов роботи (транспортні і сільськогосподарські машини, верстати і т.д.).

Коробки швидкостей складається із зубчастих коліс, які можуть бути введені в зачеплення в різних комбінаціях для одержання передатних відношень, що відповідають заданим швидкостям обертання вихідного вала. Способи введення в зачеплення окремих коліс для одержання різних передатних відношень залежать від конструктивного оформлення коробки.

На рис. 6.4 показана схема коробки з двома валами, яка дозволяє отримати чотири різних передаточних відношень.

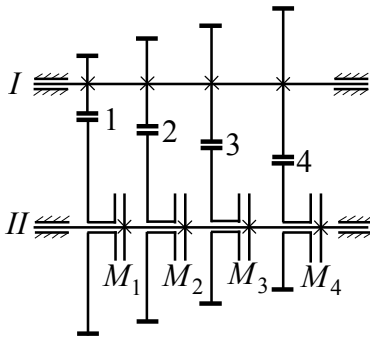


Рис. 6.4.

Колеса передач 1, 2 і т.д. на валі I насажені жорстко, а на валі II можуть обертатися вільно. За допомогою гідравлічних муфт M_1 , M_2 і т.д. можна заблокувати одне з коліс вала II з цим валом, у відповідності з чим між валами I і II буде отримано те чи інше передаточне відношення.

Просторові багатоланкові зубчасті механізми використовуються в тих випадках, коли необхідно передавати рух між осями, які схрещуються чи перетинаються. В останньому випадку застосовуються

механізми з кінцевими зубчастими колесами. При аналітичному дослідженні такого механізму величина передатного відношення визначається за формулою (6.11) без урахування зміни напрямку обертання зубчастих коліс.

Якщо вісь обертання вхідного колеса просторового зубчастого механізму паралельна осі вихідного колеса, то передатному відношенню доцільно приписати знак, а саме, знак плюс, якщо напрямки обертання вхідного і вихідного

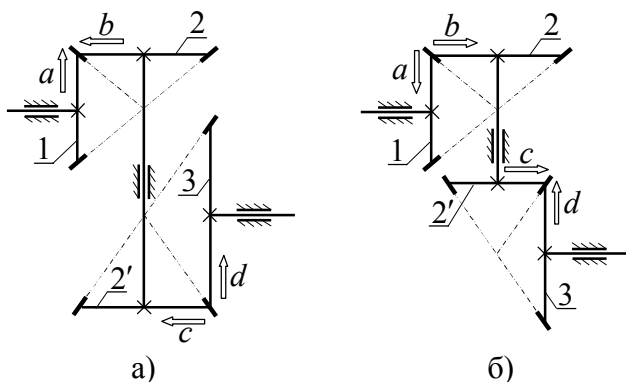


Рис. 6.5.

коліс збігаються, і знак мінус, якщо ці напрямки протилежні. Визначається знак за допомогою стрілок. Розглянемо це на прикладі зубчастих механізмів, показаних на рис. 6.5.

У місці зіткнення коліс 1 і 2 поставимо стрілки a і b , причому, якщо стрілка a спрямована до місця зіткнення, то і стрілка b теж повинна бути спрямованою до цього місця (рис. 6.5,а) або навпаки (рис. 6.5,б). На колесі $2'$, яке заблоковане з колесом 2, стрілку c спрямовуємо за напрямком стрілки b . Тоді стрілка d , відповідно до вищевказаної умови, буде мати напрямок: співпадаючий зі стрілкою a на рис. 6.5,а і зворотний стрілці a на рис. 6.5,б.

Якщо напрямки стрілок вхідного і вихідного коліс збігаються (рис. 6.5,а), то знак передатного відношення варто вважати додатним, тобто вхідний і вихідний вали зубчастого механізму обертаються в одну сторону. Якщо ж напрямки цих стрілок протилежні (рис. 6.5,б), то знак передатного відношення варто вважати від'ємним, тобто вхідний і вихідний вали зубчастого механізму обертаються в різні сторони.

6.2. Зубчасті механізми з рухомими осями обертання зубчастих коліс

У деяких багатоступінчастих зубчастих механізмах осі обертання окремих коліс є рухомими.

Найбільш простим з таких механізмів, до складу якого входить дві рухомі ланки, є механізм, що показаний у двох проекціях на рис. 6.6.

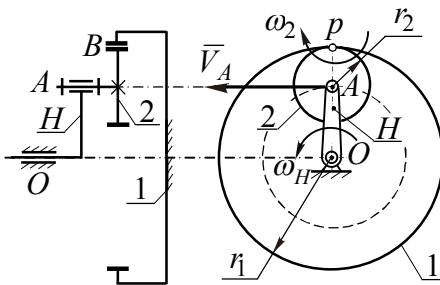


Рис. 6.6.

Механізм складається із двох зубчастих коліс: нерухомого 1 і рухомого 2, що знаходиться з 1 в зачепленні, та ланки H , яка входить в обертальні кінематичні пари O (зі стійкою) і A (зі зубчастим колесом 2).

При обертанні ланки H з кутовою швидкістю ω_H навколо нерухомої осі, що проходить через точку O , колесо 2 оббігає нерухоме колесо 1, обертаючись з кутовою швидкістю ω_2 навколо миттєвого центра обертання p . Вісь обертання колеса 2, що проходить через точку A , при цьому рухається по колу радіуса OA .

Нерухоме колесо 1, центр якого збігається з центром обертальної кінематичної пари O , називається **центральною колесом**, колесо 2, вісь обертання якого рухома, – **сателітом**, а ланка H – **водилом**.

Оскільки, швидкість точки A водила H :

$$V_A = \omega_H(OA) = \omega_H(r_1 - r_2) \quad (6.12)$$

є швидкістю центра колеса 2, то кутова швидкість ω_2 дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{Ap} = \frac{V_A}{r_2} = \omega_H \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right). \quad (6.13)$$

Враховуючи, що радіуси ділительних кіл зубчастих коліс:

$$r_1 = mz_1/2; \quad r_2 = mz_2/2, \quad (6.14)$$

то

$$\omega_2 = \omega_H \left(\frac{z_1}{z_2} - 1 \right), \quad (6.15)$$

де m , z_1 , z_2 – модуль и числа зубців зубчастих коліс.

Зубчасті механізми з рухомими осями обертання зубчастих коліс в свою чергу діляться на **планетарні** і **диференціальні**.

Планетарним називається механізм, який має ступінь рухомості рівну одиниці, тобто в такому механізмі одна вхідна і одна вихідна ланка.

Диференціальним називається механізм, ступінь рухомості якого більша одиниці, тобто в такому механізмі при одній вхідній (вихідній) ланці число вихідних (вхідних) дорівнює його ступіні рухливості.

Планетарні механізми підрозділяються на направляючі (відтворюють задану траєкторію руху) і

передаточні (відтворюють задане передатне відношення). Передаточні планетарні механізми скорочено називають **планетарними редукторами**.

Враховуючи, що механізм, який показаний на рис. 6.6, включає дві рухомі ланки: колесо 2 і водило H ($n = 2$); дві кінематичні пари O і A п'ятого класу ($p_5 = 2$) та одну кінематичну пару B четвертого класу ($p_4 = 1$), то його ступінь рухливості:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1. \quad (6.16)$$

Таким чином, даний механізм відноситься до планетарних направляючих. Робочий орган в такому механізмі закріплюється на колесі 2. При обертанні водила H з кутовою швидкістю ω_H робочий орган буде рухатися по колу радіуса OA зі швидкістю \bar{V}_A і обертатися навколо осі, що проходить через точку A з кутовою швидкістю ω_2 . Подібні рухи робочого органа використовуються в мішалках, бавовнозбиральних машинах, ткацьких верстатах і т.д.

6.3. Планетарні редуктори

Найбільш широке поширення планетарні зубчасті механізми одержали в планетарних редукторах, призначених для одержання необхідних передатних відношень. Найпростіший такий редуктор, що складається з чотирьох ланок (рис. 6.7, а, б), може бути отриманий із планетарного механізму, показаного на рис. 6.6, якщо в його склад ввести ще одне центральне зубчасте колесо 1, яке входить у зачеплення з сателітом 2.

В даному механізмі два центральних зубчастих колеса 1 і 3. Рухоме колесо 1, навколо осі якого оберта-

ється сателіт (або сателіти), називається **сонячним**, а нерухоме колесо 3 – **опорним** або **коронною шестернею**.

Враховуючи, що механізм включає три рухомі ланки: колеса 1, 2 і водило H ($n=3$), три кінематичні пари O , A , B п'ятого класу ($p_5=3$), і дві кінематичні пари C та D четвертого класу ($p_4=1$), то його ступінь рухливості:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1. \quad (6.17)$$

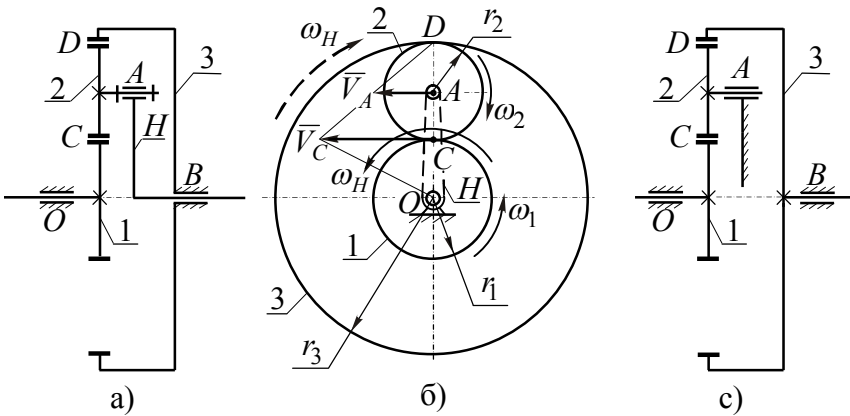


Рис. 6.7.

При обертанні колеса 1 з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі, що проходить через центр кінематичної пари O , точка C (полюс зачеплення зубчастих коліс 1 і 2) набуде швидкість \bar{V}_C (рис.6.7,б). Колесо 2, яке одночасно знаходиться в зачепленні з опорним колесом 3, змушене обігати по опорному колесу, обертаючись з кутовою швидкістю ω_2 навколо миттєвого центра обертання, який співпадає з точкою D . При цьому, вісь обертання колеса 2, яка проходить через точку A , рухається по колу радіуса OA зі швидкістю $V_A = V_C/2$. Оскільки точка A одночасно

належить і водилу H , то останнє змушене обертатися з кутовою швидкістю ω_H навколо осі, яка проходить через центр кінематичної пари O .

Таким чином, вхідною ланкою механізму є сонячне колесо 1, а вихідною – водило H .

Передаточне відношення планетарного механізму буде дорівнювати відношенню кутових швидкостей вхідної ланки до вихідної:

$$U_{1,H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H}. \quad (6.18)$$

У позначенні передаточного відношення $U_{1,H}^{(3)}$ планетарного механізму в верхньому індексі (в дужках) вказують номер опорного (нерухомого) зубчастого колеса.

Для визначення передатного відношення планетарного механізму використовується *метод обернення руху*. Цей метод полягає в наступному: усім ланкам механізму задається кутова швидкість, рівна за величиною і протилежна за напрямком кутовій швидкості водила ω_H (на рис. 6.7,б напрямок цієї кутової швидкості показано пунктирною лінією). При такому обертанні всього механізму, водило стане нерухомим, тобто стане нерухомою кінематична пари A (вісь обертання колеса 2). Зубчастий механізм із планетарного обернеться в механізм з нерухомими осями обертання зубчастих коліс, який складається з декількох послідовно з'єднаних пар зубчастих коліс (рис. 6.7,с). При цьому, опорне (нерухоме) колесо 3 стане рухомим і буде обертатися з кутовою швидкістю $-\omega_H$. Називається такий механізм *оберненим* до планетарного.

В оберненому механізмі кутові швидкості зубчастих коліс будуть відрізнятися від вихідного планетарного механізму:

$$\begin{aligned}\omega_1^{(H)} &= \omega_1 - \omega_H; \\ \omega_3^{(H)} &= \omega_3 - \omega_H,\end{aligned}\tag{6.18}$$

де $\omega_1^{(H)}$, $\omega_3^{(H)}$ – кутові швидкості 1 і 3 зубчастих коліс в оберненому механізмі (тобто, коли водило H “зупинене”).

Передаточне відношення оберненого механізму від колеса 1 на колесо 3, буде мати вид:

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.\tag{6.19}$$

Враховуючи, що колесо 3 в планетарному механізмі нерухоме ($\omega_3 = 0$), то:

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}.\tag{6.20}$$

Оскільки відношення кутових швидкостей ω_1/ω_H дорівнює передаточному відношенню планетарного механізму $U_{1,H}^{(3)}$, то:

$$U_{1,3}^{(H)} = 1 - U_{1,H}^{(3)},$$

або

$$U_{1,H}^{(3)} + U_{1,3}^{(H)} = 1.\tag{6.21}$$

Таким чином, *сума передаточних відношень планетарного і оберненого механізмів дорівнює одиниці.*

Формула (6.21) називається формулою Вілліса для планетарних механізмів і справедлива для будь-яких планетарних механізмів за умови, що вхідною ланкою є сонячна шестірня, а вихідною – водило.

У загальному виді формула записується наступним чином:

$$U_{i,H}^{(j)} + U_{i,j}^{(H)} = 1, \quad (6.22)$$

де i, j – номери сонячної шестерні і опорного колеса відповідно.

Обернений механізм (рис. 6.7,с) являє собою рядовий зубчастий механізм, у якому колеса 1, 2 у зовнішньому зачепленні, а колеса 2, 3 – у внутрішньому.

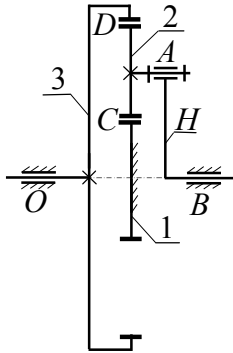


Рис. 6.8.

Відповідно до формули (6.8) його передатне відношення дорівнює:

$$U_{1,3}^{(H)} = (-1)^1 \frac{z_3}{z_1}. \quad (6.23)$$

Тоді передаточне відношення розглянутого планетарного механізму (рис. 6.7,а):

$$U_{1,H}^{(3)} = 1 - U_{1,3}^{(H)} = 1 + z_3/z_1. \quad (6.24)$$

Якщо ж вхідною ланкою планетарного механізму (рис. 6.7,а) буде водило H , а вихідною – колесо 1, то:

$$U_{H,1}^{(3)} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1/\omega_H} = \frac{1}{U_{1,H}^{(3)}} = \frac{1}{1 + z_3/z_1}. \quad (6.25)$$

У планетарному механізмі (рис. 6.8) вхідним є колесо 3, вихідним – водило H , а опорним – колесо 1. Оберненим для даного планетарного механізму буде

механізм показаний на рис. 6.7,с, а передатне відношення дорівнює:

$$U_{3,H}^{(1)} = 1 - U_{3,1}^{(H)}; \quad (6.26)$$

$$U_{3,1}^{(H)} = (-1)^1 (z_1/z_3); \quad (6.27)$$

$$U_{3,H}^{(1)} = 1 + z_1/z_3. \quad (6.28)$$

Потрібно відзначити, що передатне відношення даної схеми, при будь-якому її включенні, додатне, тобто вхідний вал і вихідний вал планетарного редуктора обертаються в одну сторону.

Оскільки зубчасті колеса 1, 2 і 3 розташовані в один ряд, то дану схему планетарного редуктора називають **однорядною**. Коефіцієнт корисної дії цієї передачі досить високий, але практичні діапазони передатних відношень обмежені за величиною і визначаються габаритами редуктора та конструктивними міркуваннями.

В таблиці 6.1 наведені прийняті в практиці проектування діапазони передатних відношень однорядного планетарного редуктора при різних включеннях.

Таблиця 6.1.

Схема включення			Передаточне відношення	Діапазон зміни
вхідне	вихідне	опорне		
1	<i>H</i>	3	$U_{1,H}^{(3)} = 1 + z_3/z_1$	2,3÷9
<i>H</i>	1	3	$U_{H,1}^{(3)} = z_1/(z_1 + z_3)$	0,11÷0,445
3	<i>H</i>	1	$U_{3,H}^{(1)} = 1 + z_1/z_3$	1,12÷1,78
<i>H</i>	3	1	$U_{H,3}^{(1)} = z_3/(z_1 + z_3)$	0,56÷0,9

З таблиці видно, що однорядний планетарний редуктор перебиває з розривами передаточні відношення від 0,11 до 9 (випадають передаточні відношення в діапазонах від 0,9 до 1,12 і від 1,78 до 2,3).

Незважаючи на те, що передатне відношення однорядного планетарного редуктора знаходиться на рівні передатного відношення двоступінчастого редуктора з нерухомими осями обертання зубчастих коліс, планетарний редуктор має свої переваги.

Звичайно в реальному планетарному редукторі встановлюють k симетрично розташованих сателітів (рис. 6.9).

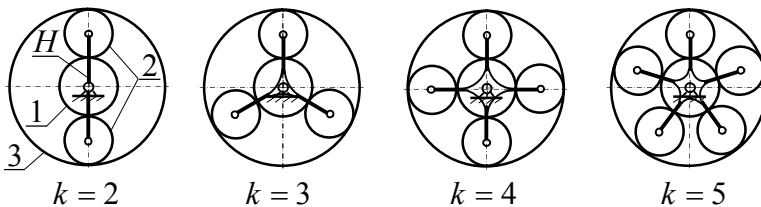


Рис. 6.9.

З точки зору кінематичного аналізу (визначення передаточного відношення) достатньо врахувати тільки один сателіт, оскільки інші є пасивними в кінематичному відношенні.

При передачі моменту між валами, у ступінчастому механізмі все зусилля передається одним зубцем, який у даний момент знаходиться в зачепленні на колесі. У планетарному редукторі зусилля на зубець зубчастого колеса зменшується в k разів, оскільки на кожному сателіті в зачепленні знаходиться по одному зубцю. Оскільки зусилля між зубцями зменшується, то в планетарному механізмі можна зменшити товщину зубця (модуль зубчастого колеса). У результаті, зменшуються габарити механізму (особливо осьові) і зменшується вага

механізму. Крім того, симетричне розташування сателітів розвантажує підшипники центральних коліс і поліпшує зрівноваження водила.

Тому планетарні редуктори, як правило, установлюють на тих ділянках передачі, де крутний момент максимальний.

На закінчення необхідно відзначити, що розглянута схема планетарного редуктора, унаслідок її простоти, найбільш широко використовується в зубчастих механізмах трансмісій сільськогосподарських машин.

Більш складні схеми **дворядних** планетарних механізмів утворюються шляхом застосування спарених сателітів.

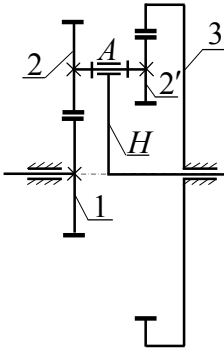


Рис. 6.10.

На рис. 6.10 приведена схема планетарного механізму, яка багато в чому повторює раніше розглянуту однорядну схему.

Однак, у цьому механізмі сателіт являє собою два зубчасті колеса 2 і 2', жорстко насаджених на один вал. Колесо 2 знаходиться в зачепленні з вхідним колесом 1, а колесо 2' – з опорним колесом 3. Вихідна ланка – водило H .

Обернений механізм (рис. 6.11) є ступінчастим зубчастим механізмом, у якому колеса 1, 2 утворюють зовнішнє зачеплення, а колеса 2', 3 – внутрішнє. Відповідно до формули (6.11) його передатне відношення від колеса 1 на колесо 3 дорівнює:

$$U_{1,3}^{(H)} = (-1)^1 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}. \quad (6.31)$$

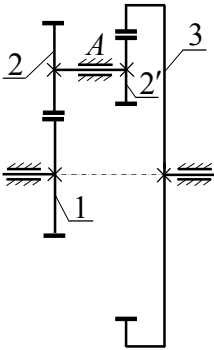


Рис. 6.11.

Згідно формулі (6.21) для планетарного редуктора отримаємо:

$$U_{1,H}^{(3)} = 1 - U_{1,3}^{(H)} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} \quad (6.32)$$

Потрібно відзначити, що передатне відношення даного механізму додатне. Його характеристики багато в чому подібні однорядному планетарному редуктору, але діапазон можливих пере-

датних відношень більший: $2 \leq U_{1,H}^{(3)} \leq 15$.

У планетарному редукторі (рис. 6.10) сателіт входить в одне зовнішнє зачеплення і в одне внутрішнє. На рис. 6.12,а,в показані модифікації дворядного планетарного редуктора, спарений сателіт якого чи входить у два зовнішніх зачеплення (рис. 6.12,а) чи в два внутрішніх (рис. 6.12,в).

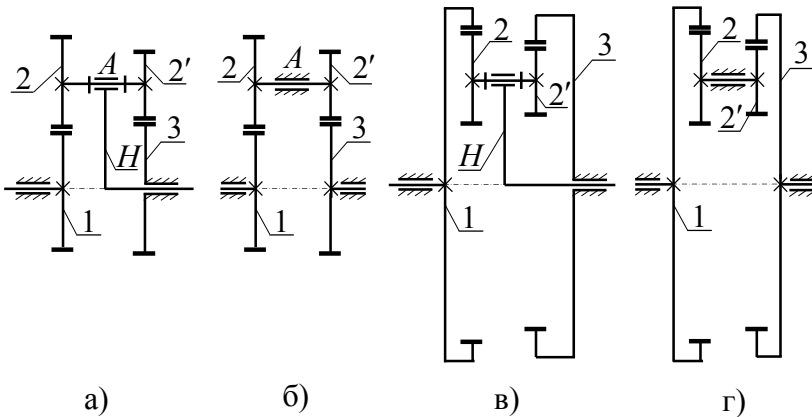


Рис. 6.12.

Обернені механізми в обох модифікаціях являють собою ступінчасті зубчасті механізми, у яких обидві ступені утворюють чи зовнішнє зачеплення (рис. 6.12,б) чи внутрішнє (рис. 6.12,г).

Передатне відношення обернених механізмів від колеса 1 на колесо 3 буде однаковим для обох схем:

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}. \quad (6.33)$$

Тоді передаточне відношення цих планетарних редукторів буде дорівнювати:

$$U_{1,H}^{(3)} = 1 - U_{1,3}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2}. \quad (6.34)$$

З формули (6.34) випливає, що можна підібрати такі числа зубців, при яких передатне відношення $U_{1,H}^{(3)}$ буде мало відрізнятися від нуля.

Наприклад, при $z_3 = 101$, $z_2 = 99$, $z'_2 = z_1 = 100$:

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z'_2} = \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{9999}{10000};$$

$$U_{1,H}^{(3)} = 1 - U_{1,3}^{(H)} = 1 - \frac{9999}{10000} = \frac{1}{10000}.$$

Однак механізм із зазначеним числом зубців при вхідному колесі 1 практично не може бути приведеним у рух унаслідок самогальмування. Якщо вхідною ланкою є водило H , то рух можливий, але з дуже низьким коефіцієнтом корисної дії механізму.

Тому, незважаючи на можливість одержання дуже великих чи дуже малих передатних відношень, планетарні редуктори за такими схемами застосовуються тільки в малопотужних передачах. Звичайно вхідною ланкою є водило, а передаточні відношення $U_{H,1}^{(3)}$ вибираються в межах від 30 до 100 (у рідких випадках до 1500). Перевага віддається схемі з внутрішнім зачепленням (рис. 6.12,в), оскільки вона має трохи більший коефіцієнт корисної дії.

ЛЕКЦІЯ 13

ЗМІСТ

- 6.4. Диференціальні зубчасті механізми.
 - 6.5. Деякі питання синтезу планетарних механізмів.
 - 6.6. Комбіновані зубчасті механізми.
 - 6.5. Хвильові зубчасті передачі.
- Контрольні питання до теми 6.

6.4. Диференціальні зубчасті механізми

Зубчасті механізми, що мають у своєму складі зубчасті колеса з рухомими осями обертання і зі ступінню рухливості рівній двом та більше називаються *диференціальними механізмами* чи просто *диференціалами*.

У диференціальний механізм можна перетворити будь-який планетарний, наприклад зображений на рис. 6.7, якщо звільнити опорне колесо 3 і надати йому можливість обертатися. У такому механізмі (рис. 6.13) усі центральні колеса стануть рухливими. Вали водила H і зубчастого колеса 3 виконані телескопічними, тобто вал водила H обертається усередині вала колеса 3.

Даний механізм включає чотири рухливих ланки: колеса 1, 2, 3 і водило H ($n = 4$); п'ять кінематичних пар п'ятого класу: O (пов'язує ланки 0 і 1), A ($2-H$), B ($0-3$), E ($3-H$) (тобто $p_5 = 4$) і дві кінематичні пари C ($1-2$) та D ($2-3$) четвертої класу ($p_4 = 2$).

Ступінь рухливості механізму дорівнює:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (6.35)$$

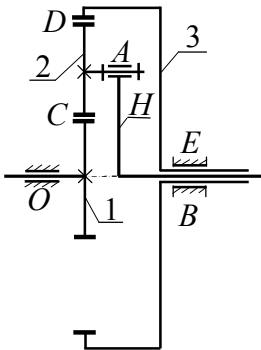


Рис. 6.13.

Оскільки ступінь рухливості W механізму відповідає числу ланок диференціала, яким необхідно задати закон руху щоб одержати визначеність руху всіх інших ланок, то у диференціалі може відбуватися або розкладання руху (з одного ведучого вала на два ведених) або додавання (з двох ведучих на один ведений). Ведучим вважається такий вал, у якого напрямки кутової швидкості і зовнішнього моменту, що до нього прикладений, збігаються.

Таким чином, якщо призначення планетарних механізмів – передавати рух з заданим передаточним відношенням, то *призначення диференціальних механізмів – розкласти або додавати рухи.*

Отже, планетарний редуктор (чи **мультиплікатор**) можна перетворити в диференціал, якщо звільнити опорне колесо і надати йому можливість обертатися. Це так звана *властивість оборотності планетарних механізмів*, яка дозволяє застосовувати однакові методи дослідження і проектування для планетарних та диференціальних механізмів.

Навпаки, будь-який диференціал можна перетворити в планетарний редуктор, якщо закріпити одне з центральних коліс. При цьому, кожному диференціалу буде відповідати два, якщо $W = 2$, планетарних редуктора. Так, якщо в диференціала (рис. 6.13) закріпити колесо 3, то одержимо схему планетарного редуктора, показану на рис. 6.7,а, а якщо закріпити колесо 1, то – схему, показану на рис. 6.8.

Розглянемо кінематику диференціального механізму. Оскільки при кінематичному дослідженні диференціала використовуються ті ж методи, що й у планетарних механізмів, то застосуємо до механізму (рис. 6.13) метод обертання руху (тобто повідомимо всім ланкам диференціала кутову швидкість, рівну за величиною, але протилежну за напрямком кутовій швидкості водила ω_H). У результаті одержимо обернений механізм (аналогічний показаному на рис. 6.7,с) з нерухомими осями обертання зубчастих коліс і для передатного відношення $U_{1,3}^{(H)}$ якого буде справедлива раніше отримана формула (6.19):

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \quad (6.36)$$

де $\omega_3 \neq 0$ – кутова швидкість колеса 3, яке у складі диференціала є рухомим.

Формула (6.36) носить назву формули Вілліса для диференціального механізму і дозволяє встановити зв'язок між кутовими швидкостями вхідних і вихідних ланок диференціального механізму. Якщо відомі, наприклад, кутові швидкості ω_1 і ω_3 центральних коліс 1 і 3, то розв'язавши (6.36) відносно ω_H (кутової швидкості водила H) отримаємо:

$$\omega_H = \frac{\omega_1 - \omega_3 \cdot U_{1,3}^{(H)}}{1 - U_{1,3}^{(H)}}, \quad (6.37)$$

або для даної схеми диференціала з урахуванням (6.23):

$$\omega_H = \frac{\omega_1 + \omega_3 (z_3/z_1)}{1 + z_3/z_1}. \quad (6.38)$$

Диференціальні механізми набули широкого застосування в колісних машинах.

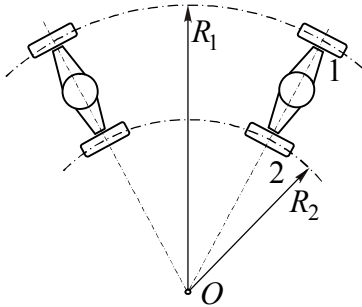


Рис. 6.14.

При повороті ведучих коліс автомобіля (рис. 6.14) колесо 1, що котиться по зовнішній кривій радіуса R_1 , повинне пройти більший шлях, чим колесо 2, що котиться по внутрішній кривій радіуса R_2 . Отже кутова швидкість колеса 1 повинна бути більшою, ніж колеса 2.

Для відтворення руху коліс з різними кутовими швидкостями і застосовується диференціал. На рис. 6.15 показаний такий диференціал, виконаний на конічних колесах.

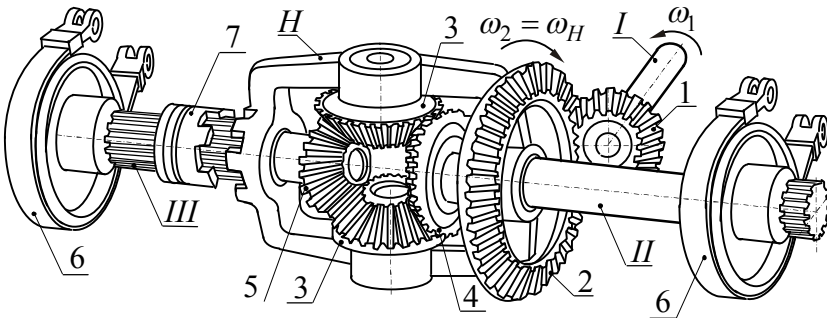


Рис. 6.15.

Конічному зубчастому колесу 1 (валу I) обертальний рух задається від двигуна через коробку швидкостей. Зубчасте колесо 1 входить у зачеплення з конічним зубчастим колесом 2, яке жорстко закріплене на водилі H. Водило разом з зубчастим колесом 2 вільно обертається навколо півосей II і III. В середині водила

H на своїх осях вільно обертаються два однакових конічних сателіта 3, які знаходяться в зачепленні з двома однаковими зубчастими колесами 4 і 5, що насаджені на півосі II і III .

Якщо колеса автомобіля рухаються по прямолінійних траєкторіях, то сателіти 3 не повертаються навколо своїх осей. Водило H разом із сателітами 3 і півосями II та III обертаються як одне ціле з кутовою швидкістю зблокованого з водилом зубчастого колеса 2. Як тільки кожне з коліс автомобіля почне рухатися по своїй криволінійній траєкторії різного радіуса (рис. 6.14) сателіти почнуть повертатися навколо своїх осей. Зубчастий механізм почне працювати як диференціальний і буде перерозподіляти кутові швидкості між півосями II і III .

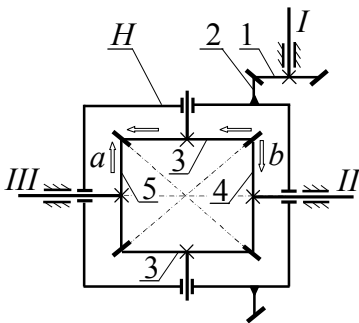


Рис. 6.16.

Схема даного диференціального механізму показана на рис. 6.16.

Запишемо формулу Вілліса (6.36) для диференціального механізму (рис. 6.16), у якого колеса 4 і 5 є центральними:

$$U_{4,5}^{(H)} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_5 - \omega_H}. \quad (6.39)$$

Оскільки в оберненому механізмі (при “зупиненому” водилі H) центральне колесо 4 в зачепленні з колесом 3, яке в свою чергу в зачепленні з колесом 5, то передаточне відношення оберненого механізму дорівнює:

$$U_{4,5}^{(H)} = U_{4,3}^{(H)} U_{3,5}^{(H)} = \frac{z_3}{z_4} \frac{z_5}{z_3} = \frac{z_5}{z_4}. \quad (6.40)$$

Враховуючи, що $z_4 = z_5$, то:

$$U_{4,5}^{(H)} = -1. \quad (6.41)$$

Передаточне відношення від'ємне тому, що стрілки a і b коліс 4 і 5 (рис. 6.16) не збігаються за напрямком.

Остаточно з формули (6.39) дістанемо:

$$\omega_4 + \omega_5 = 2\omega_H. \quad (6.42)$$

Таким чином, якщо колеса автомобіля рухаються по прямолінійним траєкторіям ($\omega_4 = \omega_5$), то одержимо:

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_H,$$

тобто колеса автомобіля обертаються з кутовою швидкістю водила H . Якщо одне з коліс, наприклад, колесо на II півосі, зупинити ($\omega_4 = 0$), то:

$$\omega_5 = 2\omega_H,$$

тобто колесо на III півосі буде обертатися з подвоєною кутовою швидкістю водила H .

При русі коліс по криволінійним траєкторіям (рис. 6.14) кутові швидкості коліс повинні бути пропорційні радіусам кривизни траєкторій, тобто:

$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \text{або} \quad \omega_4 = \omega_5 \frac{R_1}{R_2}.$$

Підставивши дане рівняння в формулу (6.42) одержимо:

$$\omega_5 = \frac{2\omega_H R_2}{R_1 + R_2}; \quad \omega_4 = \frac{2\omega_H R_1}{R_1 + R_2}.$$

Таким чином, кутові швидкості коліс при їх русі по криволінійним траєкторіям однозначно визначаються кутовою швидкістю водила H диференціала і радіусами кривизни траєкторій.

На одній з півосей диференціала (рис. 6.15), крім гальмівного барабана 6, установлена муфта блокування 7. При включенні муфти 7 блокуються піввісь III і водило H . Сателіти 3 при цьому обертаються навколо своїх осей не можуть і півосі II і III разом з водилом H обертаються як одне ціле з кутовою швидкістю ω_H незалежно від траєкторії коліс автомобіля.

Вище були розглянуті деякі види диференціальних механізмів. Оскільки ступінь рухливості цих диференціалів дорівнює двом, то вони мають дві вхідні або дві вихідні ланки. У техніці застосовуються механізми, що складаються із диференціала, між вхідними (або вихідними) ланками якого встановлений додатковий зубчастий механізм з нерухомими осями обертання коліс. Цей додатковий зубчастий механізм встановлює співвідношення між кутовими швидкостями вихідних ланок диференціального механізму. В цілому такий механізм має ступінь рухливості рівну одиниці, тобто стає складним планетарним. Такі механізми називають **замкнутими диференціальними механізмами**.

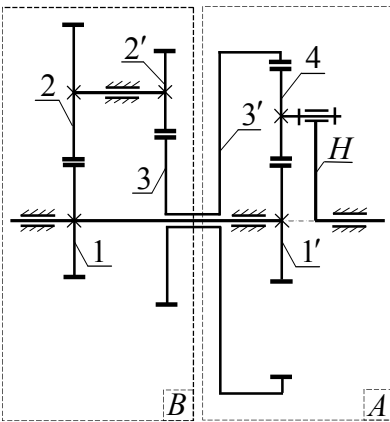


Рис. 6.17.

На рис. 6.17 показаний механізм диференціала (частина A), у якого центральні колеса $1'$ і $3'$ замкнуті додатковим зубчастим механізмом ($1-2, 2'-3$) з нерухомими осями обертання зубчастих коліс (частина B). В такому диференціальному механізмі кутова швидкість колеса $3'$ стає залежною від кутової швидкості колеса $1'$, а ступінь рухливості диферен-

ціала разом з замикаючою частиною стає рівною одиниці.

При визначенні передатного відношення $U_{1,H}$ від вхідного вала колеса 1 до вихідного вала водила H , механізм (рис. 6.17) зручно розглядати по частинам. Першою розглянемо диференціальну частину (частину A), що складається з центральних зубчастих коліс $1'$, $3'$, сателіта 4 і водила H .

Для цієї частини механізму можна записати формулу Вілліса (6.36):

$$U_{1',3'}^{(H)} = \frac{\omega_1' - \omega_H}{\omega_3' - \omega_H}. \quad (6.43)$$

Якщо врахувати, що колеса 1, $1'$ і 3, $3'$ спарені ($\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_3 = \omega_3'$), то:

$$U_{1',3'}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (6.44)$$

Для визначення передаточного відношення $U_{1,H} = \omega_1/\omega_H$, розділимо чисельник і знаменник формули (6.44) на ω_H :

$$U_{1',3'}^{(H)} = \frac{\omega_1/\omega_H - 1}{\omega_3/\omega_H - 1} = \frac{U_{1,H} - 1}{\omega_3/\omega_H - 1}. \quad (6.45)$$

Відношення кутових швидкостей ω_3/ω_H , яке записано в знаменнику формули (6.45), перетворимо до наступного виду:

$$\frac{\omega_3}{\omega_H} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_H} = U_{3,1} \cdot U_{1,H}, \quad (6.46)$$

де $U_{3,1} = \omega_3/\omega_1$ – передаточне відношення від колеса 3 до колеса 1.

Передаточне відношення $U_{3,1}$ являє собою передаточне відношення замикаючого зубчастого механізму 1–2, 2'–3 (частини B).

Тоді формула (6.45) набуде виду:

$$U_{1',3'}^{(H)} = \frac{U_{1,H} - 1}{U_{3,1} \cdot U_{1,H} - 1}. \quad (6.47)$$

Розв'язавши (6.47) відносно $U_{1,H}$ отримаємо:

$$U_{1,H} = \frac{U_{1',3'}^{(H)} - 1}{U_{3,1} \cdot U_{1',3'}^{(H)} - 1}. \quad (6.48)$$

Передаточні відношення у лівій частині рівняння (6.48) можуть бути визначені через відомі числа зубців зубчастих коліс механізму. Передатне відношення $U_{1',3'}^{(H)}$ оберненого до диференціальної частини механізму, що являє собою рядове зачеплення зубчастих коліс 1', 4, 3' дорівнює:

$$U_{1,3}^{(H)} = (-1)^1 \frac{z'_3}{z'_1}. \quad (6.49)$$

Передатне відношення $U_{3,1}$ замикаючого зубчастого механізму 1–2, 2'–3, який є ступінчастим з двома зовнішніми зачепленнями, дорівнює:

$$U_{3,1} = (-1)^2 \frac{z_1 \cdot z'_2}{z_2 \cdot z_3}. \quad (6.50)$$

Таким чином, для механізму, що розглядається, дістанемо:

$$U_{1,H} = \frac{z'_3/z'_1 + 1}{\frac{z_1 \cdot z'_2 \cdot z'_3}{z_2 \cdot z_3} + 1}. \quad (6.51)$$

6.5. Деякі питання синтезу планетарних механізмів

При синтезі планетарного механізму крім забезпечення заданого передатного відношення, необхідним є дотримання ряду умов: *співвісності*, *сусідства* і *складання*.

1. Умова співвісності

Якщо вісь O_H обертання водила H (рис.6.18), вісь обертання колеса 1 – O_1 і вісь симетрії колеса 3 геометрично збігаються, то в такому механізмі умова *співвісності* виконується. Співвісність для планетарних і диференціальних механізмів є обов'язковою, інакше сателіти не зможуть обігати по центральним колесам.

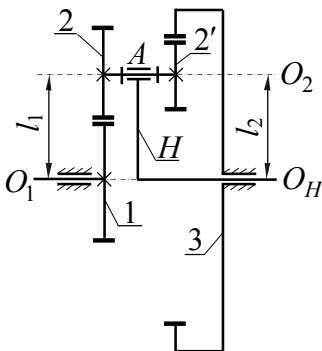


Рис. 6.18.

Умовою співвісності для механізму, зображеного на рис. 6.18, є рівність відстаней l_1 між осями обертання коліс 1 і 2, та l_2 між осями обертання колеса 2' і водила H . Враховуючи, що:

$$l_1 = r_{w1} + r_{w2}; \quad l_2 = r_{w3} - r'_{w2},$$

то умова співвісності буде мати вид:

$$r_{w1} + r_{w2} = r_{w3} - r'_{w2}. \quad (6.52)$$

В рівнянні (6.52) r_{w1} , r_{w2} , r_{w3} , r'_{w2} радіуси початкових кіл зубчастих коліс 1, 2, 3, 2' відповідно.

При проектуванні планетарних механізмів часто використовують або нульові колеса або рівнозміщену систему виправлення. У цьому випадку міжосьова

відстань пари зубчастих коліс дорівнює сумі ділительних радіусів. Тоді умова співвісності буде мати вид:

$$r_1 + r_2 = r_3 - r'_2, \quad (6.53)$$

де r_1 , r_2 , r_3 і r'_2 – радіуси ділительних кіл зубчастих коліс 1, 2, 3 і 2'.

Використовуючи формулу (5.2) для ділительного радіуса, виразимо радіуси ділительних кіл зубчастих коліс через їх модулі і числа зубців:

$$m_I z_1 / 2 + m_I z_2 / 2 = m_{II} z_3 / 2 - m_{II} z'_2 / 2, \quad (6.54)$$

де m_I та m_{II} – модулі пар зубчастих коліс 1, 2 та 2', 3 відповідно.

Дуже часто при проектуванні планетарних і диференціальних механізмів модуль для всіх пар зубчастих коліс приймають однаковим ($m_I = m_{II} = m$). Тоді, після скорочення на модуль, умова співвісності (6.54) буде мати вид:

$$z_1 + z_2 = z_3 - z'_2. \quad (6.55)$$

Таким чином, числа зубців зубчастих коліс даного планетарного механізму крім формули (6.32), для передаточного відношення, повинні задовольняти і умові співвісності (6.55).

Якщо порівняти рівняння (6.53) і (6.55), то можна зробити висновок, що умови співвісності, виражені через радіуси і через числа зубців зубчастих коліс, мають однаковий вид.

Для однорядного планетарного механізму (рис.6.7,а) відстань від осі обертання колеса 1 до осі обертання сателіта 2 дорівнює сумі радіусів ділительних кіл коліс 1 і 2, а відстань від осі обертання водила H до осі обертання сателіта 2 дорівнює різниці радіусів ділительних

кіл коліс 3 і 2. Тоді умова співвісності такого механізму буде мати вид:

$$z_1 + z_2 = z_3 - z_2 \quad \text{або} \quad z_3 = z_1 + 2z_2. \quad (6.56)$$

В дворядному планетарному редукторі з зовнішнім зачепленням (рис. 6.12,а) відстані як від осі обертання колеса 1 до осі обертання сателіта 2 так і від осі обертання водила H до осі обертання сателіта 2' дорівнюють сумі відповідних радіусів, отже, умова співвісності для такого механізму буде мати вид:

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_2'. \quad (6.57)$$

2. Умова сусідства

Як відзначалося раніше, для зменшення габаритів механізму, поліпшення зрівноважування водила, зменшення навантажень на підшипники центральних коліс і т.д. у планетарному редукторі встановлюють k симетрично розташованих сателітів. У зв'язку з цим постає питання про максимально можливе число сателітів, яке можна установити в планетарному механізмі. Оскільки всі сателіти розташовуються в одній площині, то кола вершин зубців сателітів не повинні перетинатися, інакше сателіти будуть зачіпати один за другий під час свого руху.

На рис. 6.19 показано граничне положення двох сателітів з центрами в точках A і B , кола вершин зубців яких (пунктирні кола) дотикаються. Кут φ між осями сателітів дорівнює:

$$\varphi = 2\pi/k. \quad (6.58)$$

В трикутнику OAB :

$$AB = 2(OA) \sin \frac{\varphi}{2} = 2(r_1 + r_2) \sin \frac{\pi}{k}, \quad (6.59)$$

де r_1 і r_2 – радіуси ділільних кіл зубчастих коліс 1 і 2.

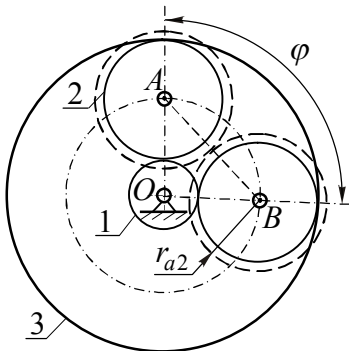


Рис. 6.19.

Оскільки, у граничному положенні, тобто при дотиканні кіл вершин зубців сателітів (рис. 6.19) радіусом r_{a2} , відстань $AB = 2r_{a2}$, то сателіти не будуть зачіпатися один за другий коли буде виконуватися нерівність $AB > 2r_{a2}$ або:

$$(r_1 + r_2) \sin \frac{\pi}{k} > r_{a2}. \quad (6.60)$$

Враховуючи формули $r = mz/2$ для радіусів r_1 і r_2 ділильних кіл та $r_{a2} = r_2 + m$ для радіуса кола вершин зубців сателіта, остаточно одержимо:

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > (z_2 + 2). \quad (6.61)$$

Умова (6.61), при виконанні якої сателіти не будуть зачіпати один за другий, називається **умовою сусідства**. Дана умова дозволяє визначити максимальне число сателітів, яке можна установити в планетарному чи диференціальному механізмі.

3. Умова складання

При складанні планетарного редуктора перший поставлений сателіт цілком визначає взаємне розташування центральних кіл, і якщо не виконати деяких вимог, то при установленні наступних сателітів їх зубці можуть бути не точно напроти западин одного з центральних кіл. Здійснити складання такого механізму буде неможливо. Тому необхідно так підібрати числа зубців кіл планетарного механізму, щоб зубці всіх сателітів точно увійшли в западини центральних кіл.

Розглянемо планетарний механізм, що зображений на рис. 6.20. Точки дотику ділильного кола колеса 1 з ділильними колами двох сусідніх сателітів 2 позначимо як A і B , а точки дотику ділильного кола колеса 3 з ділильними колами тих же сателітів позначимо як C і D .

Визначимо суму довжин дуг $\cup AB$ і $\cup CD$:

$$\cup AB + \cup CD = \frac{tz_1}{k} + \frac{tz_3}{k}, \quad (6.62)$$

де t – крок зубчастого колеса;

k – число сателітів.

З іншої сторони довжину дуги $\cup AB$ можна представити кратною n -му числу кроків t плюс деякий залишок $S_1 < t$, а дугу $\cup CD$ – p -му числу кроків плюс залишок $S_2 < t$:

$$\cup AB + \cup CD = n \cdot t + p \cdot t + S_1 + S_2, \quad (6.63)$$

де n і p – цілі числа.

Прирівнявши (6.62) і (6.63) отримаємо:

$$z_1 + z_3 = k(n + p) + k \left(\frac{S_1 + S_2}{t} \right). \quad (6.64)$$

Враховуючи, що ліва частина рівняння (6.64) є цілим числом, то і права частина повинна бути цілим числом. Це буде можливо, якщо $S_1 + S_2 = t$, оскільки $S_1 < t$ і $S_2 < t$. Підставивши в рівняння (6.64) $S_1 + S_2 = t$, одержимо:

$$z_1 + z_3 = k(n + p + 1), \quad (6.65)$$

або

$$z_1 + z_3 = k \cdot P, \quad (6.66)$$

де $P = n + p + 1$ – ціле число.

Отриману умову складання (6.66) можна сформулювати в такий спосіб: *сума зубців центральних коліс повинна бути кратною числу сателітів.*

6.6. Комбіновані зубчасті механізми

У машинобудуванні часто зустрічаються зубчасті механізми, до складу яких входять одночасно рядові, ступінчасті, планетарні і диференціальні механізми. Такі зубчасті механізми називають *комбінованими*. При визначенні передатного відношення таких механізмів необхідно спочатку проаналізувати їх склад, визначити передатне відношення складових механізмів, а потім визначити передатне відношення всього комбінованого механізму в цілому. Розглянемо це питання на прикладах.

На рис. 6.21 показаний зубчастий механізм трансмісії трактора К-700. Механізм включає: коробку швидкостей (частина *A*), осі обертання зубчастих коліс якої нерухомі; диференціальний механізм на конічних колесах (частина *B*) і кінцеві планетарні передачі (частини *C* і *C'*).

Зміна передатного відношення між валами *I* і *II* коробки швидкостей здійснюється за допомогою гідравлічних муфт M_1 , M_2 і т.д., які жорстко з'єднують з валом *I* зубчасті колеса 1, 2 і т.д., тим самим вводячи в передачу пари зубчастих коліс 1–5, 2–6 і т.д. Зміна передатного відношення між валами *II*–*III* і *III*–*IV* здійснюється введенням у зачеплення тих чи інших зубчастих коліс шляхом їх осевого зміщення. Наприклад, при зміщенні зблокованих зубчастих коліс 14, 15 праворуч на *III* валі в зачеплення між *II* і *III* валом буде введена пара зубчастих коліс 10–14, а ліворуч – 9–15.

Визначимо передаточне відношення коробки швидкостей (частини *A*) на одній з передач заднього ходу, якщо порядок включення зубчастих коліс наступний:

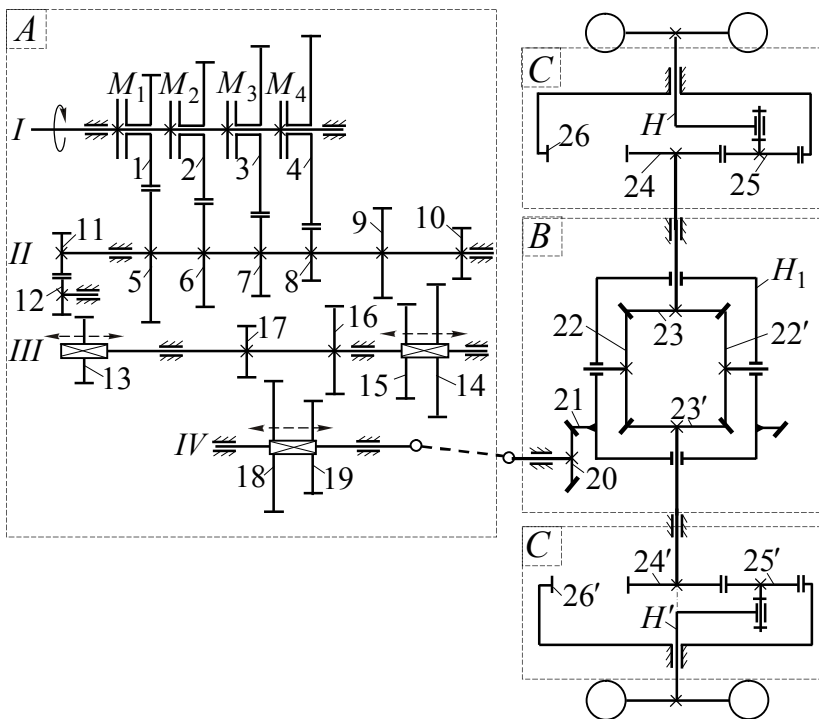


Рис. 6.21.

1 – 5; 11 – 12 – 13; 16 – 19.

Зубчастий механізм, що працює на цій передачі, включає: пару зубчастих коліс 1–5; рядовий механізм 11–12–13, який утворюється після введення в зачеплення колеса 13 при його зміщенні ліворуч на *III* валі, і пари зубчастих коліс зовнішнього зачеплення. Передатне відношення коробки швидкостей (частини *A*) на цій передачі:

$$U_A = U_{1,19} = U_{1,5} \cdot U_{11,13} \cdot U_{16,19} = \\ = \left[(-1)^1 \frac{z_5}{z_1} \right] \cdot \left[(-1)^2 \frac{z_{13}}{z_{11}} \right] \left[(-1)^1 \frac{z_{19}}{z_{16}} \right] = \frac{z_5 \cdot z_{13} \cdot z_{19}}{z_1 \cdot z_{11} \cdot z_{16}}.$$

Передатне відношення додатне, отже на цій передачі вхідний вал *I* і вихідний вал *IV* обертаються в одну сторону.

Передаточні відношення диференціального механізму при прямолінійних траєкторіях руху коліс трактора на вал колеса 23 і на вал колеса 23' (рис. 6.21 частина *B*) дорівнюють одиниці. Тому, передаточне відношення части *B* механізму дорівнює передаточному відношенню пари конічних зубчастих коліс 20 – 21 приводу водила *H*₁ диференціала:

$$U_B = U_{20,21} = z_{21}/z_{20}.$$

Визначимо передатне відношення частини *C* кінцевого планетарного механізму. Запишемо формулу Віллеса (6.21) для планетарного механізму з огляду на те, що сонячним є колесо 24, а опорним – 26

$$U_{24,H}^{(26)} + U_{24,26}^{(H)} = 1.$$

Оскільки обернений механізм являє собою рядове з'єднання зубчастих коліс 24 – 25 – 26 з одним зовнішнім (24 – 25) і одним внутрішнім (25 – 26) зачепленням:

$$U_{24,26}^{(H)} = (-1)^1 \frac{z_{26}}{z_{24}}.$$

Тоді:

$$U_C = U_{24,H}^{(26)} = 1 - U_{24,26}^{(H)} = 1 + \frac{z_{26}}{z_{24}}.$$

Передатне відношення планетарного механізму додатне, отже, сонячна шестірня 24 і водило H обертаються в одну сторону. Оскільки частини C і C' однакові, то їх передаточні відношення рівні між собою.

Остаточно для передатного відношення зубчастого механізму трансмісії трактора на цій передачі одержимо:

$$U_{I,H} = |U_A| \cdot |U_B| \cdot |U_C| = \frac{z_5 \cdot z_{13} \cdot z_{19} \cdot z_{21}}{z_1 \cdot z_{11} \cdot z_{16} \cdot z_{20}} \left(1 + \frac{z_{26}}{z_{24}} \right).$$

На рис.6.22 показаний зубчастий механізм трансмісії гусеничного трактора. Механізм включає: коробку швидкостей (частина A), осі обертання зубчастих коліс якої нерухомі; механізм повороту трактора (частина B) і кінцеві передачі, кожна із яких складається із пари зубчастих коліс (частини C і C').

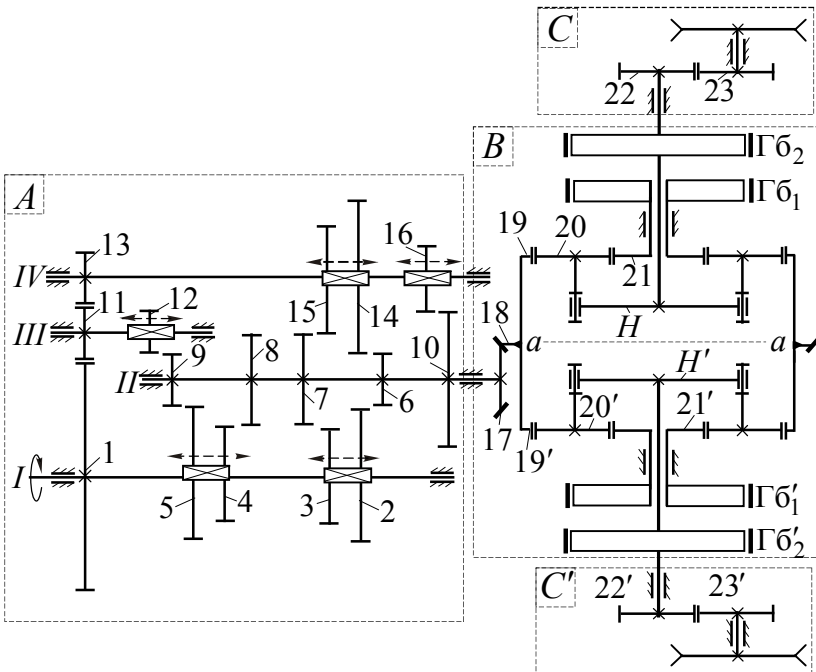


Рис. 6.22.

Зміна передатного відношення між валами $I - II$, $III - II$ і $IV - II$ коробки швидкостей (частина A) здійснюється введенням у зачеплення тих чи інших зубчастих коліс шляхом їхнього осевого зміщення на відповідному валі. Визначимо передатне відношення коробки швидкостей на одній із передач, якщо порядок включення зубчастих коліс наступний: 1–11–13; 16–10.

Зубчастий механізм, що працює на цій передачі, включає: рядовий механізм 1–11–13 і пару зубчастих коліс 16–10, який утвориться після введення в зачеплення колеса 16 при його зміщенні праворуч на IV валі. Усі пари зубчастих коліс зовнішнього зачеплення. Передатне відношення коробки швидкостей (частини A) на цій передачі дорівнює:

$$U_A = U_{1,10} = U_{1,13} \cdot U_{16,10} = \left[(-1)^2 \frac{z_{13}}{z_1} \right] \left[(-1)^1 \frac{z_{10}}{z_{16}} \right] = -\frac{z_{13} \cdot z_{10}}{z_1 \cdot z_{16}}.$$

Передаточне відношення від'ємне. Таким чином, на цій передачі вхідний вал I і вихідний вал II коробки швидкостей обертаються в різні сторони.

Зубчастий механізм зображений у частині B одержав назву планетарного механізму повороту трактора. Механізм складається з двох дзеркально встановлених однорядних диференціальних механізмів 19, 20, 21, H і 19', 20', 21', H' . Обертання на заблоковані центральні колеса 19, 19' диференціальних механізмів передається через пару конічних коліс 17–18 від вихідного вала II коробки швидкостей. Вихідними валами механізму повороту є вали водил H і H' . Керування роботою кожного з диференціальних механізмів здійснюється за допомогою двох гальмівних барабанів $\Gamma_{б1}$, $\Gamma_{б2}$ і $\Gamma_{б1}'$,

Гб₂'. Гальмівні барабани Гб₁ і Гб₁' з'єднані з центральними зубчастими колесами 21 і 21', а барабани Гб₂ і Гб₂' – з водилами H і H' . Розглянемо роботу цього механізму.

1. Включено гальмівні барабани Гб₁ і Гб₁'. Центральні колеса 21 і 21' зупинені, тобто стають нерухомими опорними колесами і диференціальні механізми працюють як планетарні. Передаточні відношення цих планетарних механізмів рівні між собою і визначаються за формулою Вілліса:

$$U_{19,H}^{(21)} + U_{19,21}^{(H)} = 1.$$

Враховуючи, що обернений механізм для планетарного являє собою рядове з'єднання зубчастих коліс 19, 20, 21, з одним внутрішнім (19 – 20) і одним зовнішнім (20 – 21) зачепленням, то:

$$U_{19,21}^{(H)} = (-1)^1 z_{21}/z_{19}.$$

Тоді, передаточне кожного з планетарних механізмів дорівнює:

$$U_{19,H}^{(21)} = 1 - U_{19,21}^{(H)} = 1 + \frac{z_{21}}{z_{19}}.$$

У цьому випадку водила H і H' обертаються з однаковими кутовими швидкостями, а трактор рухається прямолінійно.

2. Включений тільки гальмівний барабан Гб₁. Диференціал 19, 20, 21, H працює в планетарному режимі зі сталим передаточним відношенням $U_{19,H}^{(21)}$. Механізм 19', 20', 21', H' працює в диференціальному режимі. Розподілення кутових швидкостей між водилом

H' і центральним колесом $21'$ визначається моментами опору на валах цих ланок. Поворот трактора по траєкторії з довільним радіусом в бік тієї частини, яка працює в диференціальному режимі. Причому чим більший момент опору на валі водила H' , тим менший радіус повороту.

3. Включені гальмівні барабани $\Gamma б_1$ і $\Gamma б'_2$. Механізм 19, 20, 21, H працює в планетарному режимі зі сталим передаточним відношенням $U_{19,H}^{(21)}$. Оскільки гальмівним барабаном \tilde{A}'_2 водило H' зупинене, то колеса $19'$, $20'$, $21'$ утворюють рядовий зубчастий механізм. Поворот трактора с мінімальним радіусом в сторону зупиненого водила.

4. Включено гальмівні барабани $\Gamma б_2$ і $\Gamma б'_2$. Водила H і H' зупинені, колеса 19, 20, 21 і $19'$, $20'$, $21'$ працюють як рядові зубчасті механізми. Трактор зупинений.

Таким чином, передатне відношення механізму трансмісії в цілому можна визначити тільки коли диференціальні механізми переведені у планетарний режим роботи.

Якщо врахувати, що:

$$U_B = U_{17,18} \cdot U_{19,H}^{(21)} = \frac{z_{18}}{z_{17}} \left(1 + \frac{z_{21}}{z_{19}} \right) \quad \text{і} \quad U_C = -\frac{z_{23}}{z_{22}},$$

то

$$U_{I,H} = |U_A| \cdot |U_B| \cdot |U_C| = \frac{z_{13} \cdot z_{10} \cdot z_{18}}{z_1 \cdot z_{16} \cdot z_{17}} \left(1 + \frac{z_{21}}{z_{19}} \right) \frac{z_{23}}{z_{22}}.$$

6.5. Хвильові зубчасті передачі

Хвильова зубчаста передача (рис. 6.23,а) відрізняється від інших зубчатих механізмів тим, що одна її ланка – гнучке колесо – зазнає хвильову деформацію, за рахунок якої відбувається передача обертального руху. Хвильова передача складається з трьох ланок: *гнучкого зубчастого колеса 1*, *жорсткого колеса 2* і *генератора хвиль b* . Вхідним валом є вал генератора хвиль b , а вихідним – вал гнучкого зубчастого колеса 1.

Гнучке зубчасте колесо 1 (число зубців z_1) являє собою тонкостінну оболонку, на одному кінці якої нарізаний зубчастий профіль із зовнішнім зачепленням, а другий кінець з'єднаний з вихідним валом. Кінець оболонки, на якому нарізаний зубчастий профіль, деформується на величину Δ (рис. 6.23,б) генератором хвиль b , що вставлений усередину оболонки в цій зоні.

На жорсткому колесі 2 (число зубців z_2) нарізаний зубчастий профіль із внутрішнім зачепленням.

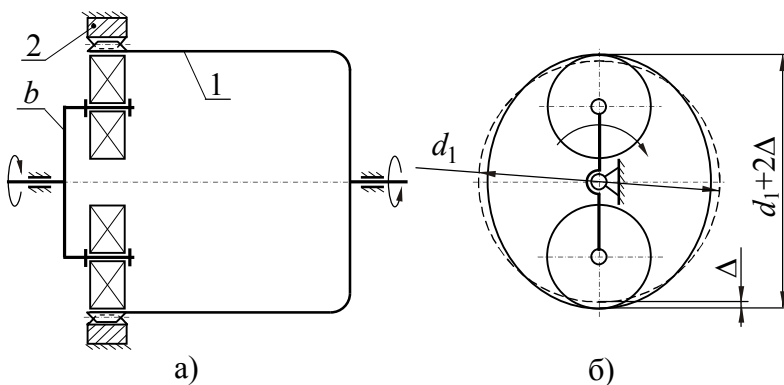


Рис. 6.23.

Генератор хвиль служить для утворення і руху хвилі деформації на гнучкому зубчастому колесі. Генератори хвиль бувають роликowymi (два або чотири ролика), дискові і кулачкові. Найчастіше застосовуються з двома роликами, у яких числа зубців гнучкого і жорсткого коліс пов'язані співвідношенням $z_2 - z_1 = 2$.

При обертанні генератора кожна хвиля деформації біжить по периметру гнучкого колеса, у результаті кожен зубець гнучкого колеса двічі входить в зачеплення. За один оборот генератора кут повороту вхідного вала дорівнює $\varphi_b = 2\pi$. Вал гнучкого колеса, при цьому, повернеться в протилежну сторону на кут, який дорівнює добутку кутового кроку гнучкого колеса на різницю між числом зубців 1 і 2 колеса:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{z_1}(z_1 - z_2), \quad (6.67)$$

де $\frac{2\pi}{z_1}$ – кутовий крок гнучкого колеса.

Якщо поділити кути повороту на час, то можна перейти до кутових швидкостей. Тоді передатне відношення від генератора хвиль до гнучкого колеса при нерухомому жорсткому:

$$U_{b,1} = \frac{\varphi_b/t}{\varphi_1/t} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{z_1}(z_1 - z_2)} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}. \quad (6.68)$$

Рівняння (6.68) показує, що передатне відношення хвильової зубчастої передачі залежить тільки від чисел зубців зубчастих коліс 1 і 2.

Величина деформації гнучкого колеса відносно мала і для сталі по відношенню до дільного діаметра

складає $\Delta/d_1 = 0,003 \dots 0,015$. Таке відношення Δ до d_1 відповідає великому числу зубців на колесі. Мала ж величина деформації визначає малу різницю між ділільними радіусами гнучкого та жорсткого коліс, і як наслідок, невелику різницю між числом зубців цих коліс. При таких величинах Δ , z_1 і z_2 зазори між зубцями в зоні деформації малі, завдяки чому одночасно в зачепленні знаходиться велике число пар зубців (до 40%).

З вищесказаного можна відзначити наступні особливості хвильових зубчастих передач:

- велике передаточне відношення (в передачах зі сталевим гнучким колесом $U_{b,1} = 50 \div 300$);
- при одночасному зачепленні великого числа зубців на колесах передача може сприймати великі навантаження при відносно малих габаритах та вазі;
- гнучке колесо можна виготовити у вигляді глухої оболонки і зробити хвильовий механізм, що передає обертання з одного середовища в інше без рухливих ущільнень;
- коефіцієнт корисної дії цих передач досить високий і лежить у межах $70 \div 85\%$.

Контрольні питання до теми 6

1. Чим відрізняються рядовий зубчастий механізм від ступінчастого?
2. Як визначити передаточне відношення рядового і ступінчастого зубчастих механізмів?
3. У якому зубчастому механізмі є паразитні колеса?

4. Чим відрізняється планетарний зубчастий механізм від диференціального?
5. Який зубчастий механізм називають оберненим?
6. У чому полягає умова співвісності для планетарних і диференціальних механізмів?
7. Як визначити передаточне відношення планетарного редуктора?
8. Якою умовою визначається максимальне число сателітів у планетарному механізмі?
9. Як називаються зубчасті колеса, що входять до складу планетарного механізму?
10. Які зубчасті механізми називають комбінованими?
11. До складу яких зубчастих механізмів входять сателіти?
12. Які зубчасті механізми називаються хвильовими?
13. Які зубчасті механізми повинні задовольняти умові складання?
14. До складу якого зубчастого механізму входить гнучке зубчасте колесо і генератор хвиль?
15. Які механізми називають замкнутими диференціальними механізмами?
16. Що означає від'ємне передаточне відношення зубчастого механізму?
17. При прямолінійному русі гусеничного трактора в якому режимі працюють диференціальні частини механізму повороту?

ЛЕКЦІЯ 14

ЗМІСТ

7. Синтез кулачкових механізмів.

- 7.1. Призначення і класифікація плоских кулачкових механізмів.
- 7.2. Фазова діаграма кулачкового механізму.
- 7.3. Вихідні дані, що необхідні для синтезу кулачкового механізму.
- 7.3. Закони руху вихідної ланки кулачкового механізму.

7.1. Призначення і класифікація плоских кулачкових механізмів

Для виконання робочого процесу в складі машини часто необхідно мати пристрої, рух вихідних ланок яких повинен здійснюватися строго за заданим законом і бути погодженим з рухом інших механізмів машини. Найбільш простими, надійними і компактними для виконання такої задачі є *кулачкові механізми*, які дозволяють реалізувати практично будь-який закон руху вихідної ланки, включаючи і періодичну її зупинку, при безупинному русі вхідної ланки.

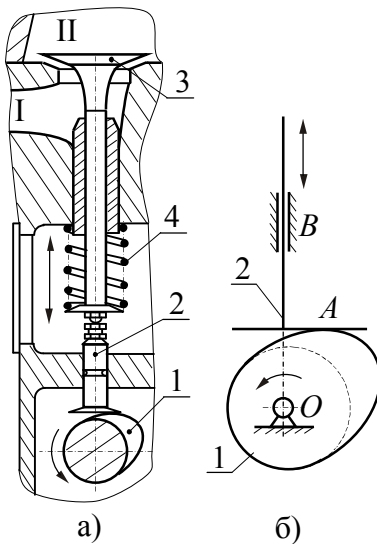
Кулачкові механізми знайшли своє застосування в двигунах внутрішнього згоряння, для приводу клапанів системи газорозподілу, у текстильних машинах, у машинах-автоматах і т.д.

Кулачковим називають механізм, вхідна ланка якого (*кулачок* 1), що має робочу поверхню змінної кривизни, взаємодіє з іншою рухомою ланкою (*штовхачем* 2), утворюючи вищу кінематичну пару *A* (рис. 7.1, 7.4).

Розглянемо роботу кулачкового механізму (рис. 7.1,а) в газорозподільній системі двигуна внутрішнього згоряння.

Цей механізм служить для відкриття і закриття клапанів, що дозволяє наповнювати циліндри двигуна пальною сумішшю (чи повітрям), випускати відпрацьовані гази та ізолювати камеру згоряння від навколишнього середовища під час тактів стискання і розширення.

Робочий процес такого механізму полягає в тому, щоб при обертанні кулачка 1 протягом деякого кута його повороту клапан 3 був відкритий (піднятий), а протягом іншої частини обороту – закритий. При відкритому клапані простори I та II сполучаються, і з простору I в простір II надходить суміш парів бензину з повітрям (якщо клапан впускний), чи продукти згоряння з простору II випускаються в атмосферу через простір I (якщо клапан випускний).



Профіль кулачка 1 повинен забезпечувати не тільки підйом і посадку клапана 3 на сідло в певні моменти часу, але повинен витримувати і задану висоту його підйому. Крім цього, профіль кулачка повинен забезпечувати, по можливості, такий рух деталей механізму щоб уникнути швидкого зношування поверхонь дотику клапана 3 з сідлом і штовхача 2 з кулачком 1.

Рис. 7.1.

Усі кулачкові механізми можуть бути розділені на дві основні групи: **плоскі** (рис. 7.1,а), у яких усі точки ланок рухаються в одній чи декількох паралельних площинах, і **просторові** (рис. 7.2).

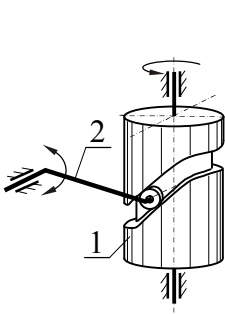


Рис. 7.2.

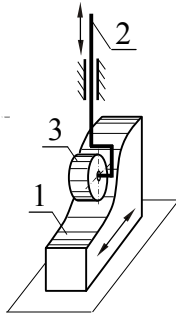


Рис. 7.3.

У просторових кулачкових механізмах кулачок 1 (рис. 7.2) має форму циліндра з пазом. При обертанні кулачка 1 по пазу рухається ролик вихідної ланки 2.

У плоских кулачкових механізмах ведуча ланка (кулачок 1) може обертатися (рис.7.1,а) чи рухатися поступально (рис.7.3).

Нижче розглядаються плоскі кулачкові механізми з кулачком, що обертється, як такі, що найбільш поширені в техніці. Плоскі кулачкові механізми з кулачком, який обертється, у свою чергу діляться на дві групи.

Перша група механізмів (рис. 7.1,а, 7.4,а и 7.4,в) перетворює обертальний рух кулачка 1 в зворотно поступальний рух вихідної ланки 2, яку називають **штовхачем**.

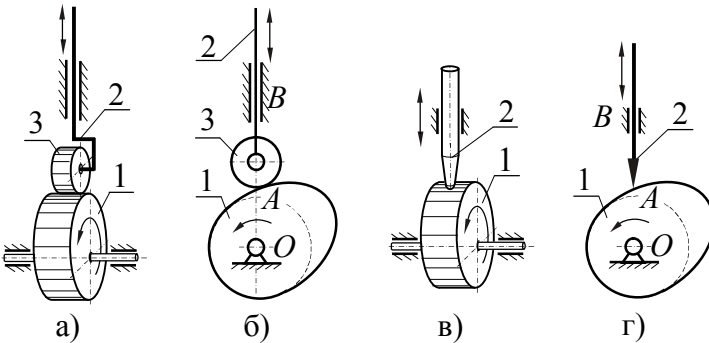


Рис. 7.4.

Друга група механізмів (рис. 7.5,а і рис. 7.5,в) перетворює обертальний рух кулачка 1 в коливальний рух вихідної ланки 2, яку в цьому випадку називають *коромислом* або *штовхачем, що коливається*.

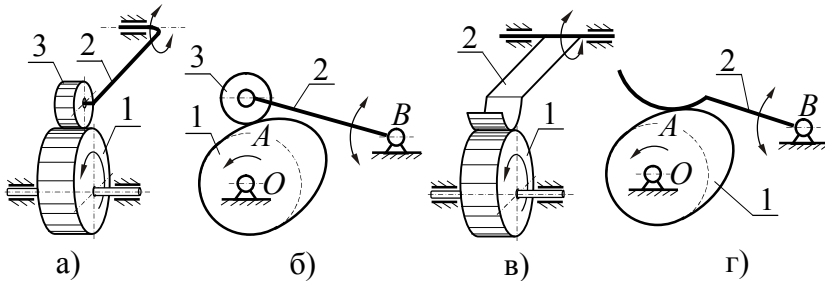


Рис. 7.5.

Та частина вихідної ланки, поверхня якої контактує з робочою поверхнею кулачка, отримала назву *башмака*. Поверхнею башмака вихідна ланка сприймає зусилля від кулачка і при роботі механізму ця поверхня зношується. Для зменшення зношуваності цієї поверхні використовують башмаки різної конструкції. Найбільше застосування одержали: роликові (рис. 7.4,а, рис. 7.5,а); тарілчасті (рис. 7.1,а, рис 7.5,в) та загострені (рис. 7.4,в) зі сферою малого радіуса (оскільки опорна поверхня башмака не може бути зроблена абсолютно гострою).

При загостреному башмаку (зі сферою малого радіуса) контакт між робочими поверхнями кулачка і башмака теоретично відбувається в точці (рис. 7.4,в, 7.4,г). У дійсності, внаслідок пружної деформації ланок, контакт між робочими поверхнями відбувається по невеликій площі навколо точки теоретичного контакту. Оскільки поверхня контакту між ланками мала, то такі башмаки використовуються в кулачкових механізмах, які працюють при невеликих навантаженнях. Крім того, наявність тертя ковзання між поверхнями кулачок-башмак не допускає

великих кутових швидкостей обертання кулачка, оскільки не забезпечується зносостійкість робочих поверхонь в кінематичній парі A .

Опорна (робоча) поверхня тарілчастих башмаків може бути плоскою (рис. 7.6,а), сферичною (рис. 7.6,б) або циліндричною (рис. 7.5,в).

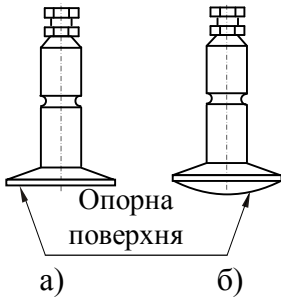


Рис. 7.6.

Тарілчасті башмаки мають більш високу несучу здатність в порівнянні з загостреним, оскільки теоретично контакт між робочими поверхнями кулачка і башмака відбувається по лінії, а практично по площі навколо лінії теоретичного контакту, але в силу тертя ковзання в кінематичній парі кулачок-башмак вони теж не забезпечують зносостійкість робочих поверхонь.

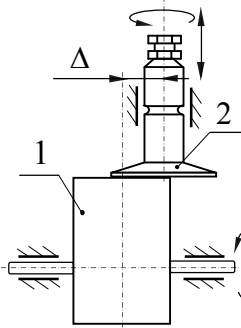


Рис. 7.7.

Для рівномірного зносу робочої поверхні тарілчастого башмака штовхач 2 (рис. 7.7) при обертанні кулачка 1 повинен обертатися навколо своєї осі. Для цього вісь штовхача 2 зміщують в осьовому напрямку кулачкового вала на відстань Δ відносно осі симетрії кулачка.

Зміщення Δ вибирають таким, щоб сумарна сила тертя на робочій поверхні башмака була зміщена відносно осі штовхача. Тоді при обертанні кулачка 1 штовхач 2 крім зворотного поступального руху буде й обертатися навколо своєї осі.

Виконання башмака у вигляді ролика 3 (рис. 7.4,а і 7.5,а) дозволяє частково виключити тертя ковзання,

замінивши його тертям кочення, зменшити знос поверхонь вищої кінематичної пари A та підвищити надійність механізму.

Якщо вісь штовхача проходить через центр O обертання кулачка (рис. 7.4,б), то механізм називають **кулачковим механізмом з центральним штовхачем**.

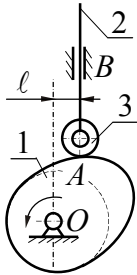


Рис. 7.8.

Якщо ж центр O обертання кулачка відстоїть від осі штовхача на деяку відстань l (рис. 7.8), то такий механізм називається **кулачковим механізмом зі зміщеним штовхачем**, а відстань l **ексцентриситетом**. Зміщення штовхача дозволяє, за інших рівних умов, зменшити розміри кулачка.

При роботі кулачкового механізму повинно забезпечуватися дотикання ведучої і веденої ланок, тобто необхідно забезпечити замикання вищої кінематичної пари A . В кулачкових механізмах використовується *силове* або *геометричне* (кінематичне) замикання.

При **силовому замиканні** постійний контакт між кулачком і вихідною ланкою забезпечується, як правило, дією пружини 4 (рис. 7.1,а), інколи для цієї цілі використовується сили тяжіння ланок, тиск рідини і т.д.

Силове замикання досить просто виконати конструктивно, але сили пружності пружини створюють додаткові навантаження на ланки механізму.

На рис. 7.9 показаний приклад механізму з **геометричним** замиканням вищої кінематичної пари. Кулачок 1 може бути виконаним у вигляді фрезерованого фігурного пазу, тобто кулачок має два профілю – зовнішній і внутрішній.

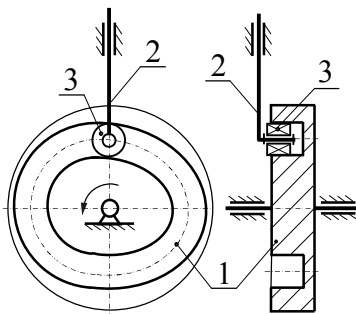


Рис. 7.9.

Ролик 3, який рухається по пазу, у залежності від сил, що діють на штовхач 2, притискається до зовнішнього або до внутрішнього профілю. У процесі експлуатації ті ділянки профілів, до яких ролик притискається, зношуються і відбувається збільшення ширини паза (паз розбивається).

Збільшення зазорів між роликом і пазом приводить до появи ударів при роботі механізму.

На практиці частіше використовують силове замикання за допомогою пружини.

На закінчення необхідно відзначити, що загальне число можливих сполучень кулачків, вихідних ланок, башмаків, способів замикання вищої кінематичної пари і їх конструктивне оформлення дуже велике. Найбільш доцільне сполучення вибирається з урахуванням великого числа факторів. Удає рішення одержують на основі досвіду експлуатації та даних про надійність і довговічність кулачкових механізмів різноманітних машин. Однак є основні поняття і показники, які необхідно враховувати при проектуванні будь яких кулачкових механізмів. В подальшому зупинимося на цих поняттях.

7.2. Фазова діаграма кулачкового механізму

Фазовою діаграмою називається залежність між переміщенням вихідної ланки кулачкового механізму і кутом повороту кулачка.

Фазову діаграму розглянемо на прикладі центрального кулачкового механізму з загостреним штовхачем (рис. 7.10,а).

рухається і знаходиться в найбільш віддаленому від центра кулачка положенні – **фаза віддаленого вистою**.

На ділянці cd (рис. 7.10,а) радіус профілю кулачка зменшується від максимального r_{\max} до початкового r_0 . Центральний кут φ_n , який спирається на дугу cd , називається **кутом наближення**. При повороті кулачка в межах кута φ_n (рис. 7.10,б) штовхач наближається до центра кулачка – **фаза наближення**. Штовхач при цьому проходить відстань H .

Четверта ділянка da профілю кулачка (рис. 7.10,а) окреслена дугою радіусом r_0 . Центральний кут $\varphi_{н.в}$ називається **кутом наближеного вистою**. При повороті кулачка в межах цього кута (рис. 7.10,б) штовхач не рухається і знаходиться в найбільш наближеному до центра кулачка положенні – **фаза наближеного вистою**.

Кути повороту кулачка φ_B , $\varphi_{B.B}$, φ_n і $\varphi_{н.в}$ називаються відповідно **фазовими кутами** віддалення, віддаленого вистою, наближення і наближеного вистою, а діаграму (рис. 7.10,б) переміщення вихідної ланки S_2 в залежності від кута повороту φ кулачка – **фазовою діаграмою кулачкового механізму**.

У випадку одноходового кулачка, тобто коли за один оборот кулачка вихідна ланка робить один робочий хід:

$$\varphi_B + \varphi_{B.B} + \varphi_n + \varphi_{н.в} = 360^\circ.$$

Потрібно відзначити, що фаз віддаленого і наближеного вистою може і не бути, але фази віддалення і наближення обов'язково присутні у всіх кулачкових механізмах.

Хід штовхача для центрального кулачкового механізму визначається різницею максимального і мінімального радіусів кулачка:

$$H = r_{\max} - r_0.$$

В кулачкових механізмах зі зміщеним штовхачем ця рівність не зберігається ($H > r_{\max} - r_0$).

Таким чином, профіль кулачка визначається: фазовими кутами; ходом штовхача H ; початковим радіусом r_0 і законами переміщення штовхача в залежності від кута повороту кулачка ($S_2 = f(\varphi)$) на фазах віддалення і наближення.

7.3. Вихідні дані, що необхідні для синтезу кулачкового механізму

Для проектування профілю кулачка кулачкового механізму необхідно вибрати:

- кінематичну схему механізму;
- фазові кути;
- максимальне переміщення вихідної ланки;
- закони руху вихідної ланки на фазах віддалення та наближення;
- початковий радіус шайби кулачка r_0 ;
- основні розміри деяких ланок (довжину коромисла, діаметр ролика, розмір тарілки і т.д.).

Вибір тієї чи іншої кінематичної схеми механізму визначається в першу чергу необхідністю відтворення потрібного за умовами технологічного процесу руху вихідної ланки (поступальний чи коливальний).

Фазові кути ($\varphi_B, \varphi_{B.B}, \varphi_H, \varphi_{H.B}$) та максимальне переміщення вихідної ланки (хід штовхача H чи кут розмаху коромисла β_{\max}) назначають на основі аналізу робочих циклів машини. Наприклад, у двигунах внутрішнього згорання (ДВС) інтервали тактів приймають по граничним положенням поршня: в верхній та нижній “мертвих точках” (в.м.т. та н.м.т.). Для чотиритактного двигуна такти наповнення робочою сумішшю, її стисання, розширення продуктів згорання та випуск відпрацьованих газів (рис. 7.11,а) відбувається за два оберти колінчастого вала ($\varphi_{к.в.} = 4\pi$).

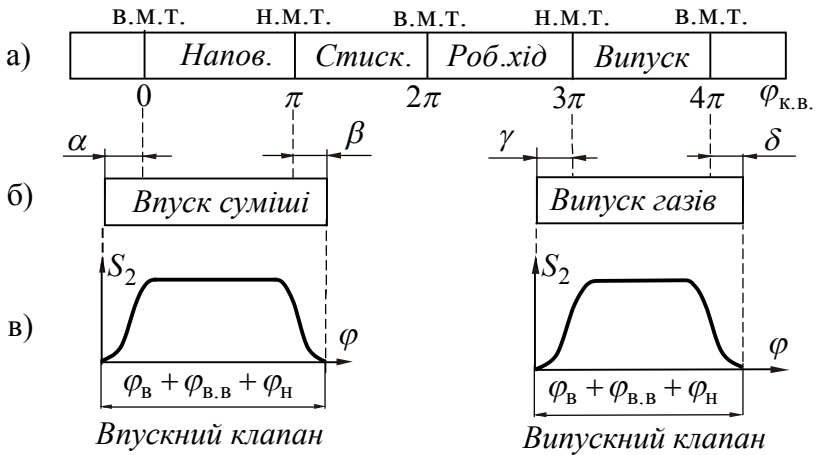


Рис. 7.11.

Моменти відкриття і закриття впускних і випускних клапанів задаються кулачками вала системи газорозподілення двигуна.

Впускний клапан, який повинен бути відкритим на такті наповнення, відкривається до приходу поршня у в.м.т., тобто з випередженням на деякий кут α , а закривається з деяким запізнюванням на кут β (рис.

7.11,б). Випускний клапан, який повинен бути відкритим на такті випуску відпрацьованих газів, відкривається до приходу поршня у н.м.т., тобто з випередженням на кут γ , а закривається з запізненням на кут δ . Конкретні величини кутів випередження та запізнення залежать від марки двигуна (ВАЗ 2106: $\alpha = 12^\circ$; $\beta = 40^\circ$; $\gamma = 42^\circ$; $\delta = 10^\circ$, ЗИЛ 130: $\alpha = 31^\circ$; $\beta = 83^\circ$; $\gamma = 67^\circ$; $\delta = 47^\circ$).

Відповідно до фазової діаграми (рис. 7.11,в), сума фазових кутів φ_B , $\varphi_{B.B}$ і φ_H для кулачка впускного клапана з урахуванням того, що кутова швидкість обертання розподільчого вала в два рази менша кутової швидкості колінчастого вала, буде рівна:

$$\varphi_B + \varphi_{B.B} + \varphi_H = (\alpha + \pi + \beta)/2,$$

а для випускного:

$$\varphi_B + \varphi_{B.B} + \varphi_H = (\gamma + \pi + \delta)/2.$$

Надалі будемо уважати, що схема кулачкового механізму, фазові кути і максимальне переміщення вихідної ланки відомі.

Таким чином, **задача проектування кулачкового механізму зводиться до вибору законів руху вихідної ланки на фазах віддалення та наближення і визначення основних розмірів ланок.**

Вибір найбільш раціональних законів руху вихідних ланок залежить від багатьох вимог кінематичного, динамічного, конструктивного і технологічного характеру, на деяких з них ми зупинимося в наступному параграфі.

При виборі основних розмірів ланок кулачкового механізму треба керуватися бажаністю одержання найменших габаритів механізму і досить високого коефіцієнта корисної дії. Крім того, вибір основних

конструктивних розмірів ланок кулачкового механізму пов'язаний і з розрахунком на міцність цих ланок, зносом поверхонь кінематичної пари кулачок - башмак, надійністю роботи механізму і т.д. Нижче ми зупинимося на деяких питаннях вибору основних розмірів ланок кулачкового механізму.

7.4. Закони руху вихідної ланки кулачкового механізму

Вибір закону руху вихідної ланки є найбільш відповідальним і найбільш складним етапом проектування кулачкового механізму, оскільки закон руху визначає динаміку роботи механізму і якість виконання технологічного процесу.

Теоретично кулачкові механізми можуть мати *самі різні закони руху вихідної ланки*, але на практиці користаються тими, котрі забезпечують більш просту технологію обробки профілю кулачка і задовольняють кінематичним і динамічним вимогам до кулачковому механізму.

Під законом руху вихідної ланки кулачкового механізму розуміють залежність між переміщенням вихідної ланки і часом.

Надалі всі закони руху будемо розглядати на прикладі кулачкових механізмів зі штовхачем, тобто розглядати переміщення штовхача в залежності від часу $S = f(t)$. У випадку ж кулачкового механізму з коромислом задається кут повороту коромисла в залежності від часу $\beta = f(t)$.

Оскільки при синтезі кулачкового механізму приймається, що кулачок обертається зі сталою кутовою швидкістю ($\omega_1 = const$), то закон руху вихідної ланки

зручно задавати як функцію кута повороту $\varphi = \omega_1 t$ кулачка:

$$S = f(\varphi).$$

Досить часто закон руху задають у вигляді залежності аналога $S' = dS/d\varphi$ швидкості чи аналога прискорення $S'' = d^2S/d\varphi^2$ від кута повороту кулачка:

$$S' = dS/d\varphi = f_1(\varphi);$$

$$S'' = d^2S/d\varphi^2 = f_2(\varphi).$$

У цьому випадку швидкість V і прискорення a штовхача визначаються таким чином:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \omega_1 = S' \cdot \omega_1; \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} a = \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{d\varphi} \omega_1 \right) = \frac{d^2S}{dtd\varphi} \omega_1 = \frac{d^2S}{dtd\varphi} \frac{d\varphi}{d\varphi} \omega_1 = \\ &= \frac{d^2S}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} \omega_1 = \frac{d^2S}{d\varphi^2} \omega_1^2 = S'' \cdot \omega_1^2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

де $\omega_1 = d\varphi/dt$ – кутова швидкість кулачка.

Усі закони руху вихідних ланок кулачкових механізмів можна розділити на три види:

- закони руху, що викликають *жорсткі удари*;
- закони руху, що викликають *м'які удари*;
- закони руху, що не викликають ударів.

Найбільш простим законом руху $S = f(\varphi)$ вихідної ланки на фазах віддалення і наближення є **лінійний закон руху** (рис. 7.12,а).

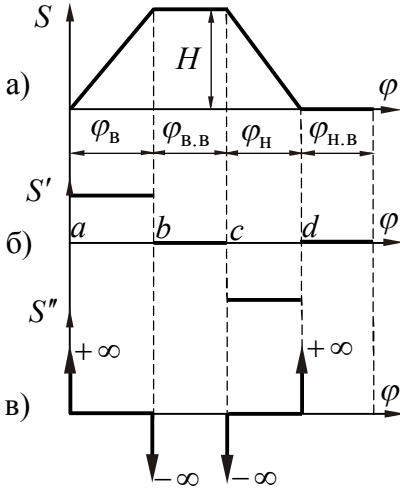


Рис. 7.12.

а на фазі наближення:

$$S = H - \frac{H}{\varphi_H} (\varphi - \varphi_B - \varphi_{B.V}). \quad (7.4)$$

Аналог швидкості S' руху штовхача на фазах віддалення і наближення відповідно дорівнює:

$$S'_{B.V} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{H}{\varphi_B} \varphi \right) = \frac{H}{\varphi_B} = const;$$

$$S'_{H.V} = \frac{d}{d\varphi} \left[H - \frac{H}{\varphi_H} (\varphi - \varphi_B - \varphi_{B.V}) \right] = -\frac{H}{\varphi_H} = const.$$

Таким чином, аналог швидкості руху штовхача на обох фазах дорівнює сталій величині (рис. 7.12,б), а аналог прискорення S'' (рис. 7.12,в) дорівнює нулю, крім положень a , b , c , d на границях фаз, де функція S' має розриви. В цих положеннях швидкість миттєво і теоретично при нескінченно великих прискореннях змінює свою величину. Враховуючи, що сила інерції штовхача

Профіль кулачка на фазах віддалення і наближення описується спіраллю Архімеда. Враховуючи це, такий закон руху можна здійснити кулачком нескладного профілю.

Закон руху штовхача на фазі віддалення являє собою залежність:

$$S = \frac{H}{\varphi_B} \cdot \varphi, \quad (7.3)$$

($F_i = m \cdot a = m \cdot S'' \cdot \omega_1^2$) в цих положеннях буде дорівнювати нескінченності, то в механізмі в цей момент будуть мати місце **жорсткі удари**. У дійсності, значення прискорень і сил інерції не досягають нескінченності завдяки пружності ланок механізму, і все-таки, у цих положеннях виникають досить великі сили, що можуть привести до ударів кулачка об штовхач або до розмикання вищої кінематичної пари.

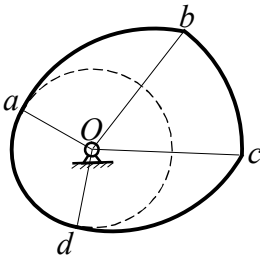


Рис. 7.13.

Жорсткі удари виникають у місцях сполучення кривих, що утворюють профіль кулачка, які не мають спільної дотичної (точки b і c рис.7.13). Такий закон руху можна використовувати тільки в дуже тихохідних механізмах при невеликих навантаженнях на штовхач.

Надалі будемо розглядати фазову діаграму тільки для фази віддалення, оскільки для інших фаз її легко представити: на фазах вистою – це прямі, паралельні осі абсцис; на фазі наближення – переміщення штовхача зменшується від H до нуля (рис. 7.12,а), а швидкість і прискорення змінюються як і для фази віддалення, але з протилежним знаком (рис. 7.12,б, в).

Лінійний закон руху можна використовувати і в більш відповідальних випадках, якщо усунути причину жорстких ударів.

На рис. 7.14,а показаний лінійний закон руху з перехідними ділянками на початку і в кінці фази, які виконані дугами радіусом r . Така зміна закону руху приводить до поступового (без розривів) зростання швидкості (рис. 7.14,б), а прискорення на початку і в кінці фази змінюється миттєво на кінцеву величину (рис. 7.14,в).

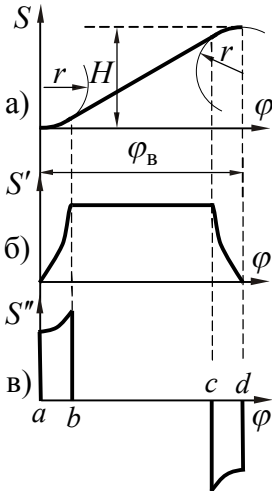


Рис. 7.14.

Таким чином, в точках a , b , c і d (рис. 7.14) будуть мати місце удари, але величина сили інерції буде обмежена по величині.

Удари, які виникають при раптовій зміні прискорення на кінцеву величину називаються **м'якими ударами**. Про наявність м'яких ударів у механізмі судити по профілю кулачка важко, оскільки вони виникають в місцях спряження кривих, що мають спільну дотичну але різні радіуси кривизни.

М'які удари допускаються в механізмах, у яких кутова швидкість обертання кулачка менша ніж 2000 об/хв .

Як видно з наведених прикладів, для вибору того чи іншого закону руху необхідно знати прискорення вихідної ланки, оскільки воно визначає сили інерції, що діють на ланки механізму. Тому, при проектуванні кулачкового механізму, як правило, задаються аналогом прискорення штовхача $S'' = f_2(k_\varphi)$, причому, в якості аргументу використовують відносний кут повороту кулачка $k_\varphi = \varphi/\varphi_B$ для фази віддалення та $k_\varphi = \varphi/\varphi_H$ для фази наближення.

Закон зміни аналога швидкості $S' = f_1(k_\varphi)$ та закон руху вихідної ланки $S = f(k_\varphi)$ визначають шляхом інтегрування аналога прискорення при заданих початкових умовах (ходу штовхача H , фазових кутах).

М'який удар характерний для наступних законів руху вихідної ланки кулачкового механізму:

- зі сталим прискоренням (рис. 7.15,а);
- із лінійною зміною прискорення (рис. 7.15,б);
- зі зміною прискорення по косинусоїді (рис. 7.15,в).

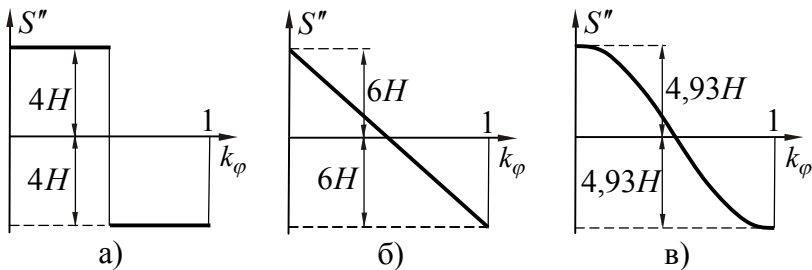


Рис. 7.15.

В таблиці 7.1 наведені рівняння цих законів руху для фази віддалення, а на рис. 7.15 – максимальні значення аналога прискорення, де H – хід штовхача.

Для роботи механізму *без ударів* необхідно обрати такий закон руху штовхача, при якому прискорення штовхача буде змінюватися за плавною кривою, у якій немає розривів. Найбільш прийнятними з цього погляду є синусоїдальний (рис. 7.16,а) і степеневий закон Шуна (рис. 7.16,б).

Недоліком синусоїдального закону, в порівнянні з законом Шуна, є повільний підйом штовхача на початку і в кінці фази.

У практиці проектування кулачкових механізмів набули застосування комбіновані закони руху, у яких на різних ділянках фаз віддалення чи наближення прискорення описується різними функціональними залежностями. Це дозволяє синтезувати такі закони руху,

що мають кінематичні і динамічні характеристики значно кращі чим у законів заданих однією функцією.

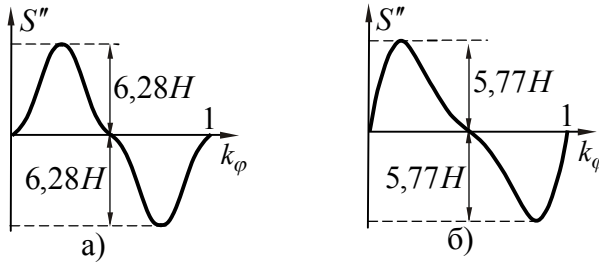


Рис. 7.16.

Наприклад, закон задається трьома плавними кривими: півхвилею синусоїди на ділянці додатного прискорення; чвертю синусоїди і квадратною параболою на ділянці від'ємного прискорення.

Треба зауважити, що з технологічної точки зору найбільш складними у виготовленні є профілі кулачків без ударів.

На закінчення необхідно відзначити, що універсального критерію, який би враховував увесь складний комплекс питань, пов'язаних з вибором закону руху вихідної ланки кулачкового механізму, не існує. При оцінюванні ефективності профілю кулачка на основі технологічного процесу, що виконується механізмом, формується комплекс завдань і обмежень, які розташовують у порядку убудування їх важливості. На перших етапах проектування знаходять рішення для обов'язкових умов, а потім роблять уточнення виходячи з економічних, технологічних, експлуатаційних та інших міркувань.

Таблиця 7.1

Закони руху вихідної ланки кулачкового механізму

Назва закону. Рівняння руху на фазі віддалення.
<p>Сталого прискорення (рис 7.15,а):</p> $0 \leq k_\varphi \leq 0,5: S'' = \frac{4H}{\varphi_B^2}; \quad S' = \frac{4H}{\varphi_B} k_\varphi; \quad S = 2Hk_\varphi^2,$ $0,5 \leq k_\varphi \leq 1: S'' = -\frac{4H}{\varphi_B^2}; \quad S' = \frac{4H}{\varphi_B} (1 - k_\varphi);$ $S = H \left[1 - 2(1 - k_\varphi)^2 \right].$
<p>Лінійної зміни прискорення (рис 7.15,б):</p> $S'' = \frac{6H}{\varphi_B^2} (1 - 2k_\varphi); \quad S' = \frac{6H}{\varphi_B} k_\varphi (1 - k_\varphi); \quad S = Hk_\varphi^2 (3 - 2k_\varphi).$
<p>Зміна прискорення за косинусоїдою (рис 7.15,в):</p> $S'' = \frac{H}{2\varphi_B^2} \pi^2 \cos(\pi k_\varphi); \quad S' = \frac{H}{2\varphi_B} \pi \sin(\pi k_\varphi);$ $S = \frac{H}{2} \left[1 - \cos(\pi k_\varphi) \right].$
<p>Зміна прискорення за синусоїдою (рис 7.16,а):</p> $S'' = 2\pi \frac{H}{\varphi_B^2} \sin(2\pi k_\varphi); \quad S' = \frac{H}{\varphi_B} \left[1 - \cos(2\pi k_\varphi) \right];$ $S = H \left[k_\varphi - \frac{\sin(2\pi k_\varphi)}{2\pi} \right].$
<p>Степеневий закон Шуна (рис 7.16,б):</p> $S'' = 60k_\varphi \frac{H}{\varphi_B^2} (1 - 3k_\varphi + 2k_\varphi^2);$ $S' = 30k_\varphi^2 \frac{H}{\varphi_B} (1 - 2k_\varphi + k_\varphi^2); \quad S = Hk_\varphi^3 (10 - 15k_\varphi + 6k_\varphi^2).$

ЛЕКЦІЯ 15

ЗМІСТ

- 7.4. Кут тиску в кулачковому механізмі.
 - 7.5. Визначення початкового радіуса шайби кулачка по допустимому куту тиску.
 - 7.6. Побудова профілю кулачка для механізму із загостреним та роликковим штовхачем.
 - 7.7. Визначення початкового радіуса шайби кулачка із умови опуклості профілю.
- Контрольні питання до теми 7

7.4. Кут тиску в кулачковому механізмі

Одним з найважливіших параметрів кулачкового механізму із загострим та роликковим башмаком є кут тиску у вищій кінематичній парі кулачок-башмак.

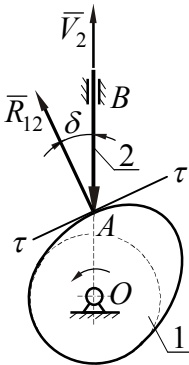


Рис. 7.17.

Якщо знехтувати силою тертя між башмаком і профілем кулачка, то сила \bar{R}_{12} , з якою кулачок 1 діє на штовхач 2 у точці A (рис. 7.17), спрямована перпендикулярно до дотичної $\tau-\tau$, що проведена в точці A до профілю кулачка.

Кут δ між напрямком сили \bar{R}_{12} і напрямком швидкості \bar{V}_2 штовхача називається **кутом тиску**.

Силу \bar{R}_{12} (рис.7.18), від кулачка на штовхач, можна розкласти на дві складові:

$$R' = R_{12} \cos \delta ; \quad R'' = R_{12} \sin \delta . \quad (7.5)$$

Складова \bar{R}' , яка спрямована уздовж осі штовхача, піднімає штовхач, а бічне зусилля \bar{R}'' перекошує штовхач і притискає його до направляючих поступальної кінематичної пари в точках B і C .

Для визначення реакції \bar{R}_{12} скористаємося принципом Даламбера.

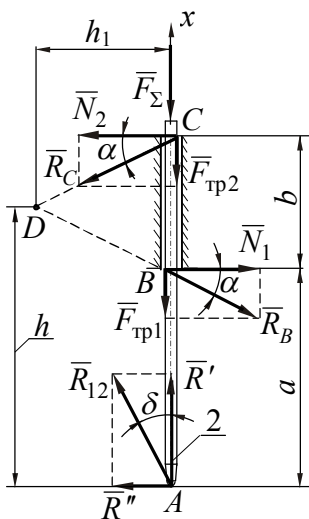


Рис. 7.18.

Для цього розглянемо рівновагу штовхача 2 на фазі віддалення (рис.7.18). На штовхач діє реакція \bar{R}_{12} і сумарна сила \bar{F}_{Σ} , яка являє собою векторну суму вертикальних сил: сили корисного опору, що виконує технологічний процес; сила пружності пружини, при силовому замиканні; сила тяжіння і сила інерції штовхача. Крім того, в поступальній кінематичній парі BC до штовхача, крім нормальних реакцій \bar{N}_1 і \bar{N}_2 , необхідно прикласти сили тертя $\bar{F}_{\text{тр}1}$ і $\bar{F}_{\text{тр}2}$.

Сили тертя спрямовані проти напрямку руху штовхача, а їх модулі дорівнюють:

$$F_{\text{тр}1} = f \cdot N_1; \quad F_{\text{тр}2} = f \cdot N_2,$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання штовхача по напрямним поступальної кінематичної пари BC .

Повні реакції \bar{R}_B і \bar{R}_C (с урахуванням сил тертя) в точках B і C поступальної кінематичної пари будуть

спрямовані під кутом тертя α до нормальних реакцій \bar{N}_1 і \bar{N}_2 :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{тр}1}}{N_1} = \frac{F_{\text{тр}2}}{N_2} = f .$$

Запишемо суму моментів усіх сил, що діють на штовхач 2, відносно точки D , в якій перетинаються лінії дії повних реакцій \bar{R}_B і \bar{R}_C поступальної кінематичної пари:

$$\Sigma M_D(F_k) = (R' - F_\Sigma) \cdot h_1 - R'' \cdot h = 0 . \quad (7.6)$$

Оскільки трикутник BCD (рис.7.19) є рівнобедреним, то:

$$h = a + \frac{b}{2}; \quad h_1 = \frac{b}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

і з урахуванням (7.5) отримаємо:

$$\Sigma M_D(F_k) = (R_{12} \cos \delta - F_\Sigma) \frac{b}{2f} - R_{12} \sin \delta \left(a + \frac{b}{2} \right) = 0 .$$

Звідки, зусилля R_{12} від кулачка на штовхач дорівнює:

$$R_{12} = \frac{F_\Sigma}{\cos \delta - \sin \delta \cdot f \frac{2a+b}{b}} . \quad (7.7)$$

Особливістю отриманої формули (7.7) є те, що при певному куті тиску (назвемо його **критичним** $\delta_{кр}$) в знаменнику може бути нуль, а реакція R_{12} буде дорівнювати нескінченності, тобто механізм заклинить. У цьому випадку будь-яке збільшення зусилля від кулачка на штовхач не буде викликати руху останнього, оскільки

пропорційно будуть зростати сили тертя в направляючих поступальної кінематичної пари BC .

Критичний кут тиску:

$$\cos \delta_{кр} - \sin \delta_{кр} f \frac{2a + b}{b} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \delta_{кр} = \frac{b}{f(2a + b)},$$

визначається коефіцієнтом тертя f і геометрією (a, b) поступальної кінематичної пари. *Критичний кут тиску* зменшується зі збільшенням відстані a (рис.7.18), тобто зі збільшенням габаритів механізму.

Таким чином, при проектуванні кулачкового механізму із загострим або роликівим башимаком кут тиску при будь-якому положенні кулачка повинен бути меншим за критичний $(\delta < \delta_{кр})$.

Миттєвий коефіцієнт корисної дії η механізму (к.к.д.) без урахування тертя в вищій кінематичній парі та підшипниках вала кулачка можна визначити за формулою:

$$\eta = 1 - \frac{N_{\tau}}{N_{\delta}} = 1 - \frac{(F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}) \cdot V_2}{R'V_2} = 1 - \frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{R_{12} \cos \delta},$$

де N_{τ} , N_{δ} – потужність, яка витрачається на подолання сил тертя, і потужність рушійних сил відповідно;

V_2 – швидкість штовхача.

Спроектувавши всі сили, що діють на штовхач, на вісь Ax (рис.7.18), одержимо:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{kx} = R' - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} - F_{\Sigma} = 0 &\Rightarrow \\ F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = R' - F_{\Sigma} = R_{12} \cos \delta - F_{\Sigma}. &\quad (7.8) \end{aligned}$$

Тоді миттєвий к.к.д. механізму буде дорівнювати:

$$\eta = 1 - \frac{R_{12} \cos \delta - F_{\Sigma}}{R_{12} \cos \delta} = \frac{F_{\Sigma}}{R_{12} \cos \delta},$$

або з урахуванням (7.7):

$$\eta = \frac{\cos \delta - f \frac{2a+b}{b} \sin \delta}{\cos \delta} = 1 - f \left(\frac{2a}{b} + 1 \right) \operatorname{tg} \delta. \quad (7.9)$$

З рівності (7.9) витікає, що коефіцієнт корисної дії механізму зменшується зі зростанням кута тиску δ .

Розрізняють два основних підходи до вибору допустимого кута тиску $\delta_{\text{доп}}$ при проектуванні кулачкових механізмів:

- потрібно отримати мінімальні габарити механізму;
- потрібно отримати прийнятний к.к.д. механізму.

Збільшення кута тиску приводить до зменшення габаритів кулачкового механізму і до збільшення зусиль на ланках. Тому при проектуванні механізму з мінімальними габаритами оцінюють величину зростання реакції \bar{R}_{12} за допомогою **коефіцієнта зростання зусилля** $v_F = R_{12}/F_{\Sigma}$.

З урахуванням (7.7) коефіцієнт зростання зусилля дорівнює:

$$v_F = [\cos \delta - f(1 + 2a/b) \sin \delta]^{-1}.$$

Задавшись граничним значенням коефіцієнта зростання зусилля v_{max} , одержуємо рівняння для визначення кута допустимого тиску при мінімальних габаритах кулачкового механізму:

$$\cos \delta_{\text{доп}} - f(1 + 2a/b) \sin \delta_{\text{доп}} = v_{\text{max}}^{-1}. \quad (7.10)$$

Для отримання прийняттого к.к.д. при невеликих габаритах механізму треба вибрати оптимальне значення миттєвого к.к.д. $\eta_{\text{опт}}$ та підставити це значення в формулу (7.9). Тоді:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{доп}} = \frac{1 - \eta_{\text{опт}}}{f(1 + 2a/b)}. \quad (7.11)$$

На початкових стадіях проектування, коли невідомі основні розміри кулачкового механізму і коефіцієнт тертя f , рекомендується приймати наступні значення допустимого кута тиску:

- для кулачкового механізму з штовхачем $\delta_{\text{доп}} = 15 \div 30^\circ$;
- для кулачкового механізму з коромислом $\delta_{\text{доп}} = 20 \div 45^\circ$.

У кулачкових механізмах з коромислом втрати на тертя в обертальній кінематичній парі B (рис. 7.5,б) менші і тому в таких механізмах допускаються більші значення для кута тиску.

Оскільки, у кулачкових механізмах із силовим замиканням, рух вихідної ланки на фазі наближення відбувається під дією зовнішніх сил, то явища заклинювання механізму на цій фазі не буде. Таким чином, кут тиску на цій фазі можна збільшити. Тому, при проектуванні кулачкових механізмів іноді приймають два допустимих кути тиску: $\delta_{\text{доп.в}}$ – для фази віддалення і $\delta_{\text{доп.н}}$ – для фази наближення ($\delta_{\text{доп.н}} > \delta_{\text{доп.в}}$).

На закінчення необхідно відзначити, що якщо габарити дозволяють, то рекомендується вибирати менші значення допустимого кута тиску, оскільки це збільшує к.к.д. механізму.

7.5. Визначення початкового радіуса шайби кулачка по допустимому куту тиску

Залежність кута тиску δ від геометричних і кінематичних параметрів кулачкового механізму установимо на прикладі центрального кулачкового механізму з загостреним штовхачем (рис. 7.19,а).

Визначимо швидкість V_2 штовхача 2 по відомій кутовій швидкості ω_1 кулачка 1.

Швидкість точки A_1 , що належить кулачку, дорівнює:

$$V_{A_1} = \omega_1 \cdot (OA) = \omega_1 \cdot (r_0 + S_2),$$

де r_0 – початковий радіус шайби кулачка;

S_2 – хід штовхача в положенні механізму, що розглядається.

Спрямована швидкість \bar{V}_{A_1} в сторону кутової швидкості ω_1 , перпендикулярно до OA .

Відповідно до залежності, що пов'язує швидкості точок, що належать різним ланкам і збігаються одна з другою у даний момент часу, для точки A_2 штовхача можна записати рівняння:

$$\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{A_2A_1}. \quad (7.12)$$

де \bar{V}_{A_2} – абсолютна швидкість точки A_2 , яка належить штовхачу 2 (спрямована по осі штовхача);

$\bar{V}_{A_2A_1}$ – швидкість ковзання точки A_2 відносно A_1 (спрямована по дотичній $\tau - \tau$ до профілю кулачка).

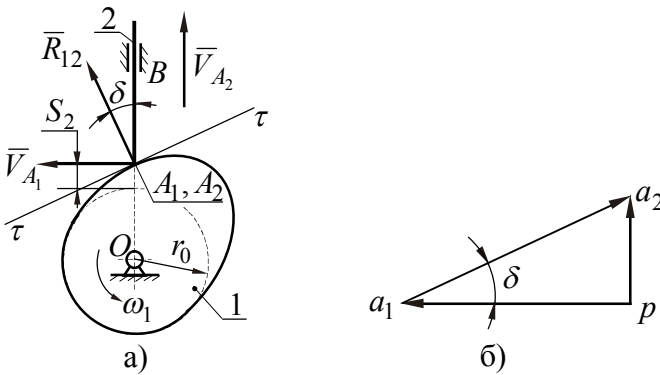


Рис. 7.19.

Побудувавши план швидкостей згідно векторному рівнянню (7.12), отримаємо прямокутний трикутник pa_1a_2 (рис. 7.19,б), в якому вектор $\overline{pa_1}$ перпендикулярний штовхачу, а вектор $\overline{pa_2}$ перпендикулярний $\overline{R_{12}}$ (рис. 7.19,а). Таким чином, кут при вершині a_1 плану швидкостей дорівнює куту тиску δ .

Тоді

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{pa_2}{pa_1} = \frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} = \frac{V_2}{\omega_1(r_0 + S)},$$

або з урахуванням (7.1):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega_1 \cdot dS_2/d\varphi_1}{\omega_1 \cdot (r_0 + S_2)} = \frac{dS_2/d\varphi_1}{r_0 + S_2}. \quad (7.13)$$

Таким чином, кут тиску δ залежить від аналога швидкості $dS_2/d\varphi_1$, переміщення штовхача S_2 і початкового радіуса шайби кулачка r_0 . Враховуючи, що $dS_2/d\varphi_1$ і S_2 визначаються обраним законом руху

штовхача, то допустимий кут тиску $\delta_{\text{доп}}$ буде визначати початковий радіус шайби кулачка r_0 .

Рівняння (7.13) можна розв'язати графічно и аналітично.

При аналітичному розв'язуванні із рівняння (7.13) визначають початковий радіус шайби кулачка:

$$r_0 = \frac{dS_2/d\varphi_1}{\text{tg}\delta_{\text{доп}}} - S_2. \quad (7.14)$$

З огляду на те, що аналог швидкості $dS_2/d\varphi_1$ і переміщення штовхача S_2 на фазі видалення змінюються зі зміною кута повороту φ_1 кулачка, то необхідно знайти такий кут повороту, при якому r_0 , визначене по формулі (7.14), має максимальне значення. Максимальне значення r_0 і приймається за початковий радіус шайби кулачка.

Для більшості законів руху з невеликою похибкою можна прийняти, що максимальне значення r_0 буде, коли аналог швидкості досягає максимуму:

$$dS_2/d\varphi_1 = (dS_2/d\varphi_1)_{\text{max}}.$$

Переміщення штовхача в цьому положенні кулачка для законів руху, що наведені в табл. 7.1, дорівнює $S_2 = H/2$. Тоді:

$$r_0 = \frac{(dS_2/d\varphi_1)_{\text{max}}}{\text{tg}\delta_{\text{доп}}} - \frac{H}{2}. \quad (7.15)$$

Графічним способом початковий радіус шайби кулачка можна визначити, якщо побудувати графічну залежність аналога швидкості штовхача від його

переміщення $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$. Вісь S_2 діаграми направляють вертикально вгору (рис. 7.20), а значення $dS_2/d\varphi_1$ відкладають вздовж осі абсцис, причому, якщо кулачок обертається проти ходу часової стрілки, то вліво на фазі віддалення і вправо – на фазі наближення.

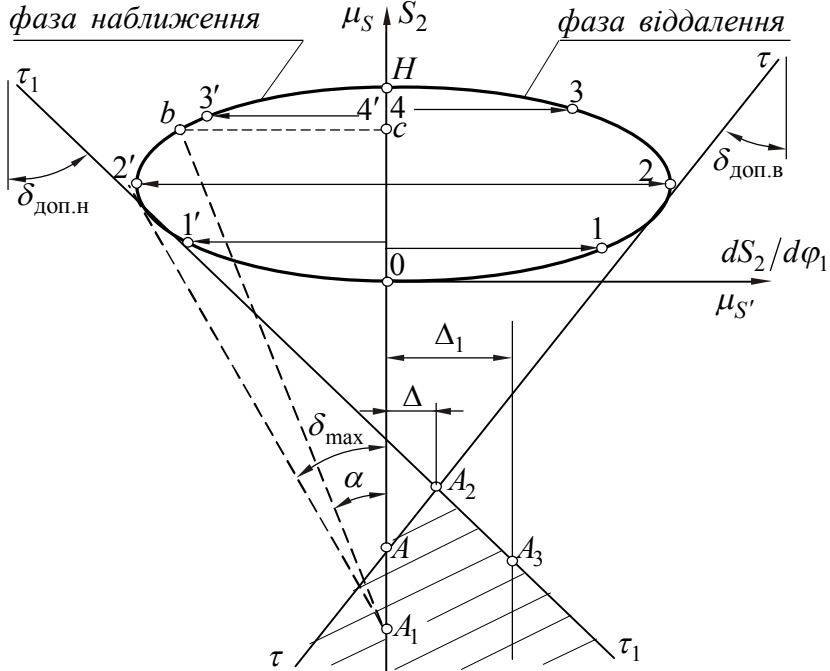


Рис. 7.20.

Переміщення штовхача і значення аналога швидкості визначаються за формулами (табл. 7.1), які отримані при аналітичному інтегруванні аналога прискорення, або графічним інтегруванням аналога прискорення [1].

На фазі наближення використовуються ті ж самі формули (табл. 7.1), тільки замість кута віддалення φ_B

підставляють кут наближення φ_H і змінюють знак аналога швидкості на протилежний. При цьому кут φ відраховують від кінця фази наближення в протилежну сторону (до фази віддаленого вистою).

Для побудови діаграми $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$ значення переміщення і аналога швидкості визначають для $n+1$ ($n = 8 \div 20$) рівновіддалених по куту повороту кулачка положень на фазах віддалення і наближення. На рис. 7.20 – $n = 4$.

Якщо на кривій $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$ (рис. 7.20) взяти довільну точку b і точку A_1 , на продовженні осі S_2 , то тангенс кута нахилу α прямої A_1b буде дорівнювати:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{bc}{A_1c} = \frac{bc}{A_10 + 0c} = \frac{(dS_2/d\varphi_1)_b / \mu_{S'}}{A_10 + S_{2b} / \mu_S},$$

де S_{2b} і $(dS_2/d\varphi_1)_b$ – значення переміщення і аналога швидкості в точці b .

Якщо при побудові діаграми масштабні коефіцієнти по осям S_2 і $dS_2/d\varphi_1$ вибрати рівними ($\mu_{S'} = \mu_S$), то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dS_2/d\varphi_1)_b}{(A_10)\mu_S + S_{2b}} \quad (7.16)$$

Порівнюючи (7.16) з формулою (7.13) отримуємо, що кут α дорівнює куту тиску δ , а $(A_10)\mu_S$ – є радіус r_0 , тобто відрізок A_10 в масштабі μ_S зображає початковий радіус шайби кулачка. Точка A_1 є центром обертання кулачка. Максимального значення δ_{\max} кут тиску досягає, коли пряма з точки A_1 буде дотичною до кривої $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$.

Проведемо дві дотичні до кривої $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$. Дотичну $\tau - \tau$ під кутом $\delta_{\text{доп.в}}$ до вертикалі на фазі віддалення і дотичну $\tau_1 - \tau_1$ під кутом $\delta_{\text{доп.н}}$ до вертикалі на фазі наближення (рис. 7.20). Кути $\delta_{\text{доп.в}}$ і $\delta_{\text{доп.н}}$ – допустимі кути тиску на фазах віддалення і наближення відповідно. Можливі центри обертання кулачка будуть знаходитися в заштрихованій області обмеженій проведеними дотичними.

Якщо за центр обертання кулачка вибрати точку A , то отримаємо центральний кулачок з мінімальним початковим радіусом $r_0 = (A0)\mu_S$. Як правило, для центральних кулачків центр обертання вибирають трохи нижче точки A на осі S_2 (наприклад A_1), щоб забезпечити нерівність $\delta_{\text{max}} < \delta_{\text{доп.в}}$.

У випадку обрання центра обертання в точці A_2 , отримаємо кулачок зі зміщеним штовхачем (ексцентриситет $\ell = \Delta \cdot \mu_S$) і мінімальним початковим радіусом $r_0 = (A_2 0)\mu_S$. Якщо проектується механізм із заданим ексцентриситетом ℓ_1 , то необхідно провести вертикальну лінію, що зміщена від осі S_2 на відстань $\Delta_1 = \ell_1/\mu_S$. Можливі центри обертання кулачка будуть лежати на цій лінії нижче точки A_3 .

На закінчення необхідно зробити наступні зауваження:

- якщо проектується центральний кулачок, то на діаграмі $dS_2/d\varphi_1 = f(S_2)$ достатньо побудувати тільки фазу віддалення і провести до неї дотичну $\tau - \tau$ під кутом $\delta_{\text{доп}}$;

- кулачок зі зміщеним штовхачем не допускає зміни напрямку обертання, оскільки при цьому фази віддалення і наближення поміняються місцями, а початковий радіус шайби кулачка при проектуванні механізму вибирався виходячи з різних допустимих кутів тиску на цих фазах.

7.6. Побудова профілю кулачка для механізму із загостреним та роликковим штовхачем

Одною з основних задач при проектуванні кулачкового механізму є побудова профілю кулачка.

Для побудови профілю кулачка повинні бути відомі наступні вихідні дані:

1. Фазові кути: віддалення φ_B , віддаленого вистою $\varphi_{B,B}$, наближення φ_H ;
2. Закон руху штовхача $S_2 = f(\varphi_1)$ в графічній або табличній формах.
3. Початковий радіус r_0 шайби кулачка.
4. Зміщення штовхача (ексцентриситет) ℓ , у випадку кулачкового механізму зі зміщеним штовхачем.

7.6.1. Побудова профілю кулачка для механізму із загостреним штовхачем

При побудові профілю кулачка використовується метод обернення руху, для чого кулачковий механізм уявно починають обертати навколо осі обертання кулачка з кутовою швидкістю $-\omega_1$, тобто рівною але протилежно напрямленою кутовій швидкості ω_1 кулачка (рис. 7.21,а). При цьому, кулачок стає нерухомим, а стійка разом з

штовхачем починають обертатися з кутовою швидкістю $-\omega_1$ навколо кулачка.

Центральний кулачковий механізм

Побудова профілю кулачка здійснюється в такій послідовності (рис. 7.21,а).

1. З центра обертання кулачка A проводять початкове коло шайби кулачка радіусом r_0 .

2. Від вертикально проведеного променя $A0$ в напрямі протилежному кутовій швидкості ω_1 відкладають фазові кути: віддалення φ_B ; віддаленого вистою $\varphi_{B.B}$ та наближення φ_H .

3. За заданим законом руху штовхача $S_2 = f(\varphi_1)$ будують діаграму переміщення штовхача в залежності від кута повороту кулачка (рис. 7.21,б). Фази віддалення і наближення ділять на n рівних частин. Ординати $11'$, $22'$, $33'$ і т.д. визначають віддалення вістря штовхача від початкового кола у відповідних положеннях кулачкового механізму. В залежності від необхідної точності побудови профілю кулачка n вибирають від 8 до 20. (На рис. 7.21,б $n = 5$).

4. Кути φ_B і φ_H фаз віддалення і наближення (рис. 7.21,а) теж ділять на n рівних частин (промені $A1$, $A2$, $A3$ і т.д.). Кути між променями на фазі віддалення $\Delta\varphi_B = \varphi_B/n$ і $\Delta\varphi_H = \varphi_H/n$ – на фазі наближення, як і на діаграмі $S_2 = f(\varphi_1)$. Проведені промені $A1$, $A2$, $A3$ і т.д. в оберненому русі являють собою осі штовхача у відповідних положеннях кулачкового механізму.

5. Вздовж відповідних променів ($A1$, $A2$, $A3$ і т.д.) від початкового кола відкладають віддалення

штопхача (11', 22', 33' і т.д.) з діаграми $S_2 = f(\varphi_1)$.
Отримані точки 1', 2', 3' і т.д. визначають положення вістря штопхача в оберненому русі.

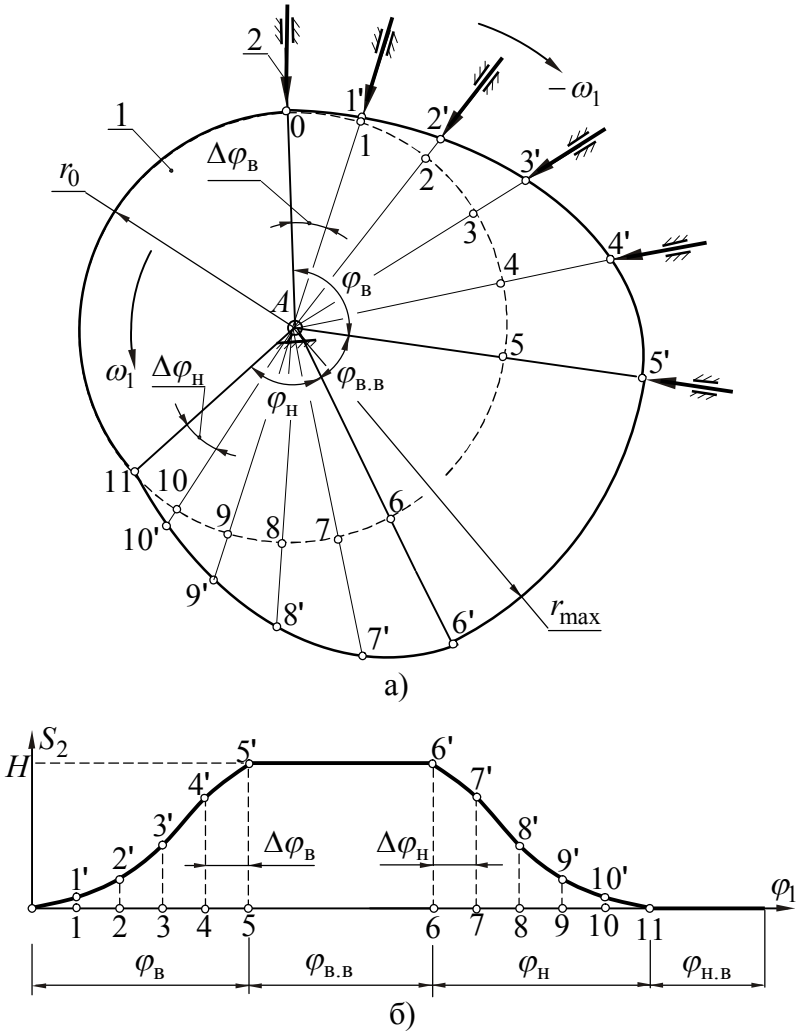


Рис. 7.21.

6. З'єднують точки $0, 1', 2', 3'$ і т.д. плавною кривою. Отриманий профіль є *теоретичним профілем* кулачка на фазах віддалення і наближення. Фазу наближеного вистою окреслюють дугою радіусом r_0 , а фазу віддаленого – дугою радіусом $r_{\max} = r_0 + H$.

Отриманий профіль кулачка є *робочим (конструктивним)* для кулачкового механізму з загостреним штовхачем і *центровим*, по якому рухається центр ролика, для кулачкового механізму з роликовим штовхачем.

Кулачковий механізм зі зміщеним штовхачем

Побудова профілю кулачка здійснюється в такій послідовності (рис. 7.22).

1. З центра обертання кулачка A проводять початкове коло шайби кулачка радіусом r_0 і коло зміщення осі штовхача радіусом ℓ .

2. Точка O перетину кола радіусом r_0 з віссю штовхача 2 відповідає початковому положенню штовхача. Вісь штовхача $0O''$ дотична до кола радіусом ℓ . Від перпендикуляра AO'' в напрямі, протилежному кутовій швидкості ω_1 , відкладають фазові кути: віддалення φ_B ; віддаленого вистою $\varphi_{B,B}$ та наближення φ_H ;

3. Фази віддалення і наближення діаграми $S_2 = f(\varphi_1)$ переміщення штовхача ділять (рис. 7.21,б) на n ($n = 8 \div 20$) рівних частин, аналогічно центральному механізму.

4. Кути віддалення φ_B і наближення φ_H (рис. 7.22) ділять на таку ж кількість рівних частин (промені $A1'', A2'', A3''$ і т.д.) як і діаграму $S_2 = f(\varphi_1)$.

Перпендикуляри $1''1$, $2''2$, $3''3$ і т.д., що проведені до променів $A1''$, $A2''$, $A3''$ і т.д., в оберненому русі визначають положення осі штовхача, яка є завжди дотичною до кола радіусом l .

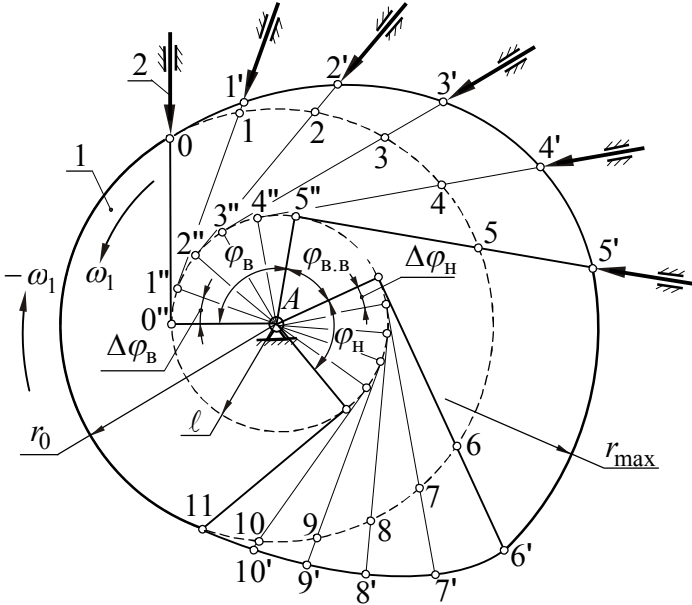


Рис. 7.22.

5. Відкладають вздовж осі штовхача ($1''1$, $2''2$, $3''3$ і т.д.) від початкового кола радіусом r_0 віддалення штовхача ($11'$, $22'$, $33'$ і т.д.) з діаграми $S_2 = f(\varphi_1)$ і знаходять положення вістря штовхача в оберненому русі (точки $1'$, $2'$, $3'$ і т.д.).

6. З'єднують точки 0 , $1'$, $2'$, $3'$ і т.д. плавною кривою. Отриманий профіль є *теоретичним профілем* кулачка на фазах віддалення і наближення. Фаза наближеного вистою окреслюється дугою радіусом r_0 , а віддалення – дугою кола, що проходить через кінцеву

точку профілю кулачка на фазі віддалення (точка 5' на рис. 7.22).

Отриманий профіль кулачка є *робочим* (конструктивним) для кулачкового механізму з загостреним штовхачем і *центровим*, по якому рухається центр ролика, для кулачкового механізму з роликівим штовхачем.

7.6.2. Побудова профілю кулачка для механізму з роликівим штовхачем

Як відзначалося раніше, для зменшення тертя у вищій кінематичній парі A (рис. 7.4,а) на штовхачу встановлюють роликівий башмак.

Побудова профілю кулачка при наявності ролика здійснюється в два етапи.

На *першому етапі* будується теоретичний (центровий) профіль кулачка, тобто профіль кулачка з загостреним штовхачем. Ця побудова докладна описано в розділі 7.6..

На *другому етапі* спочатку визначається радіус ролика r_p , а потім будується *робочий* (конструктивний) профіль кулачка по відомому центровому профілю.

Робочий профіль кулачка 2 (рис. 7.23) з роликівим штовхачем являє собою рівновіддалену (*еквідистантну*) від центрального профілю 1 криву. Відстань між кривими по нормалі дорівнює радіусу ролика.

Робочий профіль кулачка будується в такий спосіб (рис. 7.23). З різних положень центра ролика на фазах видалення і наближення центрального профілю 1 проводять ряд кіл, радіус яких дорівнює радіусу r_p ролика. Крива, що огинає ці кола усередині центрального профілю на цих фазах

буде шуканим робочим профілем кулачка з роликівим штовхачем. Фази наближеного вистою окреслюють дугою радіусом $r_1 = r_0 - r_p$, а фазу віддаленого вистою – дугою радіусом $r_2 = r_{\max} - r_p$.

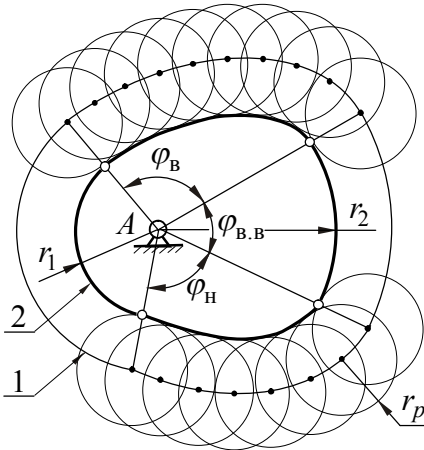


Рис. 7.23.

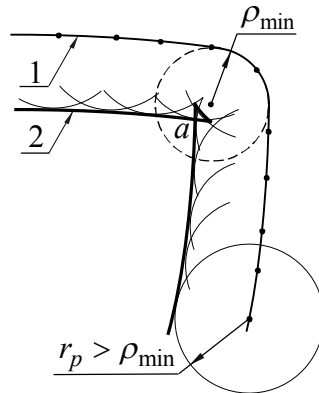


Рис. 7.24.

Зупинимося на тих обмеженнях, які треба накласти на радіус ролика. При призначенні радіуса ролика керуються питаннями міцності, експлуатації і геометрії кулачкового механізму.

Виходячи з міркувань міцності та експлуатації, особливо в силових механізмах, радіус ролика визначають за умовою контактної міцності, тобто з урахуванням ширини ролика, механічних властивостей матеріалів робочих поверхонь ролика і кулачка та заданої довговічності механізму. Крім того, виходячи з умов експлуатації кулачкового механізму необхідно забезпечити кочення ролика по профілю кулачка, оскільки, якщо ролик не буде обертатися то його введення в кінематичний ланцюг не приведе до зниження втрат на тертя. Детально

методика розрахунку радіуса ролика виходячи з цих міркувань наводиться в спеціальній літературі [11,12].

Тут обмежимося тільки геометричними вимогами. Оскільки робочий профіль 2 кулачки (рис. 7.24) будується шляхом переміщення центра ролика по центровому профілю 1 і радіус ролика r_p призначити більшим ніж мінімальний радіус кривизни ρ_{\min} будь якої ділянки центрального профілю, то виникне перетин робочого профілю (точка a), тобто робочий профіль кулачка стане практично нездійсненним.

Таким чином, радіус ролика r_p повинен бути меншим чим мінімальний радіус кривизни ρ_{\min} центрального профілю кулачка. Як правило приймають:

$$r_p \leq 0,7\rho_{\min}. \quad (7.17)$$

Крім того, радіус ролика обмежують умовою:

$$r_p \leq 0,4r_0. \quad (7.18)$$

За радіус ролика r_p вибирають менше із значень визначених за формулами (7.17), (7.18) та назначають конкретне значення у відповідності зі стандартним рядом діаметрів і довжин в машинобудуванні.

7.7. Визначення початкового радіуса шайби кулачка із умови опуклості профілю

Розглянемо ті умови, які необхідно витримувати при проектуванні кулачкових механізмів, штовхач яких має тарілчастий башмак.

Найбільш розповсюдженою у таких механізмів є плоска тарілка $\tau - \tau$, що перпендикулярна до осі руху штовхача 2 (рис. 7.25). Реакція \bar{R}_{12} від кулачка 1 на

штовхач 2 в такому механізмі спрямована паралельно осі руху штовхача, тобто кут тиску на фазі віддалення дорівнює нулю.

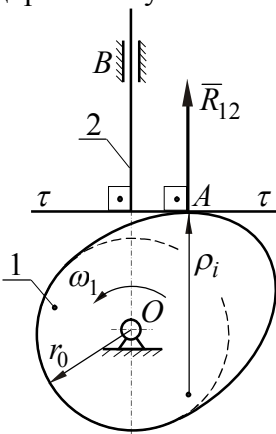


Рис. 7.25.

Однак, профіль кулачка таких механізмів повинен бути завжди опуклим інакше тарілка не зможе повністю слідкувати за його профілем. Наприклад, слідкувати за ділянкою ab (рис. 7.26) з від'ємним радіусом кривизни профілю кулачка штовхач 2 з плоскою тарілкою не зможе.

Для опуклості профілю кулачка 1 необхідно щоб радіус кривизни ρ_i профілю в точці A (рис. 7.25) дотику вищої кінематичної пари для кожного положення механізму задовольняв умові:

$$\rho_i \geq 0. \quad (7.19)$$

Радіус кривизни ρ_i профілю кулачка в цій точці дорівнює [1]:

$$\rho_i = r_0 + S_{2i} + S''_{2i}. \quad (7.20)$$

В рівнянні (7.20) S_{2i} і S''_{2i} переміщення і аналог прискорення штовхача відповідно в даному положенні кулачка.

З урахуванням (7.19) отримаємо:

$$\rho_i = r_0 + S_{2i} + S''_{2i} \geq 0. \quad (7.21)$$

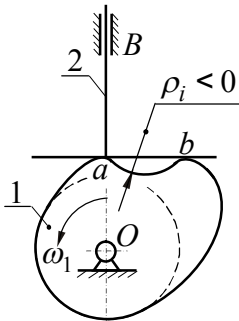


Рис. 7.26.

Із нерівності (7.21) визначається початковий радіус r_0 шайби кулачка аналітичним чи графічним способом.

Для *аналітичного визначення* нерівність (7.21) запишемо в наступному вигляді:

$$r_0 + S_{2i} + S_{2i}'' \geq \rho_{\min}, \quad (7.22)$$

де ρ_{\min} – мінімально допустимий радіус профілю кулачка.

Тоді, для r_0 отримаємо:

$$r_0 \geq \rho_{\min} - S_{2i} - S_{2i}''. \quad (7.23)$$

Якщо прийняти $\rho_{\min} = S_{2i}$, то початковий радіус r_0 шайби кулачка буде дорівнювати:

$$r_0 \geq (-S_{2i}'')_{\max}, \quad (7.24)$$

де $(-S_{2i}'')_{\max}$ – максимальне від'ємне значення аналога прискорення штовхача на фазах віддалення або наближення.

Для *графічного визначення* нерівність (7.21) перетворимо до наступного виду:

$$r_0 + S_{2i} \geq -S_{2i}''. \quad (7.25)$$

Поділивши праву і ліву частини нерівності (7.25) на величину $r_0 + S_{2i}$, отримаємо:

$$\frac{-S_{2i}''}{r_0 + S_{2i}} \leq 1 \quad \text{або} \quad \frac{-S_{2i}''}{r_0 + S_{2i}} \leq \operatorname{tg} 45^\circ. \quad (7.26)$$

Таким чином, графічним способом початковий радіус шайби кулачка можна визначити, якщо побудувати залежність аналога прискорення штовхача від його переміщення $S_2'' = f(S_2)$.

Переміщення штовхача S_2 відкладається (рис. 7.27) вздовж вертикальної осі діаграми, а значення аналога прискорення S_2'' – вздовж горизонтальної осі. Діаграма будується для фази віддалення або наближення, якщо закони руху на цих фазах однакові, і для обох фаз, якщо закони руху на цих фазах різні.

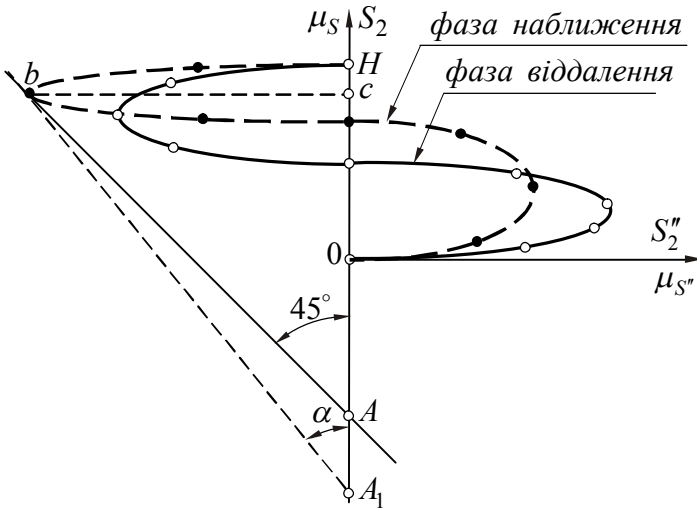


Рис. 7.27.

Під кутом 45° до осі S_2 проводиться дотична Ab до від'ємної частини кривої $S_2'' = f(S_2)$. Тоді для кута нахилу α дотичної A_1b , що проведена через точку A_1 , яка лежить нижче точки A , до тієї ж частини кривої, буде справедливою нерівність:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{bc}{A_1 0 + 0c} = \frac{-S_{2b}'' / \mu_{S''}}{A_1 0 + S_{2b} / \mu_S} < \operatorname{tg} 45^\circ,$$

де S_{2b} і S_{2b}'' – значення переміщення та аналога прискорення в точці b діаграми.

Якщо при побудові діаграми $S_2'' = f(S_2)$ масштабні коефіцієнти по осям S_2 і S_2'' обрати рівними ($\mu_{S''} = \mu_S$), то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-S_{2b}''}{(A_1 O) \mu_S + S_{2b}} < \operatorname{tg} 45^\circ \quad (7.27)$$

Порівнюючи (7.27) з формулою (7.26) одержуємо, що добуток $(A_1 O) \mu_S$ дорівнює радіусу r_0 , тобто відрізок $A_1 O$ у масштабі μ_S зображає початковий радіус шайби кулачка, а точка A_1 є центром обертання кулачка. Якщо центр обертання кулачка вибрати в точці A , то початковий радіус шайби кулачка буде мінімальним $r_0 = (AO) \mu_S$.

Побудова профілю кулачка з тарілчастим штовхачем здійснюється в такій послідовності (рис. 7.28).

1. Із центра обертання кулачка A проводять початкове коло радіусом r_0 .

2. Від вертикального променя AO в напрямі протилежному кутовій швидкості ω_1 відкладають фазові кути віддалення φ_B , віддаленого вистою $\varphi_{B.B}$ і наближення φ_H .

3. Кути φ_B і φ_H фаз віддалення і наближення (рис. 7.28) ділять на n частин (промені $A1$, $A2$, $A3$ і т.д.). Кути між променями на фазі віддалення $\Delta\varphi_B = \varphi_B/n$ і $\Delta\varphi_H = \varphi_H/n$ – на фазі наближення, як і на діаграмі $S_2 = f(\varphi_1)$ переміщення штовхача (рис. 7.21,б). Проведені промені $A1$, $A2$, $A3$ і т.д. в оберненому русі визначають положення осі штовхача 2 у відповідному положенні кулачкового механізму.

Контрольні питання до теми 7

1. Як класифікуються кулачкові механізми?
2. Що називають башмаком вихідної ланки кулачкового механізму?
3. Які види башмаків використовуються для вихідних ланок кулачкових механізмів у практиці машинобудування?
4. Як рухається штовхач?
5. Що таке фазова діаграма кулачкового механізму?
6. Які ділянки профілю кулачка мають змінний радіус кривизни?
7. Якою кривою окреслена фаза віддаленого вистою шайби кулачка?
8. На яких фазах вихідна ланка кулачкового механізму нерухома?
9. В яких кулачкових механізмах важливим є кут тиску?
10. Що характерно для закону руху вихідної ланки з жорстким ударом?
11. Чим відрізняються закони руху вихідної ланки з м'яким ударом від законів руху без удару?
12. Чим визначається початковий радіус шайби кулачка у випадку штовхача з роликівим башмаком?
13. Які допустимі кути тиску для кулачкових механізмів з штовхачем і з коромислом?
14. Що таке загострення профілю кулачка?
15. Яким умовам повинен задовольняти радіус ролика?
16. Із яких умов визначається початковий радіус шайби кулачка у випадку штовхача з тарілчастим башмаком?

ЛЕКЦІЯ 16

ЗМІСТ

8. Зрівноваження механізмів.

- 8.1. Задачі зрівноваження механізмів.
- 8.2. Види зрівноваження механізмів.
- 8.3. Метод зосередження мас.
- 8.4. Статичне зрівноваження механізмів.
- 8.5. Повне зрівноваження механізмів.

8.1. Задачі зрівноваження механізмів.

Як було показано в главі 4, на реакції в кінематичних парах ланок крім активних сил (сил тяжіння, сил виробничих опорів і т.д.) впливають і сили інерції. При роботі машини ланки її механізмів рухаються з прискореннями, у результаті сили інерції викликають додаткові, іноді дуже великі, навантаження в кінематичних парах, збільшують тертя і знос її елементів, створюють додаткові напруження в окремих деталях машини. Додаткові навантаження в кінематичних парах, викликані рухом ланок, називають *динамічними*. Динамічні навантаження неминуче знижують витривалість матеріалу ланок і приводять до його руйнування.

При усталеному режимі руху динамічні складові реакцій у кінематичних парах змінюються циклічно. Оскільки рядом кінематичних пар механізм зв'язаний з основою (стійкою), то динамічні навантаження передаються на його основу (корпус машини, фундамент) і викликають його вібрацію, коливання і розхитування. Особливо небезпечні вібрації в зоні близькій до резонансу, що може викликати руйнування не тільки деталей машини, але і поруч розташованих споруд.

Тому при проектуванні і виготовленні машин ставиться задача про повне чи часткове гасіння динамічних навантажень, що викликаються рухом ланок і називають цю задачу **зрівноваженням рухомих мас механізму** або **зрівноваженням сил інерції**. Розв'язується ця задача шляхом раціонального розподілення і підбору мас ланок механізму.

Задачу по зрівноваженню сил інерції в механізмах можна розділити на дві частини:

- зрівноваження динамічних навантажень від машини чи механізму на фундамент;
- зрівноваження динамічних навантажень у кінематичних парах.

Зрівноваження динамічних навантажень у кінематичних парах механізму в загальному випадку викликає великі складності, тому ця задача розв'язується тільки для ланок, що обертаються (**роторів**). Називається ця задача **зрівноваженням ротора**. Експериментальне визначення неврівноваженості ротора і її усунення одержало назву **балансування ротора**.

8.2. Види зрівноваження механізмів

Розглянемо плоский механізм (рис. 8.1,а), початкова ланка 1 якого обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_1 . При цьому ланка 2 буде рухатися з кутовим прискоренням ε_2 , а центри мас S_1, S_2, S_3 ланок 1, 2, 3 будуть мати лінійні прискорення (план прискорень для даного положення механізму показаний на рис. 8.1,б).

Сили інерції $\bar{F}_{i1}, \bar{F}_{i2}, \bar{F}_{i3}$ ланок 1, 2, 3 спрямовані протилежно лінійним прискоренням центрів мас S_1, S_2, S_3 відповідно, а момент сил інерції M_{i2} другої ланки

спрямований протилежно кутовому прискоренню ε_2 . Оскільки раніше було прийнято $\omega_1 = const$ ($\varepsilon_1 = 0$), то $M_{u1} = J_{S1} \varepsilon_1 = 0$.

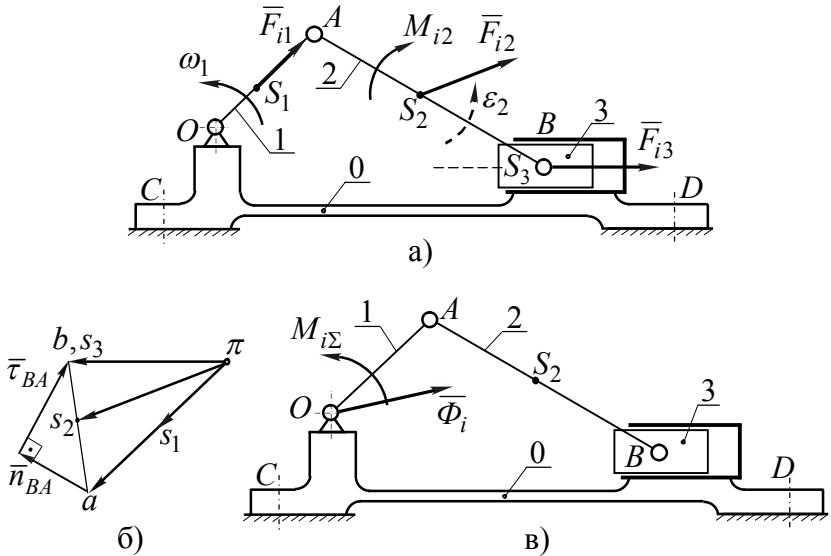


Рис. 8.1.

Приведемо всю систему сил інерції до центру нерухокої кінематичної пари O , яка пов'язана зі стійкою 0 (рис. 8.1,в). В результаті система сил інерції, що розглядається, зведеться до головного вектора:

$$\bar{\Phi}_i = \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{i3} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_{ik} \quad (8.1)$$

і головного моменту:

$$M_{i\Sigma} = -M_{i2} + M_O(\bar{F}_{i2}) + M_O(\bar{F}_{i3}),$$

або в загальному вигляді:

$$M_{i\Sigma} = \sum_{k=1}^n M_{ik} + \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_{ik}), \quad (8.2)$$

де n – число рухомих ланок механізму.

Таким чином, на стійку 0 механізму діє змінне у часі (яке циклічно змінюється) навантаження, що виражається головним вектором $\bar{\Phi}_i$ і головним моментом $M_{i\Sigma}$ сил інерції. При цьому необхідно відмітити, що сили, які навантажують основу, фактично прикладені в тих місцях, де стійка 0 кріпиться до основи, тобто до фундаментним болтів в точках C і D (рис. 8.1,в). Тому $\bar{\Phi}_i$ і $M_{i\Sigma}$ – чисто розрахункові величини, що характеризують лише сумарний результат динамічного впливу механізму на його основу.

Якщо головний вектор сил інерції механізму $\bar{\Phi}_i \neq 0$, то такий механізм називають **статично нерівноваженим**. (Головний момент сил інерції $M_{i\Sigma}$ в цьому випадку теж не дорівнює нулю).

Для **статичного зрівноваження** механізму на стадії його проектування шляхом закріплення додаткових мас на рухомих ланках механізму або шляхом зміни його схеми домагаються рівності нулю головного вектора сил інерції ($\bar{\Phi}_i = 0$).

Відзначимо, що при цьому не ставиться задача досягнення рівності нулю головного моменту сил інерції ($M_{i\Sigma} \neq 0$). Отже, **статично зрівноважений** механізм ніякого динамічного впливу на свою основу у виді сили не робить. Однак, такий механізм у загальному випадку продовжує діяти на свою основу у виді головного моменту. Тому, статично зрівноважений механізм іноді називають **моментно нерівноваженим механізмом**.

З теоретичної механіки відомо, що головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює:

$$\bar{\Phi}_i = -m\bar{a}_S,$$

де m – маса системи рухомих ланок механізму;

\bar{a}_S – прискорення центра мас S системи рухомих ланок механізму.

Звідси випливає, що рівність нулю головного вектора сил інерції можлива тільки в тому випадку, коли прискорення центра мас системи рухливих ланок механізму буде дорівнювати нулю ($a_S = 0$). Прискорення будь-якої точки може дорівнювати нулю в двох випадках:

- якщо точка нерухома;
- якщо точка рухається рівномірно і прямолінійно.

Враховуючи, що ніяка точка в механізмі не може тривалий час рухатися (відносно стійки) рівномірно і прямолінійно, то *центр мас механізму повинний бути нерухомим*.

Таким чином, *статичне зрівноваження полягає в такому закріпленні додаткових мас на ланках механізму або в такій зміні його схеми, при якому центр мас рухомих ланок стане нерухомим*.

Тепер розглянемо **зрівноваження головного моменту сил інерції механізму**. Необхідно відзначити, що зрівноваження головного моменту сил інерції $M_{i\Sigma}$ не можна здійснити на статично невірноваженому механізмі, оскільки його величина буде різною в залежності від обраного центра зведення. Дійсно, якщо відносно точки O (рис. 8.1) головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції дорівнюють $\bar{\Phi}_i$ і $(M_{i\Sigma})_O$ відповідно,

то відносно довільної точки, наприклад B , головний момент сил інерції буде дорівнювати:

$$(M_{i\Sigma})_B = (M_{i\Sigma})_O + M_B(\bar{\Phi}_i).$$

У випадку ж статично зрівноваженого механізму, коли головний момент сил інерції визначається при умові $\bar{\Phi}_i = 0$, то його величина не залежить від вибору центра зведення, тобто в якості останнього можна вибрати будь-яку точку, а не обов'язково точку O .

Таким чином, зрівноваження головного моменту сил інерції механізму можна виконати тільки на статично зрівноваженому механізмі якщо створити за допомогою двох додаткових сил (пари сил) момент, який дорівнює але протилежно спрямований головному моменту $M_{i\Sigma}$ сил інерції.

Додатковий момент, що зрівноважує $M_{i\Sigma}$, створюється силами інерції двох коригувальних мас, які закріплюють на ланках механізму (див. розділ 8.5).

У результаті такого зрівноваження одержимо механізм, у якого $\bar{\Phi}_i = 0$ і $M_{i\Sigma} = 0$, тобто **повністю зрівноважений механізм**.

8.3. Метод зосередження мас

При статичному зрівноваженні механізмів широко використовується метод, ідея якого полягає в наступному: масу m будь-якої ланки, що розподілена по її об'єму (рис. 8.2,а), замінюють окремими зосередженими масами m_A і m_B (рис. 8.2,б), які розташовують у характерних точках A і B ланки (найчастіше в центрах кінематичних пар).

Для еквівалентності такої заміни необхідно витримати наступні умови:

- маса ланки повинна дорівнювати сумі мас, що заміняють:

$$m = m_A + m_B; \quad (8.3)$$

- центр мас S' системи мас, яка замінює, повинен розташовуватися в тому ж місці, що і центр мас S заданої ланки, тобто статичний момент мас m_A і m_B відносно точки S повинен бути рівним нулю:

$$m_A l_{AS} - m_B l_{BS} = 0,$$

або

$$m_A l_{AS} = m_B l_{BS}. \quad (8.4)$$

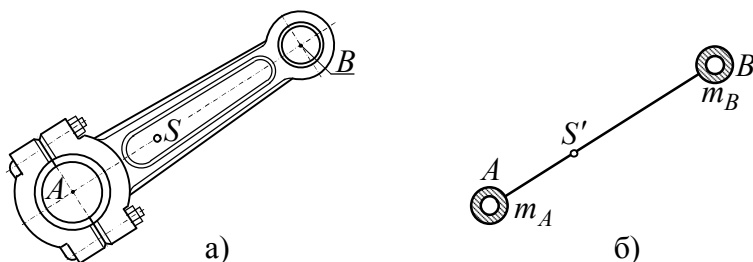


Рис. 8.2.

Якщо умови (8.3) і (8.4) будуть виконуватися, то головний вектор сил інерції ланки, який дорівнює добутку маси ланки на прискорення центру мас, буде дорівнювати головному вектору сил інерції системи мас m_A і m_B .

Оскільки при статичному зрівноваженні враховуються тільки сили інерції ланок (див. рівняння (8.1)) і не приймаються до уваги моменти сил інерції, то при такому зрівноваженні заміна кожної ланки двома зосередженими масами є цілком коректною.

Розв'язуючи спільно рівняння (8.3) і (8.4), визначаємо величини зосереджених мас у залежності від їхнього розташування відносно центра мас S ланки.

З (8.3) випливає:

$$m_B = m - m_A.$$

Підставляючи значення m_B в (8.4), для маси, що зосереджена в кінематичній парі A , одержимо:

$$\begin{aligned} m_A l_{AS} &= (m - m_A) l_{BS} = m l_{BS} - m_A l_{BS}; \\ m_A (l_{AS} + l_{BS}) &= m l_{BS}, \end{aligned}$$

звідки

$$m_A = m \frac{l_{BS}}{l_{AS} + l_{BS}} = m \frac{l_{BS}}{l_{AB}}. \quad (8.5)$$

Аналогічно для маси, що зосереджена в кінематичній парі B , одержимо:

$$m_B = m \frac{l_{AS}}{l_{AB}}. \quad (8.6)$$

8.4. Статичне зрівноваження механізмів

Статичне зрівноваження шарнірного механізму

Потрібно статично зрівноважити шарнірний механізм $OABC$ (рис.8.3,а), для якого задані довжини рухомих ланок l_1, l_2, l_3 , їх маси m_1, m_2, m_3 і положення центрів мас S_1, S_2, S_3 .

Використовуючи рівняння (8.5) і (8.6) замінимо масу кожної з рухомих ланок двома зосередженими масами, які розташуємо у центрах відповідних кінематичних пар (рис. 8.3,б).

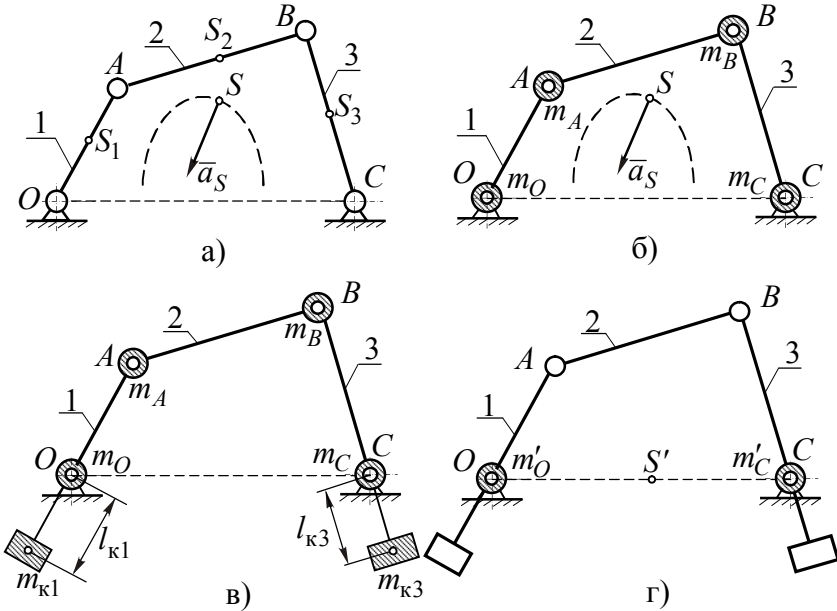


Рис. 8.3.

В центрі кінематичної пари O буде зосереджена частина маси 1 ланки:

$$m_O = m_1 l_{AS_1} / l_1. \quad (8.7)$$

В центрі кінематичної пари A – частина маси 1 ланки і частина маси 2 ланки:

$$m_A = m_1 l_{OS_1} / l_1 + m_2 l_{BS_2} / l_2. \quad (8.8)$$

В центрі кінематичної пари B – частина маси 2 ланки і частина маси 3 ланки:

$$m_B = m_2 l_{AS_2} / l_2 + m_3 l_{CS_3} / l_3, \quad (8.9)$$

і в кінематичній парі C – частина маси 3 ланки:

$$m_C = m_3 l_{BS_3} / l_3. \quad (8.10)$$

Таким чином, заданий механізм виявився заміненим чотирма масами, зосередженими в кінематичних парах O , A , B , C (рис. 8.3,б). Центр мас S системи зосереджених мас $[m_O, m_A, m_B, m_C]$ знаходиться в тому ж місці, що і центр мас системи рухомих ланок 1, 2, 3 заданого механізму. При русі механізму центр мас S буде рухатися з прискоренням \bar{a}_S , а це означає, що заданий механізм (рис.8.3,а) статично не буде зрівноваженим.

Закріпимо на ланках 1 і 3 коригувальні маси (противаги) $m_{к1}$ і $m_{к3}$ (рис.8.3,в) з таким розрахунком, щоб центри мас систем $[m_A, m_{к1}]$ і $[m_B, m_{к3}]$ виявилися б у нерухомих точках O і C . Для цього суми статичних моментів мас ланок 1 і 3 відносно точок O і C відповідно повинні бути рівними нулю:

$$m_{к1}l_{к1} - m_A l_1 = 0 \Rightarrow m_{к1} = m_A l_1 / l_{к1}; \quad (8.11)$$

$$m_{к3}l_{к3} - m_B l_3 = 0 \Rightarrow m_{к3} = m_B l_3 / l_{к3}. \quad (8.12)$$

Об'єднаємо маси, що розміщені на ланках 1 і 3 (рис.8.3,г):

$$m'_O = m_A + m_O + m_{к1}; \quad m'_C = m_C + m_B + m_{к3}.$$

Таким чином, після закріплення коригувальних мас $m_{к1}$ і $m_{к3}$, заданий механізм може бути замінений системою двох зосереджених мас m'_O і m'_C , які є нерухомими. Центр мас S' цієї системи, а відповідно, і центр мас механізму, який доповнений коригувальними масами $m_{к1}$ і $m_{к3}$, буде лежати на нерухомій лінії OC , тобто теж стане нерухомих (рис.8.3,г). А це означає, що статична зрівноваженість заданого механізму досягнута. Величини коригувальних мас $m_{к1}$ і $m_{к3}$ визначаються із

рівнянь (8.11) та (8.12) за попередньо обраними розмірами закріплення $l_{к1}$ і $l_{к3}$.

Статичне зрівноваження кривошипно-повзункового механізму

Потрібно статично зрівноважити кривошипно-повзунковий механізм OAB (рис.8.4,а), для якого задані довжини рухомих ланок l_1 , l_2 , їх маси m_1 , m_2 , m_3 і положення центрів мас S_1 , S_2 , S_3 .

Використовуючи рівняння (8.5) і (8.6) замінимо масу кожної з рухомих ланок двома зосередженими масами, які розташуємо у центрах відповідних кінематичних пар (рис.8.4,б).

В центрі кінематичної пари O буде зосереджена частина маси 1 ланки:

$$m_O = m_1 l_{AS1} / l_1. \quad (8.13)$$

В центрі кінематичної пари A – частина маси 1 ланки і частина маси 2 ланки:

$$m_A = m_1 l_{OS1} / l_1 + m_2 l_{BS2} / l_2. \quad (8.14)$$

В центрі кінематичної пари B – частина маси 2 ланки і маса 3 ланки:

$$m_B = m_2 l_{AS2} / l_2 + m_3. \quad (8.15)$$

Закріпимо на 2 ланці коригувальну масу $m_{к2}$ (рис.8.4,в) з таким розрахунком, щоб центр мас системи зосереджених мас $[m_B, m_{к2}]$ опинився б в точці A . Для цього сума статичних моментів мас m_B і $m_{к2}$ відносно точки A повинна дорівнювати нулю:

$$m_{к2} l_{к2} - m_B l_2 = 0 \Rightarrow m_{к2} = m_B l_2 / l_{к2}. \quad (8.16)$$

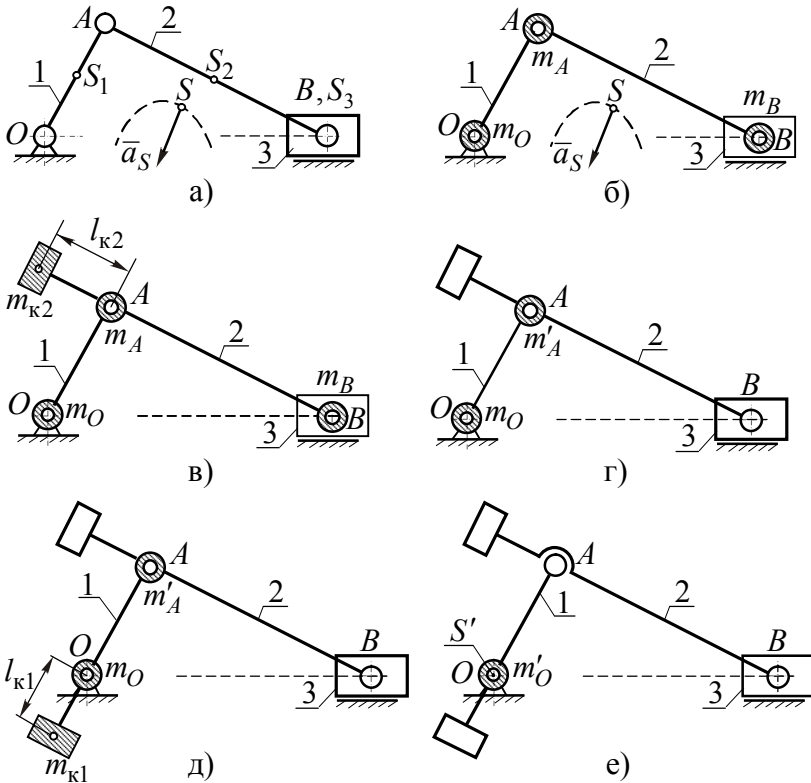


Рис. 8.4.

Об'єднаємо маси, що розміщені на 2 ланці (рис.8.4,г):

$$m'_A = m_A + m_B + m_{к2}. \quad (8.17)$$

Закріпимо на 1 ланці коригувальну масу $m_{к1}$ (рис.8.4,д) з таким розрахунком, щоб центр мас системи зосереджених мас $[m'_A, m_{к1}]$ опинився б в точці O . Для цього сума статичних моментів мас m'_A і $m_{к1}$ відносно точки A повинна дорівнювати нулю:

$$m_{к1}l_{к1} - m'_Al_1 = 0 \Rightarrow m_{к1} = m'_Al_1/l_{к1}. \quad (8.18)$$

Об'єднаємо маси, що розміщені на ланці 1 (рис.8.4,е):

$$m'_O = m_1 + m_2 + m_3 + m_{к1} + m_{к2}. \quad (8.19)$$

Таким чином, після закріплення коригувальних мас на 1 і 3 ланках заданий механізм може бути замінений однією нерухомою масою m'_O (рис.8.3,е), тобто центр мас S' заданого механізму, але доповненого коригувальними масами $m_{к1}$ і $m_{к2}$ буде нерухомим. А це значить, що механізм стане статично зрівноваженим.

Якщо попередньо задати розміри $l_{к1}$ і $l_{к2}$, то величини коригувальних мас $m_{к1}$ і $m_{к2}$ можна визначити із рівнянь (8.16) і (8.18).

Таким чином, статичне зрівноваження за допомогою методу зосереджених мас полягає в наступному:

- кожную ланку механізму, за винятком повзунів, треба замінити двома зосередженими масами, які розташувати в центрах кінематичних пар;
- закріплюючи на рухомих ланках механізму коригувальні маси (противаги) і об'єднуючи їх з зосередженими масами треба домогтися того, щоб об'єднані маси у кінцевому рахунку виявилися б розміщеними в *нерухомих* точках механізму.

Неповне статичне зрівноваження механізмів

Встановлення двох противаг при статичному зрівноваженні кривошипно-повзункового механізму (рис. 8.4,е) приводить до того, що коригувальна маса $m_{к2}$ на шатуні 2 сильно його подовжує, а разом з цим збільшує і габарити усього механізму. Таке конструктивне рішення

досить рідко використовується в інженерній практиці. Як правило кривошипно-повзунковий механізм статично зрівноважують тільки однією коригувальною масою, яку закріплюють на кривошипі 1.

Зрівноважимо таким способом раніш розглянутий кривошипно-повзунковий механізм (рис. 8.4,а).

Рознесемо маси ланок по кінематичним парам (рис. 8.4,б).

Закріпимо на 1 ланці коригувальну масу $m_{к1}$ (рис.8.5,а) з таким розрахунком, щоб центр мас системи зосереджених мас $[m_A, m_{к1}]$ опинився б в точці O . Для цього сума статичних моментів мас m_A і $m_{к1}$ відносно точки O повинна дорівнювати нулю:

$$m_{к1}l_{к1} - m_A l_1 = 0 \Rightarrow m_{к1} = m_A l_1 / l_{к1}. \quad (8.20)$$

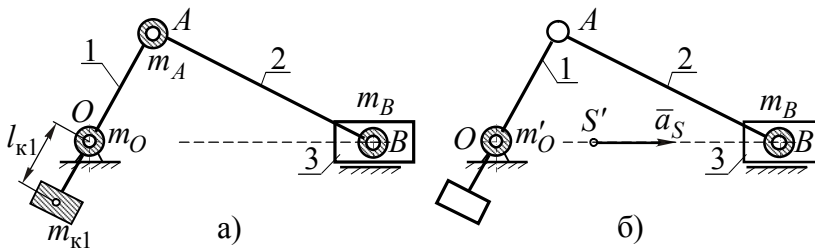


Рис. 8.5.

Об'єднаємо маси, що розміщені на ланці 1 (рис.8.5,б):

$$m'_O = m_O + m_A + m_{к1} = m_1 + m_{к1} + m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_2}. \quad (8.21)$$

Таким чином, після закріплення коригувальної маси $m_{к1}$ механізм може бути замінений системою двох мас

(рис.8.5,б): нерухомою масою m'_O і масою m_B , яка рухається горизонтально. Центр мас S' такої системи, а відповідно, і заданого механізму, але доповненого коригувальною масою $m_{к1}$, буде рухатися по лінії BO .

Оскільки прискорення \bar{a}_S центра мас рухомих ланок, а отже, і головний вектор сил інерції теж будуть спрямовані уздовж цієї лінії, то динамічний вплив механізму на основу буде тільки в горизонтальному напрямі.

Статичне зрівноваження, при якому не ставиться задача досягнення рівності нулю головного вектора сил інерції, а фіксується тільки його лінія дії, тобто задається напрямом динамічного впливу, називається **неповним статичним зрівноваженням**.

Неповне статичне зрівноваження дуже часто використовується на практиці, наприклад, у двигунах внутрішнього згоряння, поршневих насосах, сільськогосподарських машинах і т.д.

Схемне зрівноваження механізмів

Повного статичного зрівноваження можна досягти і без закріплення додаткових мас на рухомих ланках, якщо спроектувати механізм, який буде сам себе зрівноважувати. Прикладом такого механізму є здвоєний кривошипно-повзунковий механізм (рис.8.6,а), який використовується в двигунах внутрішнього згоряння.

Механізм виконаний кососиметричним, права і ліва шатунно-поршневі групи 2-3 і 4-5 абсолютно однакові, центр мас S_1 колінчатого вала 1 знаходиться на осі обертання ($\bar{F}_{i1} = 0$).

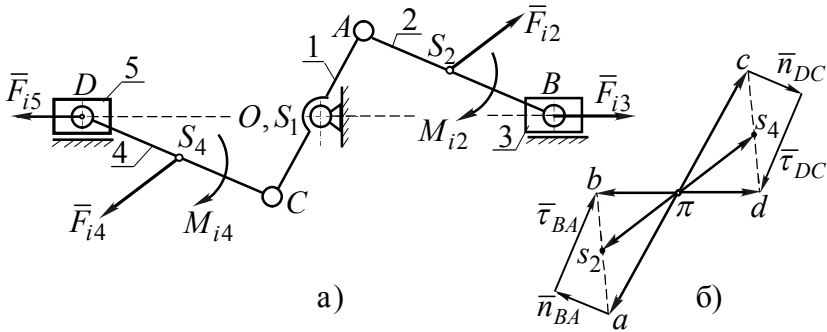


Рис. 8.6.

План прискорень такого механізму теж буде кососиметричним (рис.8.6,б), тобто прискорення характерних точок попарно рівні за величиною але протилежні за напрямом: $\vec{a}_{S_2} = -\vec{a}_{S_4}$; $\vec{a}_B = -\vec{a}_D$. Тому головний вектор сил інерції рухомих ланок дорівнює:

$$\vec{F}_{i\Sigma} = \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \vec{F}_{i4} + \vec{F}_{i5} = 0,$$

що свідчить про повну статичну зрівноваженість механізму.

Однак, головний момент сил інерції не дорівнює нулю:

$$M_{i\Sigma} = M_{i4} + M_{i2} + M_O(\vec{F}_{i2}) + M_O(\vec{F}_{i4}) \neq 0,$$

тобто на основу механізму буде діяти момент від сил інерції рухомих ланок механізму.

На рис. 8.7, показана схема однорядного двоциліндрового двигуна внутрішнього згорання. Оскільки прискорення точок B і D (рис. 8.7,б) хоч і спрямовані в різні боки але за величиною не рівні ($a_B \neq a_D$), то в цьому випадку досягається тільки часткове статичне зрівноваження.

Однак, в багатоциліндрових двигунах (з числом циліндрів більшим 6) при певних кутах розвалу робочих шийок колінчатого вала можна отримати схему механізму, яка буде статично зрівноваженою.

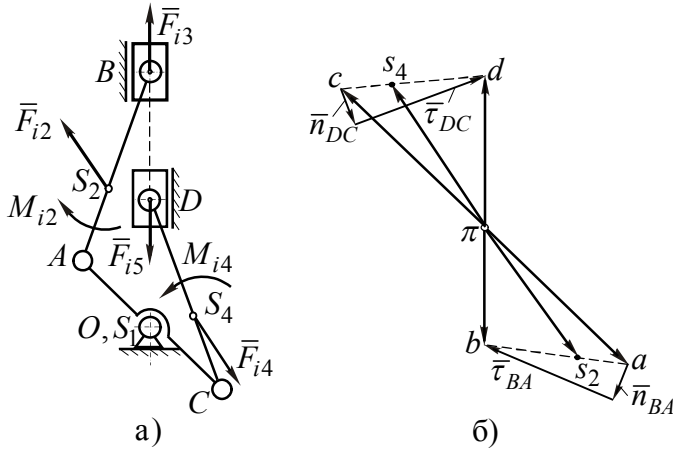


Рис. 8.7.

На закінчення відзначимо, що статично зрівноважений механізм зберігає свою статичну зрівноваженість при будь-якій кутовій швидкості початкової ланки, як сталій, так і змінній.

8.5. Повне зрівноваження механізмів

Вище було показано, що зрівноважування моменту від сил інерції рухомих ланок можна виконати тільки на статично зрівноваженому механізмі ($\bar{\Phi}_i = 0$). Для цього необхідно зрівноважити головний момент сил інерції $M_{i\Sigma}$, тобто досягти умови: $M_{i\Sigma} = 0$.

Розглянемо зрівноважування моменту від сил інерції рухомих ланок на прикладі статично

зрівноваженого шарнірного механізму (рис. 8.8). Розгляд виконаємо при умові $\omega_1 = const$.

Головний момент сил інерції механізму визначимо по залежності (8.2). При цьому необхідно мати на увазі, що попередньо механізм був статично зрівноваженим, тобто

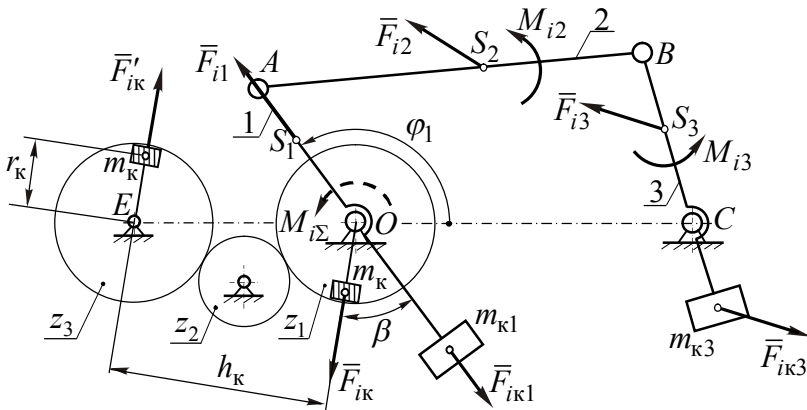


Рис. 8.8.

з'явилися маси m_{k1} і m_{k3} .

З огляду на те, що ланка OA обертається зі сталою кутовою швидкістю, то лінія дії сил інерції \bar{F}_{i1} першої ланки і \bar{F}_{ik1} протизваги масою m_{k1} проходить через точку O і їх моменти відносно цієї точки дорівнюють нулю. Сила ж інерції \bar{F}_{ik3} протизваги масою m_{k3} буде створювати момент відносно точки O .

З урахуванням сказаного, рівняння (8.2) набуде виду:

$$M_{i\Sigma} = M_{i2} + M_{i3} + M_O(\bar{F}_{i2}) + \\ + M_O(\bar{F}_{i3}) + M_O(\bar{F}_{ik3}). \quad (8.22)$$

Оскільки момент $M_{i\Sigma}$ визначається при умові $\bar{\Phi}_i = 0$, то його величина не залежить від вибору центра зведення.

Доповнимо схему механізму (рис. 8.8) рядним зубчастим механізмом $[z_1 - z_2 - z_3]$. Зубчасте колесо z_1 жорстко пов'яжемо з ланкою 1, тобто його кутова швидкість буде рівною ω_1 . Рівне колесу z_1 колесо z_3 зубчастого механізму буде обертатися в ту ж саму сторону і з такою ж кутовою швидкістю.

Встановимо дві однакові коригувальні маси (противаги) m_k , які закріпимо на зубчастих колесах z_1 і z_3 . Радіуси r_k , закріплення противаг однакові, а їх кутові координати в будь-якому положенні механізму відрізняються одна від другої на 180° .

Унаслідок цього відцентрові сили інерції противаг масою m_k складуть пару сил $[\bar{F}'_{ik}, \bar{F}'_{ik}]$ з плечем h_k (рис. 8.8): $h_k = l_{OE} \sin(\varphi_1 - \beta)$.

Враховуючи, що модуль відцентрової сили інерції маси m_k дорівнює:

$$F'_{ik} = F'_{ik} = m_k r_k \omega_1^2,$$

то момент пари сил $[\bar{F}'_{ik}, \bar{F}'_{ik}]$, який в подальшому будемо називати **коригувальним**, складе:

$$M_k = m_k r_k \omega_1^2 l_{OE} \sin(\varphi_1 - \beta). \quad (8.23)$$

Максимального значення коригувальний момент досягне, коли $\sin(\varphi_1 - \beta) = 1$:

$$M_{k \max} = m_k r_k \omega_1^2 l_{OE}. \quad (8.25)$$

У процесі руху механізму сили інерції і моменти сил інерції ланок періодично змінюються, а отже, буде змінюватися і головний момент сил інерції $M_{i\Sigma}$ (див. рівняння (8.22)). Зміна моменту $M_{i\Sigma}$ наближається до синусоїдального закону, хоча точно йому не відповідає. Коригувальний же момент M_K , який повинен зрівноважувати $M_{i\Sigma}$, змінюється строго за синусоїдальним законом (див. рівняння (8.23)). Як приклад на рис. 8.9 показані характери зміни $M_{i\Sigma}$ і M_K для одного оберту початкової ланки OA .

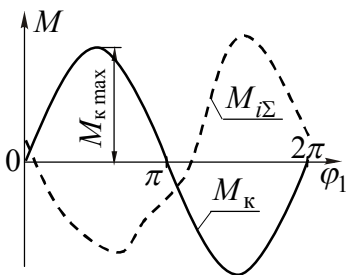


Рис. 8.9.

Таким чином, при моментному зрівноваженні механізму коригувальний момент M_K не може точно зрівноважити головний момент сил інерції $M_{i\Sigma}$ і тому моментне зрівноваження завжди є наближенням.

Змінюваними параметрами при моментному зрівноважуванні є кут β закріплення коригувальних мас (рис. 8.7) і максимальне значення коригувального моменту M_K , тобто необхідно знайти такі значення для β і $M_{K \max}$, при яких синусоїдальна залежність M_K щонайкраще буде апроксимувати функцію головного моменту $M_{i\Sigma}$ сил інерції, але мати протилежний знак.

Після зрівноваження головного моменту сил інерції, одержимо повністю урівноважений механізм ($\bar{\Phi}_i = 0$, $M_{i\Sigma} = 0$), який при роботі не створює динамічного впливу на свою основу.

ЛЕКЦІЯ 17

ЗМІСТ

- 8.6. Види невірноваженості роторів.
 - 8.7. Зрівноваження ротора при проектуванні.
 - 8.8. Статичне і динамічне балансування виготовленого ротора.
- Контрольні питання до теми 8

8.6. Види невірноваженості роторів

Ротором в теорії зрівноваження (балансування) називають будь яку деталь, що обертається. Тому ротором є колінчатий вал двигуна внутрішнього згорання чи поршневого компресора, маховик, якір електродвигуна і т.д.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, при обертанні твердого тіла динамічні складові реакцій на опорах (підшипниках) дорівнюють нулю, коли вісь обертання збігається з однією з трьох головних осей інерції тіла, тобто коли центр мас S тіла (рис. 8.10) лежить на осі z його обертання:

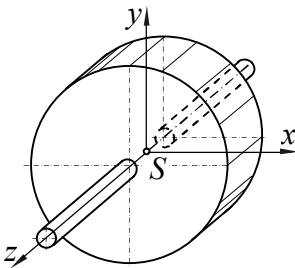


Рис. 8.10.

$$x_S = 0; \quad y_S = 0, \quad (8.26)$$

і відцентрові моменти інерції J_{xz} , J_{yz} тіла відносно цієї осі дорівнюють нулю:

$$J_{xz} = 0; \quad J_{yz} = 0. \quad (8.27)$$

У всіх інших випадках, тобто коли не виконуються умови (8.26) і (або) (8.27), при обертанні ротора обов'язково з'являться сили інерції чи моменти сил інерції, чи перші і другі разом, від дії яких у реакціях підшипників виникнуть динамічні складові.

1. Статично неврівноважений ротор

Статична неврівноваженість має місце, коли центр мас ротора не знаходиться на осі обертання ($x_S \neq 0$; $y_S \neq 0$), але вісь обертання паралельна одній із головних центральних осей інерції ротора ($J_{xz} = 0$; $J_{yz} = 0$).

Розглянемо ротор, що показаний на рис. 8.11. Вісь обертання z такого ротора паралельна його головній осі інерції $I - I$, а центр мас S не лежить на осі обертання. Положення центра мас відносно осі обертання ротора визначається радіус-вектором \bar{e}_{ct} , який називається **ексцентриситетом** маси ротора. При рівномірному обертанні ($\omega = const$) центр мас S такого ротора рухається по колу радіусом e_{ct} з нормальним \bar{a}_S^n прискоренням, яке спрямоване до осі обертання.

Згідно принципу Даламбера головний вектор сил інерції \bar{F}_i ротора прикладений в центрі мас і спрямований протилежно прискоренню \bar{a}_S^n :

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_S^n = m\bar{e}_{ct}\omega^2. \quad (8.28)$$

Заміна знаку в формулі (8.28) пояснюється тим, що вектор \bar{F}_i збігається за напрямом з радіус-вектором \bar{e}_{ct} .

Оскільки сила інерції пропорційна квадрату кутової швидкості, то для швидкохідного ротора навіть при незначному ексцентриситеті вона може досягнути великого значення. Наприклад, якщо ротор масою $m = 2 \text{ кг}$ обертається з числом обертів $n = 80000 \text{ об/мин}$ ($\omega = \pi n/30 \approx 8400 \text{ с}^{-1}$), що характерно для роторів

турбонаддуву дизелів, то при ексцентриситеті маси ротора $e_{ст} = 0,1 \text{ мм}$ головний вектор сил інерції буде дорівнювати:

$$F_i = m\omega^2 e_{ст} = 2 \cdot 8400^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \approx 14000 \text{ Н},$$

що в 700 раз більше ніж вага ротора.

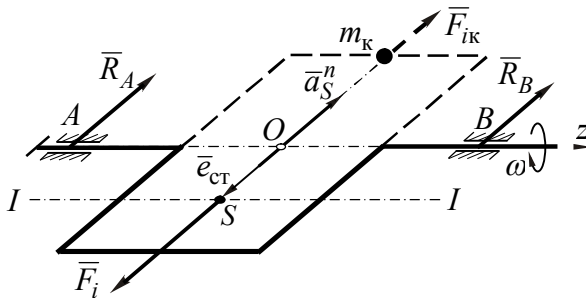


Рис. 8.11.

У результаті, на опорах A і B ротора виникнуть реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B (рис. 8.11.), що будуть обертатися разом з ним і будуть зрівноважувати головний вектор сил інерції \bar{F}_i .

Статичну невірноваженість характеризують **статичним дисбалансом**:

$$\bar{D}_{ст} = m\bar{e}_{ст}. \quad (8.29)$$

Вектор статичного дисбалансу $\bar{D}_{ст}$ збігається за напрямом з головним вектором сил інерції \bar{F}_i :

$$\bar{F}_i = \omega^2 \bar{D}_{ст}. \quad (8.30)$$

Статична невірноваженість може бути усунута, якщо до ротора прикріпити додаткову масу m_k , яку називають **коригувальною** (на мал.8.11 показана пунктирними лініями). Цю масу треба закріпити з таким розрахунком, щоб її сила інерції \bar{F}_{ik} була рівною, але

протилежно спрямованою головному вектору сил інерції \vec{F}_i , тобто:

- центр коригувальної маси повинен лежати на лінії OS ;
- вектор \vec{e}_k повинен бути спрямованим в сторону, протилежну вектору $\vec{e}_{ст}$;
- статичні дисбаланси ротора і коригувальної маси повинні бути рівними:

$$D_k = D_{ст}; \quad m_k e_k = m e_{ст}; \quad m_k = m e_{ст} / e_k. \quad (8.31)$$

Очевидно, що при повороті тіла на будь-який кут сили інерції коригувальної маси і ротора будуть врівноважувати одна одну, а отже, результуюча сила інерції буде дорівнювати нулю і на опори ротора передаватися не буде. Можна також сказати, що після установки коригувальної маси центр мас ротора S зміститься на вісь обертання. Іноді замість установлення коригувальної маси видаляють (якщо це технічно можливо) частину маси з тієї сторони, у яку зміщений центр мас S ротора (наприклад, висвердлюють). Величина маси, що видаляється, визначається по формулі (8.31).

Статичне зрівноваження не завжди вдається виконати однією коригувальною масою.

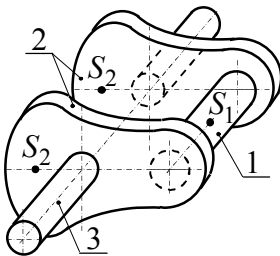


Рис. 8.12.

Наприклад, конструкція колінчатого вала (рис. 8.12) змушує встановлювати дві маси. Дисбаланс, викликаний ексцентриситетом центра мас S_1 шатунної шийки 1 відносно осі обертання корінних шийок 3, компенсується дисбалансом мас фігурних щік 2 (центри мас S_2).

2. Моментно нерівноважений ротор

Моментна нерівноваженість властива такому ротору, центр мас S якого знаходиться на осі обертання ($x_S = 0$; $y_S = 0$), а головна вісь інерції ротора нахилена до осі обертання, тобто відцентрові моменти інерції ротора відносно цієї осі не дорівнюють нулю ($J_{xz} \neq 0$; $J_{yz} \neq 0$).

Розглянемо невагомий вал AB (рис. 8.13) з двома зосередженими масами $m = m'$, які закріплені на відстанях $r = r'$ з різних сторін від осі обертання і лежать в одній площині.

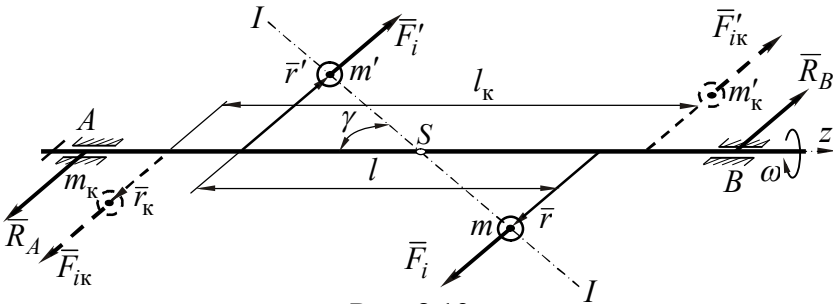


Рис. 8.13.

Очевидно, що центр мас S такої системи знаходиться на осі обертання і ротор статично зрівноважений. Головна вісь інерції $I-I$, що проходить через зосереджені маси m і m' , нахилена під кутом γ до осі обертання z ротора.

При обертанні такого ротора сили інерції \bar{F}_i і \bar{F}'_i зосереджених мас m і m' , які спрямовані вздовж радіусів \bar{r} і \bar{r}' від осі обертання, утворюють пару сил, момент якої дорівнює:

$$M(\bar{F}_i, \bar{F}'_i) = F_i \cdot l = mr\omega^2 l. \quad (8.32)$$

Цей момент намагається повернути ротор таким чином, щоб головна вісь інерції $I-I$ стала

перпендикулярною до осі обертання. Момент сил інерції $M(\bar{F}_i, \bar{F}'_i)$ зрівноважується реакціями \bar{R}_A і \bar{R}_B на опорах ротора A і B , які, в свою чергу, теж утворюють пару сил. Така неврівноваженість ротора називається **моментною**, і її можна визначити тільки при його обертанні. Характеризується моментна неврівноваженість **динамічним дисбалансом**:

$$D_d = mrl. \quad (8.33)$$

Оскільки пару сил можна зрівноважити тільки парою, то для усунення моментної неврівноваженості на роторі в різних площинах, перпендикулярно до осі обертання, закріплюють дві коригувальні маси m_k і m'_k (на мал. 8.13 показані пунктирними лініями). Положення коригувальних мас вибирають таким, щоб створюваний силами інерції \bar{F}_{ik} і \bar{F}'_{ik} цих мас момент був рівним моменту $M(\bar{F}_i, \bar{F}'_i)$, але протилежно спрямованим:

$$M(\bar{F}_i, \bar{F}'_i) = M(\bar{F}_{ik}, \bar{F}'_{ik}),$$

або з урахуванням (8.33):

$$mrl = m_k r_k l_k \Rightarrow m_k r_k = mrl/l_k. \quad (8.34)$$

Установка двох коригувальних мас дозволяє повернути головну вісь інерції ротора на кут γ і сполучити її з віссю обертання.

3. Динамічна неврівноваженість ротора

Динамічна неврівноваженість є сукупністю двох попередніх, тобто центр мас ротора не знаходиться на осі обертання ($x_S \neq 0$; $y_S \neq 0$) і головна вісь інерції ротора нахилена до осі обертання ($J_{xz} \neq 0$; $J_{yz} \neq 0$). Таким чином, на ротор крім головного вектора сил інерції, обумовленого

статичним дисбалансом $D_{ст}$, діє і момент сил інерції, обумовлений динамічним дисбалансом D_d .

Для усунення динамічної неврівноваженості необхідно, щоб одна з трьох головних центральних осей інерції ротора збіглася з його віссю обертання, тоді $D_{ст} = 0$ і $D_d = 0$. Усувається динамічна неврівноваженість двома коригувальними масами, розташованими в площинах корекції, що перпендикулярні до осі обертання ротора (більш докладно це питання буде розглянуто в главі 8.7).

Зі сказаного випливає, що усунення будь-якої неврівноваженості (статичної, моментної, динамічної) – має своїм результатом сполучення головної центральної осі інерції ротора з його віссю обертання. У цьому випадку ротор називається **повністю урівноваженим**. Відзначимо важливу властивість такого ротора: якщо ротор повністю урівноважений для деякого значення кутової швидкості ω , то він зберігає свою урівноваженість при будь-якій іншій кутовій швидкості, як сталій, так і змінній.

8.7. Зрівноваження ротора при проектуванні

Якщо експлуатація машини вимагає застосування цілком урівноваженого ротора, а конструкція його така, що ротор неврівноважений, то зрівноважування такого ротора необхідно почати ще на стадії його проектування.

Нехай ротор являє собою сукупність декількох деталей 1, 2, 3 (рис.8.14,а) масою m_1 , m_2 , m_3 , які обертаються як одне ціле навколо осі z . Центри мас деталей S_1 , S_2 , S_3 розташовані в площинах 1, 2, 3, що перпендикулярні до осі обертання z , на відстанях r_1 , r_2 ,

r_3 . Напрями радіус-векторів \bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 задаються кутами α_1 , α_2 , α_3 .

При обертанні ротора з кутовою швидкістю ω сили інерції \bar{F}_{i1} , \bar{F}_{i2} , \bar{F}_{i3} деталей будуть спрямовані вздовж відповідних радіус-векторів і за модулем дорівнюють:

$$F_{i1} = m_1\omega^2 r_1; \quad F_{i2} = m_2\omega^2 r_2; \quad F_{i3} = m_3\omega^2 r_3. \quad (8.35)$$

В загальному випадку отримаємо динамічно неврівноважений ротор.

Виконуючи зрівноваження такого ротора, можна було б кожній неврівноваженій масі протиставити свою коригувальну масу, тобто на даному роторі необхідно було б установити три коригувальні маси. Однак таке рішення не є доцільним, оскільки в роторі завжди відбувається часткове взаємне зрівноваження обертових мас.

Призначимо в роторі дві A і B площини (рис.8.14,а), що перпендикулярні до осі обертання z , у яких будемо встановлювати коригувальні маси $m_{кА}$ і $m_{кВ}$.

Умовою статичної зрівноваженості є рівність нулю головного вектора сил інерції, який дорівнює векторній сумі сил інерції обертових мас ротора:

$$\bar{F}_{iA} + \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{i3} + \bar{F}_{iB} = 0. \quad (8.36)$$

В рівнянні (8.36) \bar{F}_{iA} і \bar{F}_{iB} сили інерції коригувальних мас $m_{кА}$ і $m_{кВ}$.

З урахуванням (8.28) отримаємо:

$$m_{кА}\omega^2 \bar{r}_A + m_1\omega^2 \bar{r}_1 + m_2\omega^2 \bar{r}_2 + \\ + m_3\omega^2 \bar{r}_3 + m_{кВ}\omega^2 \bar{r}_B = 0. \quad (8.37)$$

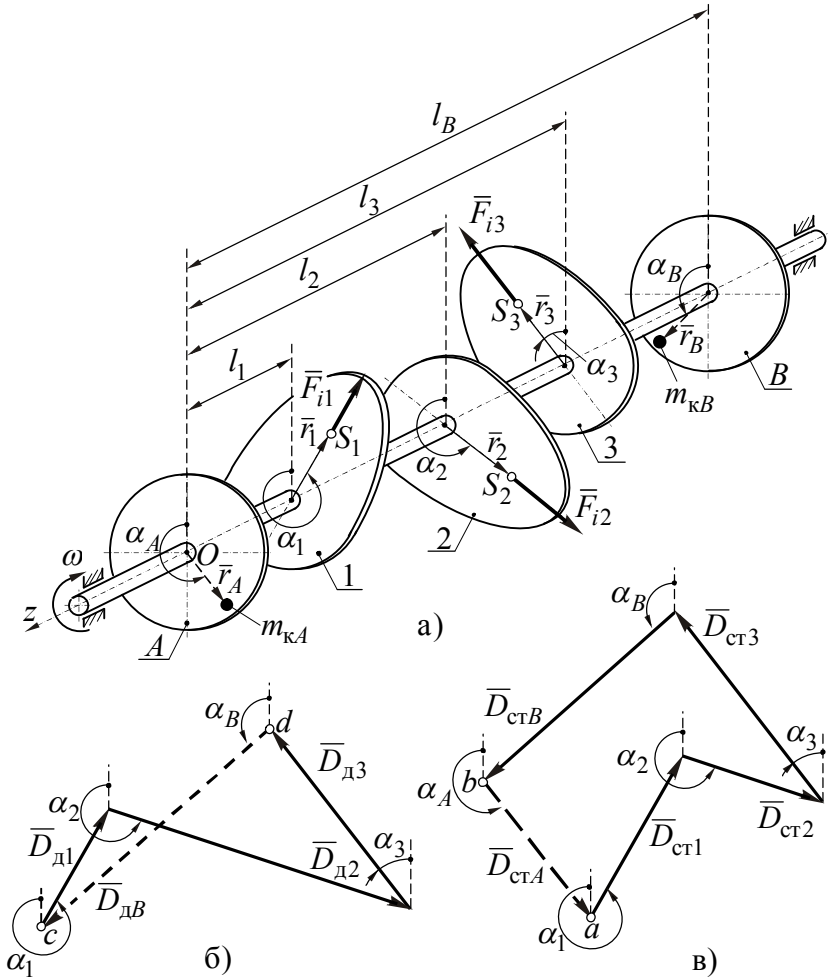


Рис. 8.14.

Якщо виключити сталий множник $\omega^2 \neq 0$, то:

$$\omega^2 (m_{кА} \bar{r}_A + m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_{кВ} \bar{r}_B) = 0; \Rightarrow$$

$$m_{кА} \bar{r}_A + m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_{кВ} \bar{r}_B = 0. \quad (8.38)$$

Враховуючи, що вектор статичного дисбалансу $\bar{D}_{\text{ст}}$ дорівнює добутку маси на радіус-вектор зміщення центра мас відносно осі обертання ($\bar{D}_{\text{ст}} = m\bar{r}_S$), то:

$$\bar{D}_{\text{ст}A} + \bar{D}_{\text{ст}1} + \bar{D}_{\text{ст}2} + \bar{D}_{\text{ст}3} + \bar{D}_{\text{ст}B} = 0, \quad (8.39)$$

тобто для *статичної зрівноваженості ротора необхідно забезпечити рівність нулю векторної суми статичних дисбалансів обертючих мас.*

Умовою моментної зрівноваженості є рівність нулю головного моменту сил інерції ротора. Виберемо як центр зведення точку O , яка лежить на осі обертання в площині A . Враховуючи, що момент від сили інерції коригувальної маси $m_{\text{к}A}$ відносно центра O дорівнює нулю, то для головного моменту сил інерції одержимо:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\Sigma} = \bar{M}_O(\bar{F}_{i1}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{i2}) + \\ + \bar{M}_O(\bar{F}_{i3}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{iB}). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Модулі векторів моментів сил інерції відносно центра O , з урахуванням виразу (8.33) для динамічного дисбалансу $D_{\text{д}}$, будуть дорівнювати (рис.8.14,а):

$$M_O(F_{i1}) = F_{i1}l_1 = m_1\omega^2 r_1 l_1 = \omega^2 D_{\text{д}1};$$

$$M_O(F_{i2}) = F_{i2}l_2 = m_2\omega^2 r_2 l_2 = \omega^2 D_{\text{д}2};$$

$$M_O(F_{i3}) = F_{i3}l_3 = m_3\omega^2 r_3 l_3 = \omega^2 D_{\text{д}3};$$

$$M_O(F_{iB}) = F_{iB}l_B = m_{\text{к}B}\omega^2 r_B l_B = \omega^2 D_{\text{д}B},$$

де: $D_{\text{д}1} = m_1 r_1 l_1$; $D_{\text{д}2} = m_2 r_2 l_2$; $D_{\text{д}3} = m_3 r_3 l_3$; $D_{\text{д}B} = m_{\text{к}B} r_B l_B$.

Якщо виключити сталий множник $\omega^2 \neq 0$, то рівняння (8.40) можна записати у наступному вигляді:

$$\bar{D}_{\text{д}1} + \bar{D}_{\text{д}2} + \bar{D}_{\text{д}3} + \bar{D}_{\text{д}B} = 0. \quad (8.41)$$

Таким чином, для моментного зрівноваження ротора необхідно забезпечити рівність нулю векторної суми динамічних дисбалансів обертових мас.

Розв'язати рівняння (8.39) і (8.41) можна графічним способом.

Спочатку будують векторний багатокутник динамічних дисбалансів (рис. 8.14,б) відповідно до рівняння (8.41).

З огляду на те, що вектор динамічного дисбалансу спрямований уздовж відповідного вектора моменту сил інерції, тобто перпендикулярно площини в якій лежать сила інерції і центр O , то при побудові вектор динамічного дисбалансу зручно повернути на 90° так, щоб він збігався з напрямком відповідної сили інерції (відповідного радіуса-вектора). Таким чином, напрями векторів $\bar{D}_{д1}$, $\bar{D}_{д2}$, $\bar{D}_{д3}$ (рис. 8.13,б) визначаються відповідно кутами α_1 , α_2 , α_3 (рис. 8.14,а). Модуль замикаючого вектора \overline{dc} багатокутника дорівнює динамічному дисбалансу $D_{дВ}$ коригувальної маси $m_{кВ}$. Враховуючи, що відстань l_B відома, то статичний дисбаланс маси $m_{кВ}$ буде рівним:

$$D_{стВ} = m_{кВ} r_B = D_{дВ} / l_B. \quad (8.42)$$

Із добутку $m_{кВ} r_B$ легко визначити радіус r_B (або масу $m_{кВ}$), Якщо задати масу $m_{кВ}$ (або радіус r_B):

$$r_B = D_{стВ} / m_{кВ} \quad \text{або} \quad m_{кВ} = D_{стВ} / r_B. \quad (8.43)$$

Кут α_B (рис. 8.14,а), що задає напрямок радіуса-вектора \bar{r}_B (кут закріплення маси $m_{кВ}$), визначається по кресленню векторного багатокутника (рис. 8.14,б).

Після визначення статичного дисбалансу $D_{стВ}$ будують векторний багатокутник статичних дисбалансів (рис. 8.14,в) відповідно до рівняння (8.39). Модуль замикаючого вектора \overline{ba} багатокутника дорівнює статичному дисбалансу $D_{стА}$ коригувальної маси $m_{кА}$. Визначення коригувальної маси $m_{кА}$ (або радіуса r_A) виконується аналогічно визначенню $m_{кВ}$ (або r_B). Напрямок радіуса-вектора \overline{r}_A (рис.8.14,а) задається кутом α_A (рис.8.14,в).

8.8. Статичне і динамічне балансування виготовленого ротора

Після виготовлення навіть динамічно зрівноважений при проектуванні ротор усе-таки має деяку неврівноваженість. Неврівноваженість ротора виникає внаслідок наступних причин:

- неточності виготовлення і монтажу;
- нерівномірності розподілення матеріалу по об'єму деталі, включаючи раковини, отвори і т.д.;
- деформації деталей як при монтажі, так і в процесі експлуатації;
- знос елементів обертальних кінематичних пар, в яких обертається ротор.

На практиці статична і динамічна неврівноваженість таких роторів усувається шляхом балансування на спеціальних балансувальних верстатах.

Статичне балансування

Як було показано вище, статичне балансування ротора полягає в зведенні до нуля головного вектора сил інерції, тобто в переміщенні центра мас ротора на його вісь

обертання. Для цього використовують різні балансувальні верстати. У найпростішому виконанні це дві горизонтальні призми 2 (рис. 8.15,а) чи дві пари роликів 3 (рис. 8.15,б), на які встановлюють ротор 1.

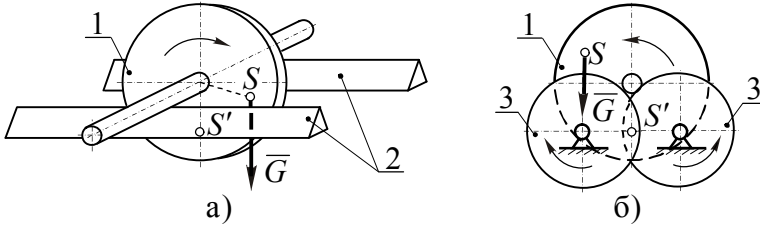


Рис. 8.15.

Якщо центр мас S зміщений щодо осі обертання, то під дією моменту, який буде створений вагою \bar{G} , ротор повернеться так, щоб центр мас зайняв найбільш низьке положення S' . Для зміщення центра мас на вісь обертання необхідно в нижній частині ротора (більш важкій) видалити частина металу (висвердлити) чи у верхній частині (більш легкій) закріпити коригувальну масу. При такому балансуванні, унаслідок тертя між ротором і призмами (роликami), залишається деяка залишкова невірноваженість.

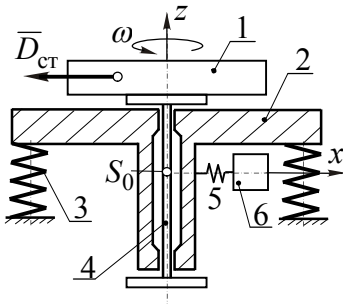


Рис. 8.16.

Більш точно балансування можна виконати при обертанні ротора. Схема верстата, що працює по такому принципу, показана на рис. 8.16.

Невірноважений ротор 1, що закріплений на шпинделі 4, обертається зі сталою кутовою швидкістю ω в підшипниках плити 2.

Плита 2 спирається на станину за допомогою пружних елементів 3. З плитою 2 через пружину 5 зв'язана маса 6 сейсмічного датчика. Маса 6 сейсмічного датчика може вільно рухатися уздовж осі x , що проходить через центр мас S_0 плити.

При обертанні шпинделя разом з ротором вісь z під впливом неврівноваженості ротора описує конічну поверхню, а плита 2 робить просторовий рух. Складова цього руху, що спрямована уздовж осі x , через пружину 5 сприймається масою 6 сейсмічного датчика. Змушені коливання цієї маси щодо станини перетворюються датчиком в електричні імпульси, які направляються в електронно лічильно-вирішальний пристрій (не показаний на схемі), що є невід'ємною частиною верстата. Цей пристрій видає інформацію про шукану неврівноваженість у виді модуля і кутової координати вектора статичного дисбалансу $\overline{D}_{ст}$ ротора.

Після визначення статичного дисбалансу $\overline{D}_{ст}$, оператор верстата усуває неврівноваженість звичайним способом видалення матеріалу ротора в більш важкій його частині.

Статичному балансуванню піддають ротори, що мають невелику ширину b уздовж осі обертання (відношення b до діаметра $b/D \leq 0,2$).

Динамічне балансування

При значних розмірах ротора уздовж осі обертання потрібно динамічне балансування, тому що в такого ротора крім статичної неврівноваженості може бути присутня і моментна. Оскільки динамічна неврівноваженість усувається двома коригувальними масами, то таку неврівноваженість можна умовно представити у виді

неврівноваженості двох зосереджених мас, дисбаланси яких відповідно дорівнюють \bar{D}_1 і \bar{D}_2 (рис.8.17,а, б).

У залежності від рухливості осі обертання ротора верстата, що призначені для динамічного балансування, можна розділити на три групи: з нерухоною віссю обертання, з коливною відносно деякої осі віссю обертання і з просторовим рухом осі обертання.

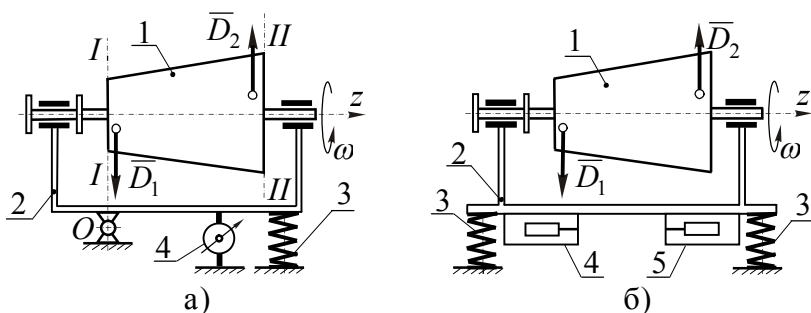


Рис. 8.17.

На рис. 8.17,а показана схема верстата, який відноситься до другої групи. Ротор 1, балансування якого виконується, обертається з кутовою швидкістю ω в підшипниках рами 2. Рама до станини кріпиться на двох опорах: шарнірній (опора O) і пружній (опора 3). Унаслідок такого кріплення рама може погойдуватися відносно нерухомої осі, яка проходить через центр шарніра O перпендикулярно до площини креслення. Разом з рамою буде погойдуватися відносно станини і ротор зі своєю віссю z . Амплітуда коливань рами при обертанні ротора заміряється індикатором 4.

При балансуванні ротор 1 на рамі 2 встановлюють таким чином, щоб одна із площин, в яких будуть закріплювати коригувальні маси, проходила через центр шарніра O .

Наприклад, при визначенні коригувальної маси $m_{кII}$, яка закріплюється в площини $II - II$, ротор треба встановити так, що б площина $I - I$, закріплення коригувальної маси $m_{кI}$, проходила через центр шарніра O . У цьому випадку коливання рами будуть викликатися моментами відносно центра шарніра O дисбалансів \bar{D}_1 , \bar{D}_2 і дисбалансу коригувальної маси $m_{кII}$ (дисбаланс коригувальної маси $m_{кI}$ моменту відносно цієї точки не створює). Кутову координату і величину дисбалансу коригувальної маси $m_{кII}$ визначають розрахунковим шляхом [9] за амплітудами коливань рами верстата для трьох варіантів ротора: вихідний ротор; ротор із закріпленою в довільній точці площини $II - II$ додатковою масою m і ротор із закріпленою в цій же точці додатковою масою $2m$.

Вектор дисбалансу маси $m_{кI}$ визначається аналогічним способом, але ротор 1 потрібно зняти з підшипників рами 2, повернути навколо вертикальної осі і знову покласти на підшипники, але так, щоб з віссю шарніра O збігалася площина $II - II$.

На рис. 8.17,б показана схема верстата, що відноситься до третьої групи. Неврівноважений ротор 1 обертається з сталою кутовою швидкістю ω в підшипниках, які змонтовані на плиті 2, що спирається на станину за допомогою чотирьох пружин 3. З плитою 2 зв'язані два сейсмічних датчики 4 і 5. При обертанні ротора під впливом його неуврівноваженості вісь z і плита 2 роблять просторовий рух, який сприймається датчиками 4 і 5. Датчики перетворюють змушені коливання плити в електричні імпульси, які направляються в електронне

лічильно-обчислювальний пристрій (на схемі не показаний).

Електронний лічильно-обчислювальний пристрій настроєний таким чином, що вимірник дисбалансу \bar{D}_1 настроюється на виключення у своїх показаннях впливу дисбалансу \bar{D}_2 , і дає, таким чином, інформацію тільки про дисбаланс \bar{D}_1 . Точно так, завдяки спеціальному настроюванню, вимірник дисбалансу \bar{D}_2 дає інформацію тільки про цей дисбаланс. Отже, обидві шукані величини дисбалансів одночасно визначаються електронним лічильно-обчислювальним пристроєм.

Після визначення дисбалансів \bar{D}_1 і \bar{D}_2 оператор виконує практичне балансування ротора у площинах корекції $I-I$ і $II-II$ або установкою коригувальних мас, або видаленням частини матеріалу.

Контрольні питання до теми 8

1. В чому полягають основні задачі зрівноважування механізмів?
2. Які основні види нерівноваженості механізмів?
3. В чому полягає метод зосередження мас?
4. Чому дорівнює головний вектор сили інерції ланок механізму?
5. У чому полягає статичне зрівноваження механізмів?
6. Чому моментне зрівноваження виконують тільки на статично зрівноважених механізмах?
7. У чому полягає ідея неповного статичного зрівноваження?

8. Основні види неврівноваженості ротора?
9. Що таке статичний дисбаланс маси?
10. Як зрівноважують ротор при проектуванні?
11. Причини неврівноваженості зрівноваженого при проектуванні ротора після його виготовлення?
12. Який ротор піддають тільки статичному зрівноваженню?
13. Скільки коригувальних мас необхідно закріпити на роторі при статичному зрівноваженні?
14. Чи можна виправити моментну неврівноваженість шляхом закріплення двох коригувальних мас в одній площині?
15. Скільки коригувальних мас необхідно закріпити на роторі при виправленні динамічної неврівноваженості?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988.
2. *Баранов Г.Г.* Курс теории механизмов и машин. М.: Машгиз, 1958.
3. *Зиновьев В.А.* Теория механизмов и машин. М.: Машгиз, 1955.
4. *Кініцький Я.Т.* Теорія механізмів і машин. К.: Наукова думка, 2001.
5. *Кініцький Я.Т.* Практикум із теорії механізмів і машин. К.: Наукова думка, 2002.
6. *Кореняко О.С.* Теорія механізмів і машин. К.: Вища шк., 1987.
7. *Левитская О.Н., Левитский Н.И.* Курс теории механизмов и машин. М.: Высшая шк., 1985.
8. *Машков А.А.* Теория механизмов и машин. Минск : Высшая школа, 1971.
9. Теория механизмов и машин /Под ред. К.В.Фролова. М.: Вышш. шк., 1987.
10. *Юдин В.А., Петрокас Л.В.* Теория механизмов и машин. М.: Вышш. шк., 1977.
11. *Левитский Н.И.* Кулачковые механизмы. М.: Машиностроение, 1964.
12. *Попов Н.Н.* Расчет и проектирование кулачковых механизмов. М.: Машиностроение, 1980.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Аналог швидкості точки 260
 – прискорення точки 260
- Балансування 294, 324
 – динамічне 326
 – статичне 324
- Башмак 250
- Важіль Жуковського 149, 151
 Вілліса, формула 215, 224
 Водило 210
- Головна вісь інерції 313, 317
 Головний вектор сил інерції 119, 120, 121
 – момент сил інерції 119, 120, 121
- Група Асура 26
 – – другого виду 32
 – – першого виду 31
 – – п'ятого виду 33
 – – третього виду 32
 – – четвертого виду 33
- Евольвента 162
 – круга 162
- Ексцентриситет 252
 Елементи евольвентного зачеплення 164
- Динамічна модель машинного агрегату 84
- Закони руху штовхача 259
 – – – з лінійною зміною прискорення 264
 – – – зі зміною прискорення за косинусоїдою 264
- – – зі сталим прискоренням 264
- Замикання геометричне 17
 – силове 17
- Загострення зубця 190
- Зачеплення зовнішнє 156
 – внутрішнє 156
 – рейкове 156
 – евольвентне 159
 – – прямозубе 155
 – – тангенціальне 157
 – – шевронне 156
 – дуга 169
- Зміщення інструменту 186
- Зрівноваження механізму 293
 – задачі 293
 – – моментне 309
 – – неповне статичне 306
 – – статичне 301
 – – – кривошипно-повзункового 303
 – – – шарнірного 301
 – – схемне 307
 – ротора 319
 – – динамічне 318
 – – моментне 317
 – – при проектуванні 319
 – – статичне 314
- Зубець зубчастого колеса, 159
 – висота головки 162
 – – ніжки 162
 – головна поверхня 159
 – поверхня вершин 159
 – – западин 159
 – – перехідна 159
 – товщина 162

- умова відсутності підрізан-
ня ніжки 182
- Зубчаста передача 154
 - – гіперболічна 157
 - – конічна 157
 - сонячне 212
 - центральне 210
 - – циліндрична 155, 158
 - рейка 157, 179, 181
- Зубчасте колесо, 154
 - – гіперболоїдне 157
 - – конічне 157
 - – косозубе 156
 - – кривозубе 157
 - – прямозубе 155
 - – тангенціальне 157
 - – шевронне 156
- Інструментальна рейка, 181
- Кінематична пара 10
 - – обертальна 10
 - – вища 17
 - –, замикання 16, 17
 - – нижча 16
 - –, рухомість 13
 - – поступальна 10
 - – сферична 15
 - – циліндрична 15
 - схема 11
- Кінематичний ланцюг 18
 - –, замкнутий 18
 - –, розімкнутий 18
 - –, плоский 18
 - –, простий 18
 - –, просторовий 18
 - –, складний 18
- Коефіцієнт зростання зусилля 271
- миттєвий корисної дії
кулачкового механізму 270
- перекриття 170
- зміщення 186
- Колесо косозубе 155
 - зубчасте циліндричне 155
 - зі зміщенням 186
 - опорне 212
 - – повзун 8, 9, 11
 - – початкова 9, 23, 28, 29, 38,
39, 40
 - – стійка 8, 9, 11
 - – шатун 8, 11
- Коло вершин 160
 - западин 160
 - ділильне 161
 - початкове 168
 - основне 162
- Контур блокувальний 192
- Копіювання, спосіб 177
- Коробка швидкостей 208
- Коромисло 8, 11
- Кривошип 8, 9
- Крок коловий 160
- Кулачковий механізм, 247
 - – з загостреним штовхачем
279
 - – з роликівим штовхачем
284
 - – кут тиску 267
 - – плоский 249
 - – просторовий 249
 - – синтез 256
- Кулачок, 247
- Кут тиску 267
 - віддалення 254
 - віддаленого висотою 254
 - зачеплення 168

- наближення 255
- наближеного вистою 255
- профілю рейки (стандартний) 181
- фазовий 253
- – критичний 269
- Ланка механізму, 7**
 - – вхідна 9, 23
 - – вихідна 9
 - – коромисло 8, 12, 39
 - – кривошип 8, 9, 12, 38
 - – куліса 8, 12
- Лінія зачеплення, 164**
 - – практична 166
 - – теоретична 164
 - – центрів 167
- Маса коригувальна 302, 305**
- Маховик 102, 104, 112**
- Машина, 6**
- Метод зосередження мас 302**
 - копіювання 177
 - Мерцалова 103
 - обкатки 178
- Механізм 6, 22**
 - другого класу 30
 - грохота 25
 - диференціальний, 222
 - – замкнутий 228
 - – на конічних колесах 225
 - кривошипно-повзунковий 8, 59
 - кулачковий 247
 - кулісний 38, 57
 - першого класу 29
 - планетарний 212, 219, 220
 - плоский 6
 - повністю зрівноважений 298
 - принцип утворення 24
 - простий зубчастий 154
 - просторовий 6
 - статично зрівноважений 307, 313
 - – нерівноважений 296
 - третього класу, 32
 - формула побудови 35
 - четвертого класу 32
 - – рядовий 203
 - – ступінчастий 206
 - шарнірний 24, 47
- Модуль зубців 161**
- Момент інерції зведений 86**
- Нерівноваженість механізму 294**
 - ротора 313
 - – динамічна 318
 - – моментна 317
 - – статична 314
- Пара кінематична 10**
 - – поступальна 10
 - – обертальна 10
 - – умовні позначення 15
- Передаточне відношення 167**
- Передача нерівнозміщена 194**
 - нульова 193
 - рівнозміщена 194
- План сил 128, 135, 141, 148**
 - швидкостей 50, 61, 67
 - прискорень 55, 65, 71
- Площина корекції 320**
- Поверхня зубця бокова 159**
- Підрізання зубця 182**
- Поліус зачеплення 166**
- Прискорення абсолютне 58**
 - Коріолісове 59
 - нормальне 46, 54

- відносне 58
- переносне 58
- повне 53
- тангенціальне 46, 54
- кутове 56, 66, 72
- Профіль кулачка 24, 279, 284, 290

- Редуктор зубчастий** 202
 - – планетарний 212
 - – –, умова складання 234
 - – –, – співвісності 231
 - – –, – сусідства 231
- Рівняння руху машини 95
- Розміри зубчастого зачеплення 195

- Сателіт** 210
- Сили взаємодії між ланками 79
 - внутрішні 80
 - зовнішні 80
 - рушійні 75
 - інерції 118
 - промислового опору 76
 - тертя 268
 - тяжіння 78
- Статична визначеність кінематичного ланцюга 125

- Теорема зачеплення основна** 167
- Трансмісія 236

- Удари руху** 262
 - – жорсткі 262, 270
 - – м'які 268, 271

- Фазова діаграма** 253
- Фазові кути 254
- Формула Ассура 30
 - Вілліса 215, 224
 - побудови механізму 35
 - Чебишева 22

- Хвильова зубчаста передача**, 243
 - – – генератор хвиль 243
 - – – гнучке колесо 243
 - – – жорстке колесо 243

- Цикл усталеного руху** 82

- Черв'ячна передача** 158
- Число ступіней вільності 11, 13, 22, 26

- Швидкість ковзання** 171
 - відносна 45, 58
 - абсолютна 45, 58
 - переносна 45, 58
 - кутова 51, 62
- Шестерня коронна 212
- Штовхач загострений 250
 - роликів 250
 - зміщений 260
 - центральний 260

- Якісні показники зубчастого зачеплення** 170

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
Лекція 1	5
Вступ	5
1 Структурний аналіз плоских механізмів	7
1.1 Основні поняття і визначення.....	7
1.2. Класифікація кінематичних пар.....	12
1.2.1. Класифікація кінематичних пар за числом ступіней вільності.....	12
1.2.2. Класифікація кінематичних пар за характером поверхонь, якими дотикаються ланки.....	16
1.2.3. Класифікація кінематичних пар за способом замикання.....	17
1.3. Кінематичний ланцюг.....	17
Лекція 2	19
1.4. Особливості плоского кінематичного ланцюга..	19
1.5. Ступінь вільності кінематичного ланцюга	21
1.6. Принцип утворення механізмів	24
1.7. Структурна класифікація плоских механізмів ...	29
1.7.1. Механізм I класу	29
1.7.2. Механізм II класу	30
1.7.3. Механізми III та IV класів	32
1.8. Формула побудови механізму.....	35
Контрольні питання до теми 1.....	40
Лекція 3	41
2. Кінематичний аналіз механізмів	41
2.1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів	41
2.2. Загальний підхід до кінематичного аналізу графоаналітичним методом	42

2.3.	Основні рівняння, які пов'язують швидкості та прискорення двох точок, що належать одній ланці	44
2.4.	Кінематичний аналіз групи Ассура II класу I виду	47
Лекція 4		57
2.5.	Рівняння, що пов'язують швидкості і прискорення двох точок, які належать двом ланкам, що входять у поступальну кінематичну пару ...	57
2.6.	Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2 виду	59
2.7.	Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 3 виду	66
	Контрольні питання до теми 2.....	73
Лекція 5		74
3.	Динамічний аналіз механізмів	74
3.1.	Рух механізму під дією заданих сил	74
3.1.1.	Задачі динамічного аналізу механізмів	74
3.1.2.	Сили, що діють на ланки механізму	75
3.1.3.	Режими руху машинного агрегату	80
3.1.4.	Динамічна модель машинного агрегату	84
3.1.5.	Зведення сил в механізмі	87
3.1.6.	Зведення мас в механізмі	90
3.1.7.	Рівняння руху одноланкової динамічної моделі в інтегральній формі	94
Лекція 6		97
3.2.	Регулювання руху машин	97
3.2.1.	Загальна постановка задачі про нерівномірність руху механізмів	97
3.2.2.	Визначення моменту інерції махових мас.....	100
3.2.3.	Визначення моменту інерції маховика по методу Мерцалова.....	103
3.2.4.	Визначення основних розмірів маховика.....	112

Контрольні запитання до теми 3.....	114
Лекція 7.....	115
4. Силовий аналіз механізмів	115
4.1. Задачі силового аналізу механізмів	115
4.2. Методи силового аналізу механізмів.....	117
4.3. Сили інерції ланок плоских механізмів	118
4.4. Реакції в кінематичних парах	121
4.5. Статична визначеність кінематичного ланцюга.....	125
4.6. Послідовність силового аналізу механізму.....	126
Лекція 8.....	127
4.7. Силовий аналіз групи Ассура II класу 1 виду... ..	127
4.8. Силовий аналіз групи Ассура II класу 2 виду....	133
Лекція 9.....	139
4.9. Силовий аналіз групи Ассура II класу 3 виду....	139
4.10. Силовий аналіз початкової ланки (механізму I класу).....	143
4.11. Важіль М.Є. Жуковського.....	149
Контрольні запитання до теми 4.....	153
Лекція 10.....	154
5. Зубчасті механізми	154
5.1. Прості зубчасті механізми	154
5.2. Класифікація простих зубчастих механізмів	155
5.3. Геометричні елементи зубчастого колеса	159
5.4. Евольвента круга та її властивості	162
5.5. Елементи евольвентного зачеплення	164
5.6. Якісні показники зубчастого зачеплення	170
Лекція 11.....	177
5.7. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс. Інструментальна рейка.....	177
5.8. Підрізання профілів зубців.....	182

5.9.	Зубчасті колеса нарізані зі зміщенням твірного контуру.....	186
5.10.	Визначення основних геометричних розмірів зубчастої передачі	193
	Контрольні запитання до теми 5.....	200
	Лекція 12	201
6.	Багатоланкові зубчасті механізми	201
6.1.	Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями обертання зубчастих коліс.....	203
6.2.	Зубчасті механізми з рухомими осями обертання зубчастих коліс	210
6.3.	Планетарні редуктори	212
	Лекція 13	222
6.4.	Диференціальні зубчасті механізми.....	222
6.5.	Деякі питання синтезу планетарних механізмів.....	231
6.6.	Комбіновані зубчасті механізми.....	236
6.5.	Хвильові зубчасті передачі.....	243
	Контрольні питання до теми 6.....	245
	Лекція 14	247
7.	Синтез кулачкових механізмів	247
7.1.	Призначення і класифікація плоских кулачкових механізмів	247
7.2.	Фазова діаграма кулачкового механізму	253
7.3.	Вихідні дані, що необхідні для синтезу кулачкового механізму	256
7.3.	Закони руху вихідної ланки кулачкового механізму	259
	Лекція 15	267
7.4.	Кут тиску в кулачковому механізмі.....	267
7.5.	Визначення початкового радіуса шайби кулачка по допустимому куту тиску.....	273

7.6. Побудова профілю кулачка для механізму із загостреним та роликковим штовхачем.....	279
7.7. Визначення початкового радіуса шайби кулачка із умови опуклості профілю.....	286
Контрольні питання до теми 7.....	292
Лекція 16.....	293
8. Зрівноваження механізмів	293
8.1. Задачі зрівноваження механізмів.....	293
8.2. Види зрівноваження механізмів.....	294
8.3. Метод зосередження мас.....	298
8.4. Статичне зрівноваження механізмів.....	300
8.5. Повне зрівноваження механізмів.....	309
Лекція 17.....	313
8.6. Види невірноваженості роторів.....	313
8.7. Зрівноваження ротора при проектуванні.....	319
8.8. Статичне і динамічне балансування виготовленого ротора.....	324
Контрольні питання до теми 8.....	329
Список літератури.....	331
Предметний покажчик	332
Зміст.....	336