Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ МАШИНОБУДІВНИЙ КОЛЕДЖ

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

**навчально-методичний посібник**
для самостійної роботи студентів
з дисципліни

## з теми «Комплексні числа»

для студентів технічних спеціальностей

Рекомендовано методичною Радою коледжу
Протокол № 4 від 26.01.2017 року

Укладач: Солдатенко С.С., викладач першої категорії

Розглянуто та узгоджено на засіданні
циклової комісії математики, комп'ютерної
техніки та інформаційних технологій
Протокол № 7 від «10» січня 2017 р.
Голова комісії Л.О.Якшина

ХАРКІВ, 2017

**ББК-22. 1я73**
**УДК-51(075.8)**
**В-95**

**Навчально-методичний посібник** для самостійної роботи студентів з дисципліни «Вища математика» з теми «Комплексні числа» для студентів технічних спеціальностей. Укладач: Солдатенко С.С. – Харків.: ХМК, 2017.-35с.

Рекомендовано методичною Радою коледжу,
Протокол № 4 від 26.01.2017 року

Рецензенти:
**Лукащук Т.І.**, к.т.н., доцент кафедри «Вищої математики» Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.
**Якшина Л.О.**, викладач вищої категорії, голова циклової комісії «Математики, комп’ютерної техніки та інформаційних технологій» Харківського машинобудівного коледжу.

## Зміст

## Передмова

Даний навчально-методичний посібник призначений для самостійного вивчення та для самостійної підготовки до практичних та семінарських занять студентів технічних спеціальностей з теми «Комплексні числа», з метою ознайомлення, узагальнення та систематизації знань.

Зміст методичного матеріалу повністю відповідає освітньо-професійним програмам підготовки молодших спеціалістів за відповідним професійним спрямуванням.

Посібник складено у формі таблиці, завдяки чому полегшується сприйняття теоретичного матеріалу та його практичне застосування при розв'язанні завдань. Змісту навчально-методичного матеріалу цілком достатньо для вивчення теми «Комплексні числа», якісного виконання контрольних та обов'язкових домашніх завдань і успішного складання заліків та екзаменів з даної теми.

В посібнику студенти можуть ознайомитись з історією виникнення комплексних чисел, поняттям «комплексне» число та його геометричною інтерпретацією, різними формами комплексних чисел та діями над ними, застосуванням комплексних чисел при розв'язанні квадратних рівнянь та задач з електротехніки. Включено завдання практичного спрямування та завдання поглибленого рівня засвоєння знань при розв'язанні квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.

Теоретичний матеріал містить додаткові питання, завдяки яким студенти можуть поширити свої знання з даної теми, що сприятиме більш глибокому розумінню навчального матеріалу студентами, його застосування у практичній та професійній діяльності.

Завершується теоретичний матеріал контрольними питаннями та завданнями для самостійного розв'язання.

Також посібник містить індивідуальні завдання, які складаються з 30 варіантів з відповідями. Індивідуальні завдання передбачають варіативність завдань з метою розвинення стійких практичних навичок студентів.

Студентам, зацікавленим у більш ґрунтовному вивченні окремих питань теми запропоновано список літератури, який включає поширені підручники та посібники з курсу вищої математики.

Перед початком вивчення навчального матеріалу слід ознайомитись з методичними матеріалами та списком літератури. Вивчення теорії обов’язково має супроводжуватись розв’язанням завдань.

# «Комплексні числа»

## Історія винекнення комплексних чисел.

Перша згадка про «уявні» числах як про квадратні корені із від'ємних чисел відноситься ще до XVI століття. Італійський вчений Джіроламо Кардано в 1545 році опублікував роботу, в якій, намагаючись вирішити рівняння $x^3 - 12x + 16 = 0$, він прийшов до виразу $\sqrt{-243}$. Через цей вираз представлялись дійсні корені рівняння: $x_1 = x_2 = 2,\ x = -4$. Завдання розв'язати квадратне рівняння виду $x^2 + b^2 = 0\ \ (b \neq 0)$ стало однією з причин для введення нових, так званих *уявних чисел*.

Але чисел, які при піднесенні до квадрата дають від'ємні числа, тоді не знали і тому вважали, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують, тобто задачі, які до них приводять, не мають розв'язків.

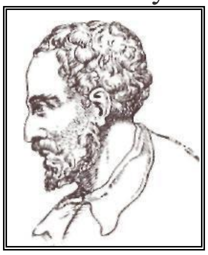
Природним стало поширення множини дійсних чисел новою множиною, яка містить дійсні числа та числа нової природи. У новій множині мусить мати розв'язок рівняння: $x^2 = -1$.

Таким чином в роботі Кардано уявні числа з'явилися як проміжні члени в обчисленнях.

Заслуга Кардано полягала в тому, що він допустив існування «неіснуючого» числа $\sqrt{-1}$, ввівши правило множення: $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, все інше стало справою техніки.

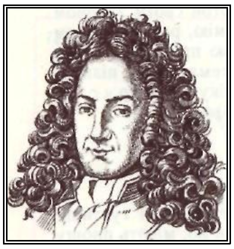
У 1572 році італійський вчений Бомбелі випустив книгу, в якій було встановлено перші правила арифметичних операцій над комплексними числами. Назву «уявні числа» ввів французьский математик філософ Р. Декарт в 30-х роках 17 століття.

У 1777 році Л. Ейлер запропонував використовувати літеру «і» для позначення уявної частини комплексного числа, як першу букву французького слова imaginare (уявний). Слово комплексний позначає в перекладі «сукупний». Цей термін введений Гаусом у 1831 р. Найбільш просто, зрозуміло та логічно безперечно дав поняття комплексного числа в 1833 г. ірландський математик Уильям Роуэн Гамильтон: комплексні числа – це будь-які впорядковані пари дійсних чисел.



**Джероламо Кардано (1501-1576)**

**Рене Декарт (1596-1650)**



**Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646- 1716)**

**Леонард Ейлер (1707- 1783)**

**Карл Фрідріх Гаус (1777 - 1855)**

**Гамильтон Уильям Роуэн (1805 - 1865)**

## Використання комплексних чисел

Протягом останніх двохсот років комплексні числа знайшли чисельні застосування. Так, наприклад, за допомогою комплексних чисел Гаус в 1796 році зумів найти відповідь на геометричне питання: при яких натуральних значеннях можна побудувати циркулем і лінійкою правильний n-кутник? Широке застосування знайшли комплексні числа в картографії, електротехніці, гідродинаміці, теоретичній фізиці. Вже в наше століття комплексні числа і комплексні функції успішно застосовувалися математиками та механіками Н.Е. Жуковим, С.А. Чаплигіним, М.В. Келдишем та іншими. Вітчизняні математики Г.В. Колосов і Н.І. Мусхелішвілі вперше стали застосовувати комплексні функції в теорії пружності. З застосуванням комплексних змінних в теоретичній фізиці зв'язані досліди вітчизняних вчених Н.Н. Боголюбова і В.С. Владимирова. Комплексні числа використовують в математиці багато ширше, ніж дійсні. Введення уявних, комплексних чисел дало змогу зробити дуже важливі відкриття в області математики, радіотехніки, електроніки і т.д. Вони мають прикладне значення в багатьох галузях науки (теорія пружності, електротехніці, аеродинаміці, зв'язку та ін.), являються основою для розрахунків при конструюванні ракет та літаків, кресленні географічних карт, в дослідженні течії води та інших науках.

Відомий німецький математик Готфрід Лейбніц про ці числа говорив:

*«Хоч називають їх уявними, але від цього вони не перестають бути корисними».*

**Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.**

Множина комплексних чисел позначається буквою С

## Поняття про уявну одиницю

Число, квадрат якого дорівнює -1, позначається буквою $i$ та називається **уявною одиницею**

$$i^2=-1 \quad \text{або} \quad \sqrt{-1}=i$$

**Примітка 1**. За допомогою уявної одиниці можна виразити квадратний корінь з від'ємного числа.

**Приклад 1.** $\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2i$;

**Приклад 2.** $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{5}$.

**Степені уявної одиниці**

$i^{4k}=1$ $-$ *показник ділеться на 4 без остачі*;

$i^{4k+1}=i$ $-$ *показник ділеться на 4 з остачею* 1;

$i^{4k+2}=-1$ $-$ *показник ділеться на 4 з остачею* 2;

$i^{4k+3}=-i$ $-$ *показник ділеться на 4 з остачею* 3;

$i^{4k+4}=1.$

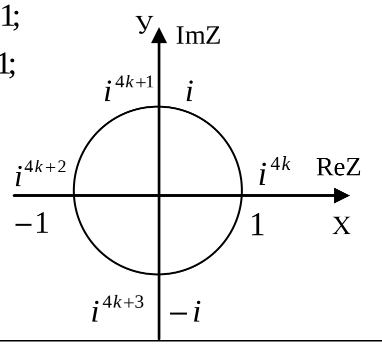
$i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1;$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1;$

$i^5=i^4\cdot i=i;$

$i^6=-1;$

$i^7=-i;$

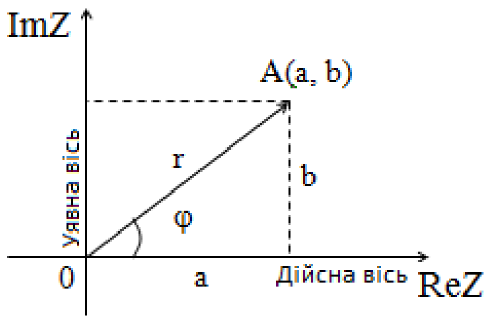



Значення степеня $i^n$, де $n$ – ціле додатне число, періодично повторюється при збільшенні показника на 4. Тому, щоб піднести число $i$ до цілого додатного степеня, треба показник степеня розділити на 4 і піднести $i$ до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення.

$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i$

$i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1$

## Поняття про комплексні числа та їх властивості




**Комплексним числом z називається** вираз виду: $z=a+ib$, де $a,b\in R$, $i$ – це уявна одиниця.

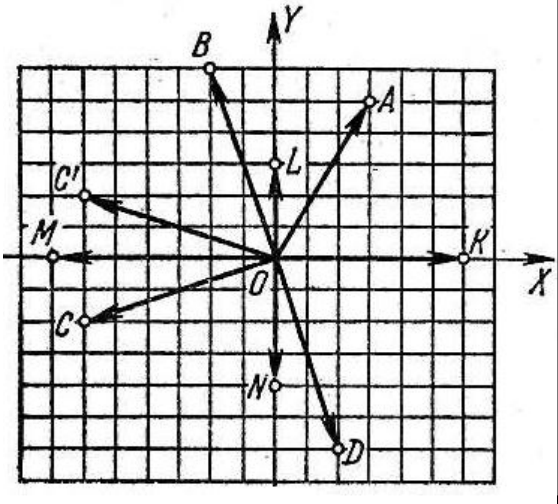
Число $a\in R$ називається дійсною частиною комплексного числа z та позначається $a=\operatorname{Re}z$ (лат. *realis* – дійсний).

Число $b\in R$ називається коефіцієнтом при уявній одиниці та позначається $b=\operatorname{Im}z$ (лат. *imaginary* – уявний).

Комплексне число $0=0+0i$ називається *комплексний нуль*.

Комплексне число $1+0i=1$- дійсне число

Комплексне число $0+1i=i$ - чисто уявне.




**Приклади.** За даним малюнком записати комплексне число, задане точками площини.

Точка $A(3;5)$ зображує комплексне число $3+5i$.

Точка $B(-2;6)$ зображує комплексне число $(-2+6i)$;

Точка $C(-6;-2)$ – комплексне число $(-6-2i)$;

Точка $C'(-6;2)$ – комплексне число $(-6+2i)$;

Точка D – комплексне число $(2-6i)$.

Точка $M(-7;0)$ зображує комплексне число $-7+0i=-7$. (дійсне число)

Точка $K(6;0)$ зображує комплексне число $6+0i=6$. (дійсне число)

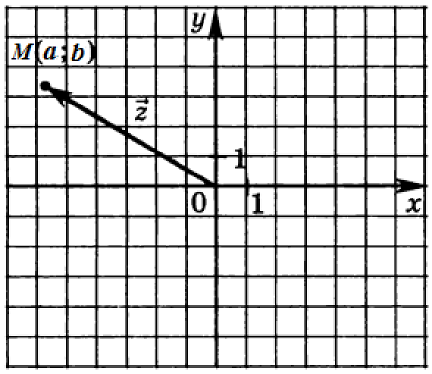
Точка $L(0;3)$ зображує комплексне число $0+3i=3i$ (уявне число).

Точка $N(0;-4)$ зображує комплексне число $0-4i=-4i$ (уявне число).

Початок координат $O(0;0)$зображує число $0+0i$.

## Геометричне зображення комплексного числа

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Кожному комплексному числу $z = a + bi$ ($a$ і $b$ – дійсні числа) можна поставити у відповідність точку $M(a;b)$ координатної площини. Встановлено взаємно-однозначну відповідність між безліччю комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Кожній точці координатної площини поставлений у відповідність радіус – вектор $\overline{OM}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці М, координати якого співпадають з координатами точки М.

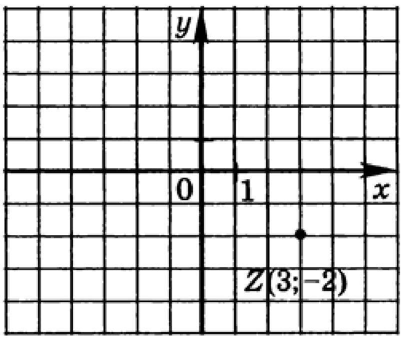



Площина, на якій зображуються у вигляді точок комплексні числа, називається комплексною площиною і позначають буквою **C**.

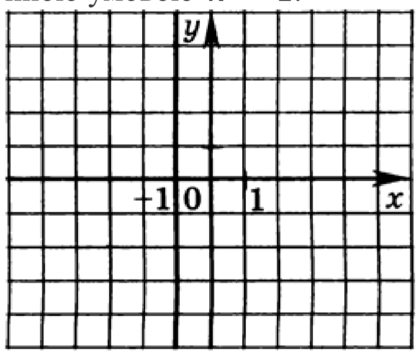
Будь-якому дійсному числу відповідає точка $M(x;0)$, а будь-якому суто уявному числу відповідає точка $M(0;y)$. Тому всі дійсні числа зображуються точками осі абсцис, яка називається *дійсною* віссю, а всі чисто уявні числа зображуються точками осі ординат, яка називається *уявною* віссю.

Комплексною координатою початку координат О є число нуль. В зв'язку з цим початок координат називають нульовою точкою комплексної площини або комплексний нуль.

**Приклад.** Зобразіть на комплексній площині число $z = 3 - 2i$.
Цьому числу відповідає точка комплексної площини з координатами (3;-2).




**Приклад.** Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа z, для яких вірна рівність $\operatorname{Re} z = -1$. Це всі числа, які знаходяться на прямій, заданій наступною умовою $x = -1$.




### Властивості комплексних чисел

**Рівними** називають два комплексних числа $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$, тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах, тобто якщо $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. В іншому випадку комплексні числа не рівні.

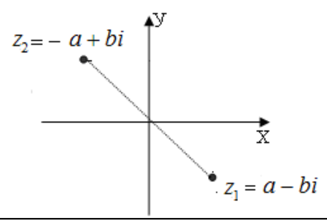
**Приклад.** Дано два рівних комплексних числа $3y + 5xi = 15 - 7i$. Знайти x і y з рівності.
Розв'язання. З умови рівності комплексних чисел маємо: $3y = 15$ *та* $5x = -7$

$y = 5$ $\quad x = -7/5$

Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не має сенсу. **Ці числа за величиною не порівнюють.** Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше $10i$ чи $3i$, $2+5i$ чи $5+2i$.

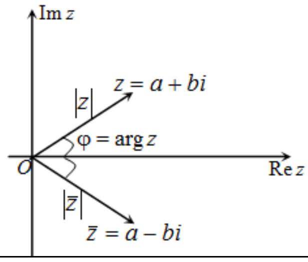
**Протилежними** називають комплексні числа $z = a + bi$ та $-z = -a - bi$, дійсні та уявні частини яких є протилежними числами та зображуються парою точок симетричних відносно початку координат або $Z = 0$.
Сума протилежних комплексних чисел дорівнює 0: $(z + (-z) = 0)$

Приклад 1. $(-8 + 7i) + (8 - 7i) = 0$;
Приклад 2. $(4 + 3i) + (-4 - 3i) = 0$.




**Комплексно - спряженими** називають комплексні числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$ дійсні

**Приклад 1.** Комплексно спряженим до числа $z = 2 - i$ є число $\bar{z} = 2 + i$.

| | |
|---|---|
| частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем. Простіше сказати – це числа, які відрізняються знаком уявної частини. Довжини спряжених векторів рівні. Позначають $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$. Зображуються парою точок симетричних відносно осі абсцис. | **Приклад 2.** $z = (-6-2i)$ *то* $\bar{z} = (-6+2i)$<br>**Приклад 3.** $z = (-5-i)$ *то* $\bar{z} = (-5+i)$<br> |

**Властивості комплексно-спряжених чисел**

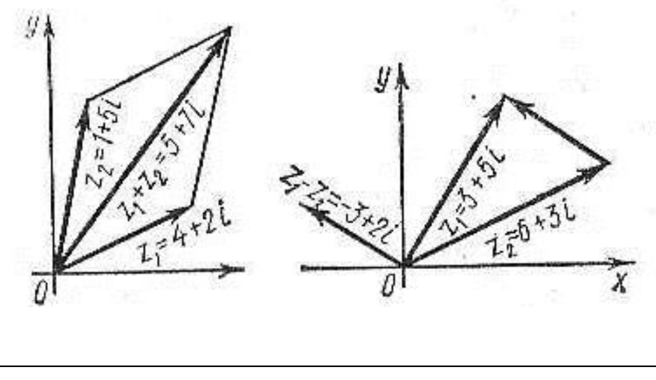
| | |
|---|---|
| **1)** Модулі комплексно спряжених чисел рівні: $\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$, а аргументи відрізняються знаком. | $\lvert z\rvert = \lvert 2-3i\rvert = 2+3i$ та $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert 2+3i\rvert = 2+3i$ |
| **2)** Якщо $z = \bar{z}$, то можна сказати, що $z$ та $\bar{z}$ є дійсними. | **Приклад:** $z = 5 \in R \Rightarrow \bar{z} = 5$. |
| **3) Сума спряжених комплексних чисел** дорівнює дійсному числу.<br>$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\operatorname{Re} z -$ *дійсне число* | **Приклад 1.** Нехай $z = 2-3i$, тоді $\bar{z} = 2+3i$, тоді $z + \bar{z} = 2-3i+(2+3i) = 2-3i+2+3i = 4 \in R$<br>**Приклад 2.** $(-8+7i) + (-8-7i) = -16$. З |
| **4) Добуток спряжених комплексних чисел** є дійсним додатнім числом.<br>$z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = \lvert z\rvert^2 \in R$<br>Добуток комплексно - спряжених чисел можна знаходити за формулою скороченого множення «різниця квадратів». | **Приклад 1.** Нехай $z = 2-3i$, комплексно спряжене до нього число $\bar{z} = 2+3i$, тоді їх добуток<br>$z \cdot \bar{z} = (2-3i)\cdot(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$<br>$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2+3^2}^{\,2} = \lvert z\rvert^2 = 13 \in R$ |
| Читаючи рівність $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$ справа наліво, робимо висновок, що **суму квадратів будь – яких двох чисел можна подати у вигляді добутку комплексно – спряжених множників**. | **Приклади.** Розкласти на множники двочлени.<br>1) $a + 9 = (\sqrt{a} + 3i)\cdot(\sqrt{a} - 3i)$;<br>2) $49 + 36 = (7+6i)\cdot(7-6i)$;<br>3) $16m^2 + 25n^2 = (4m+5ni)\cdot(4m-5ni)$;<br>4) $a + 16 = (\sqrt{a} + 4i)\cdot(a - 4i)$;<br>5) $b + 7 = (\sqrt{b} + \sqrt{7}i)\cdot(\sqrt{b} - \sqrt{7}i)$. |

**Форми комплексних чисел та дії над ними**

**Алгебраїчна форма** $z = a + ib$, де $a$ - абсциса, $b$ - ордината комплексного числа

**Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі**

| | |
|---|---|
| **Додавання комплексних чисел**<br>**Сумою** комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називають комплексне число<br>$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\cdot i$.<br>**Примітка!** Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків. | **Приклад 1.**<br>$(-3+5i)+(4-8i) = (-3+4)+(5-8)\cdot i = 1-3i$.<br>**Приклад 2.**<br>$(2+0i)+(7+0i) = (2+7)+(0+0)\cdot i = 9+0i = 9$.<br>**Приклад 3.**<br>$(0+2i)+(0+5i) = 0+7i = 7i$.<br>**Приклад 4.**<br>$(-2+3i)+(-2-3i) = (-2+(-2))+(3+(-3))\cdot i = -4+0i = -4$. |
| **Віднімання комплексних чисел**<br>**Різницею** комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ (зменшуване) і $a_2 + b_2 i$ (від'ємник) називається комплексне число<br>$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\cdot i$ | **Приклад 1.**<br>$(-5+2i)-(3-5i) = (-5-3)-(2-(-5))\cdot i = -8-7i$.<br>**Приклад 2.**<br>$(3+2i)-(-3+2i) = (3-(-3))-(2-2)\cdot i = 6-0i = 6$.<br>**Приклад 3.**<br>$(3-4i)-(3+4i) = (3-3)-(4+4)\cdot i = 0-8i = -8i$. |

| | |
|---|---|
| **Множення комплексних чисел**<br>**Добутком** комплексних чисел $a_1+b_1i$ і $a_2+b_2i$ називається комплексне число $(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$ | На практиці немає потреби користуватися формулою добутку, можна перемножувати дані числа, як двочлени, а потім покласти $i^2=-1$.<br><br>**Приклад 1.**<br>$(1-2i)\cdot(3+2i)=3-6i+2i-4i^2=3-6i+2i+4=7-4i$.<br>**Приклад 2.**<br>$(2+5i)\cdot(3+i)=2\cdot3-3\cdot5\cdot i+2i+5i^2=1+17i$ |
| **Множення на дійсне число.** Оскільки кожному комплексному числу $z=a+ib$, можна поставити у відповідність радіус-вектор точки $(a;b)$, то множення комплексного числа на дійсне число $C$ здійснюється аналогічно множенню на число векторів, заданих своїми координатами: $C\cdot z=C\cdot a+i\cdot C\cdot b$ | **Приклад 1.** $7\cdot(2+5i)=14+35i$<br>**Приклад 2.** $-\frac{1}{2}\cdot(0-2i)=i$ |
| **При піднесенні до степеня можна використовувати формули:**<br>$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$<br>$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$ | **Приклад 1.**<br>$(2+3i)^2=4+2\cdot2\cdot3i+9i^2=4+12i-9=5+12i$<br>**Приклад 2.**<br>$(5+3i)^3=125+3\cdot25\cdot3i+3\cdot5\cdot9i^2+27i^3=$<br>$=125+225i-135-27i=-10+198i$ |
| **Ділення комплексних чисел**<br>Розділити комплексне число $a_1+b_1i$ (ділене) на комплексне число $a_2+b_2i$ (дільник) – означає знайти таке число $x+yi$ (частка), яке можна помножити на дільник та отримати ділене.<br>Якщо дільник не дорівнює нулю, то ділення завжди можливо і частка єдина.<br>$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)}=$<br>$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}i$ | На практиці ділення комплексних чисел проводять за наступною схемою:<br>1. спочатку ділене та дільник множать на число, комплексно-спряжене дільнику, після чого дільник стає дійсним числом;<br>2. в чисельнику перемножують два комплексних числа, враховуючи, що $i^2=-1$;<br>3. отриманий дріб почленно ділять;<br>отримують в результаті комплексне число.<br><br>**Приклад 1.**<br>$\frac{7-4i}{3+2i}=\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{21-12i-14i+8i^2}{9-4i^2}=$<br>$=\frac{21-12i-14i+8(-1)}{9-4(-1)}=\frac{13-26i}{13}=1-2i$ |
| **Геометрична інтерпретація суми та різниці комплексних чисел** | |
| **Геометрично суму $z_1+z_2$ або різницю двох комплексних чисел $z_1-z_2$ можна представити у вигляді вектора, який знаходять за правилом паралелограма або трикутника** (див. мал.)<br>**Зауваження.** Щоб отримати координати результативного вектора (комплексне число), необхідно результативний вектор перенести паралельно і його початок сумістити з початком координат. |  |

## Контрольні питання

1. Дайте означення уявної одиниці.
2. Дайте означення комплексного числа.
3. Дайте означення алгебраїчної форми комплексного числа.
4. Сформулюйте умови рівності комплексних чисел записаних в алгебраїчній формі.
5. Що є результатом суми двох комплексних чисел?
6. Як виконується додавання комплексних чисел в алгебраїчній формі?
7. Що є результатом різниці двох комплексних чисел?
8. Як виконується віднімання комплексних чисел в алгебраїчній формі?
9. Що є результатом добутку двох комплексних чисел?
10. Як виконується множення комплексних чисел в алгебраїчній формі?
11. Що є результатом частки двох комплексних чисел?
12. Як виконується ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі?
13. Які комплексні числа називають протилежними?
14. Чому дорівнює сума двох протилежних комплексних чисел?
15. Як геометрично зображують протилежні комплексні числа?
16. Які комплексні числа називають спряженими**?**
17. Чому дорівнює добуток комплексно-спряжених чисел?
18. Як геометрично зображують комплексно-спряжені комплексні числа?
19. Які формули можна застосовувати, для того, щоб комплексне число задане в алгебраїчній формі піднести до додатного цілого степеня?
20. Як називається площина, точки якої зображають комплексні числа?
21. Як називаються вісь абсцис та вісь ординат на комплексній площині?
22. Як геометрично зображують додавання, віднімання комплексних чисел?

## Завдання для самостійного розв’язування

1. Записати дійсні та уявні частини комплексного числа:

1) $1+i$; 2) $-3-i$ 3) $0$; 4) $7-3i$; 5) $2-7i$; 6) $3$; 7) $1-i$; 8) $i$; 9) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $-2i$; 11) $n+i\cdot e$.

2. Розкласти на комплексні множники:

1) $a^2+b^2$; 2) $5+9$; 3) $4m^2+9n^2$; 4) $a^2+4$; 5) $a+2$; 6) $2+3$; 7) $a^2+4b^2$;

8) $c^2+1$; 9) $16+25$; 10) $a+b$; 11) $a+1$.

3. Чи є числа $4+3i$ та $4-3i$; $2-i$ та $2+i$; $-8+7i$ та $-8-7i$; $-5+i$ та $-5-i$ спряженими? Чому?

4. Знайдіть комплексні числа, спряжені з даними:

1) $i$; 2) $-2$; 3) $1$; 4) $1-i$; 5) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; 6) $-i$; 7) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $2$; 9) $2i$; 10) $\frac{1}{i}$; 11) $\frac{1}{1+i}$; 12) $\frac{1+3i}{3-2i}$.

5. За умовою рівності комплексних чисел визначити дійсні $x$ і $y$:

1) $2+5xi-3yi=14i+3x-5y$; 2) $\frac{bi}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$; 3) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$;

4) $aix+biy-a=i-a^2x-b^2y$; 5) $(4-i)x+(2+5i)y=8+9i$; 6) $(3+i)x-(1-2i)y=7$.

6. Виконати додавання комплексних чисел:

1) $(3+6i)+(-1-5i)$; 2) $(9-5i)+(-2-i)$; 3) $(2+3i)+(6+3i)$;

4) $(7-3i)+(-9+3i)$; 5) $(6+5i)+(4+6i)$; 6) $(-3+5i)+(4-8i)$;

7) $(3+2i)+(-1-5i)$; 8) $(2+3i)+(6-3i)$; 9) $(10-3i)+(-10+3i)$; 10) $(2-8i)+(5-i)$.

7. Виконати віднімання комплексних чисел:

1) $(7+4i)-(1+i)$; 2) $(-5+9i)-(6+i)$; 3) $(6+7i)-(6-5i)$;

4) $(0,3+3i)-(-0,8+1,5i)$; 5) $(1+i)+(2-3i)-(3+4i)$; 6) $(-4-6i)-(-6+4i)$;

7) $(2-8i)-(5-i)$; 8) $(5+4i)-(2-3i)$; 9) $(3-6i)-(1-i)$; 10) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i\right)$.

8. Виконати множення комплексних чисел:

1) $(4-3i)(8+2i)$; 2) $(\sqrt{2}-4i)(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)$; 3) $8i\cdot 3i\cdot\sqrt{3}$; 4) $(2-i)(-6)$; 5) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{4}\right)\left(2+1\frac{1}{3}i\right)$;

6) $2i\cdot 3i$; 7) $4i\cdot 2i\sqrt{2}$; 8) $(-3+4i)2i$; 9) $(-3-7i)(-3i)$; 10) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$.

9. Обчислити добуток спряжених комплексних чисел:

1) $(3+5i)(3-5i)$; 2) $(2+i)(2-i)$; 3) $(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)$; 4) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}i)$;

5) $(5+i)(5-i)$; 6) $(1-i)(1+i)$; 7) $(m-ni)(m+ni)$; 8) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$;

9) $(0,5+0,2i)(0,5-0,2i)$; 10) $(5+\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)$.

10. Знайти частку комплексних чисел:

1) $\frac{2+5i}{3-2i}$; 2) $\frac{3+i}{i}$; 3) $\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$; 4) $\frac{5+6i}{4+8i}$; 5) $\frac{3}{5i}$; 6) $\frac{1-i}{1+i}$; 7) $\frac{a}{a+bi}$;

8) $\frac{\sqrt{a}}{a+2i\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 10) $4i:2$; 11) $6i:2i$; 12) $8i:4$.

11. Піднести до степеня двочлени:

1) $(\sqrt{3}+i)^4$; 2) $(\sqrt{3}-2i)^3$; 3) $(1+i)^2$; 4) $(3+2i)^2$; 5) $(1+2ai)^2$; 6) $(a+5bi)^2$;

7) $(2+i\sqrt{3})^3$; 8) $(3-i\sqrt{3})^3$; 9) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 10) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 11) $(1+i)^4$; 12) $(a+bi)^6$.

12. Побудувати геометричне зображення чисел:

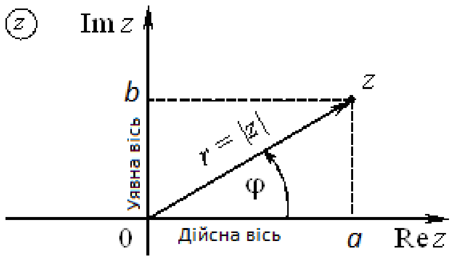
1) 1; 2) $-1$; 3) $i$; 4) $-i$; 5) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

8) $4+3i$; 9) $4-3i$; 10) $1+i$; 11) $1-i$; 12) $-\sqrt{3}+i$.

# Тригонометрична форма комплексного числа

$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ де\ r > 0$ **є модулем, а** $\varphi$ **- аргументом.**

**Модулем** комплексного числа називається довжина вектора, який зображує комплексне число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$




Знак (z) у другій чверті означає, що система декартових координат $XOY$ буде використовуватись як комплексна площина.

**Знайти модуль комплексних чисел.**

**Приклад 1.** $r = |3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

**Приклад 2.** $r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

**Приклад 3.**
$r = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

**Приклад 4.** $r = |-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.

**Приклад 5.** $r = |-7 + 0i| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$.

**Приклад 6.** $r = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Множина комплексних з одним і тим же модулем $r$, утворює коло з центром у початку координат.

**Аргументом** комплексного числа $a + bi$ називається величина кута $\varphi$ між додатним напрямом осі абсцис і вектором ОМ, що зображує комплексне число $a + bi$. Позначається $Arg\, z$ або

$$\varphi = Arg z.$$

**Значення аргументу є додатним числом, якщо кут відкладено проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо кут відкладено за годинниковою стрілкою.**

Найменше за абсолютною величиною значення аргументу із проміжку $arg\, z \in (-\pi; \pi]$ називається **головним значенням аргументу z.**

**Примітка!** Кожне комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

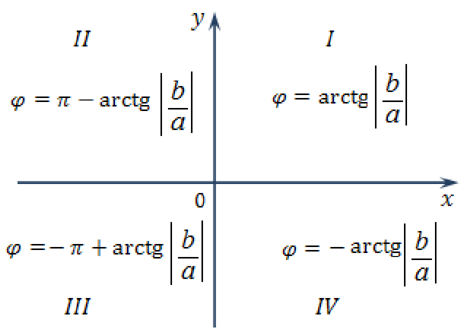
**Алгоритм знаходження аргументу комплексного числа** $a + bi \neq 0$**.**

1) Визначити, в якій чверті знаходиться точка $z = (a + bi)$, використовуючи геометричну інтерпретацію числа $z = (a + bi)$.
2) Знайти найменший невід'ємний кут $\varphi$, розв'язуючи рівняння:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r} \qquad tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a}\ \text{, де } \varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right|.$$

3) Знайти значення аргументу з урахуванням квадранту за формулами (див малюнок).
4) Виділити **головне значення аргументу** $\varphi$**, це кут в межах** $(-\pi < \varphi \le \pi]$.

**До числа** $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ де\ r > 0$**, існує спряжене число** $\bar{z} = r \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi),\ \ де\ r > 0$




**Визначення чверті, в якій знаходиться аргумент.**

І чверть: $a > 0;\ b > 0$. ІІІ чверть: $a < 0;\ b < 0$.

ІІ чверть: $a < 0;\ b > 0$. IV чверть: $a > 0;\ b < 0$.

Якщо брати абсолютне значення (по модулю)

$$arctg\,|b/a| > 0$$

**Величина аргументів на осях**

Коли $a = 0$ та $b > 0$, аргумент $\varphi = \pi/2$ або $\varphi = \pi/2 + 2\pi k$;

Коли $a = 0$ та $b < 0$, аргумент $\varphi = -\pi/2$ або $\varphi = -\pi/2 + 2\pi k$;

Коли $b = 0$ та $a > 0$, аргумент $\varphi = 0$ або $\varphi = 2\pi k$;

Коли $b = 0$ та $a < 0$, аргумент $\varphi = \pm\pi$ або $\varphi = \pi + 2\pi k = \pi(2k + 1)$.

**Приклад.** Запишіть числа *1,-1,* $i$, $-i$ у тригонометричній формі.

А) $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$; Б) $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$, В) $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; Г) $-i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

**Примітка!** Записуючи комплексне число, слід враховувати: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

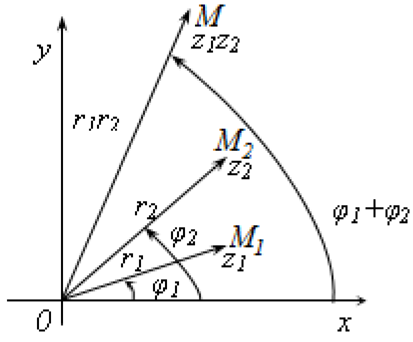
## Формули для визначення аргументу числа $z = a + bi$

| Розташування числа z | Знаки a та b | Головне значення аргументу | Аргумент | Приклади |
|---|---|---|---|---|
| Додатна дійсна піввісь | $a > 0$, $b = 0$ | $0$ | $\varphi = 2k\pi$ | $z = 3$ $\begin{cases} r = 3 \\ \varphi = 2\pi k \end{cases}$ |
| Перший квадрант | $a > 0$, $b > 0$ | $arctg\left\|\frac{b}{a}\right\|$ | $\varphi = arctg\left\|\frac{b}{a}\right\| + 2k\pi$ | $z = 3 + 4i$ $\begin{cases} r = 5 \\ \varphi = arctg\,\frac{4}{3} + 2\pi k \end{cases}$ |
| Додатна уявна піввісь | $a = 0$, $b > 0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | $z = 2i$ $\begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ |
| Другий квадрант | $a < 0$, $b > 0$ | $\pi - arctg\left\|\frac{b}{a}\right\|$ | $\varphi = \pi - arctg\left\|\frac{b}{a}\right\| + 2k\pi$ | $z = -4 + 4i$ $\begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$ |
| Від'ємна дійсна піввісь | $a < 0$, $b = 0$ | $\pi$ | $\varphi = \pi + 2k\pi$ | $z = -5$ $\begin{cases} r = 5 \\ \varphi = \pi + 2\pi k \end{cases}$ |
| Третій квадрант | $a < 0$, $y < 0$ | $-\pi + arctg\left\|\frac{b}{a}\right\|$ | $\varphi = -\pi + arctg\left\|\frac{b}{a}\right\| + 2k\pi$ | $z = -1 - \sqrt{3}i$ $\begin{cases} r = 2 \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$ |
| Від'ємна уявна піввісь | $a = 0$, $b < 0$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | $z = -i$ $\begin{cases} r = 1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ |
| Четвертий квадрант | $a > 0$, $b < 0$ | $-arctg\left\|\frac{b}{a}\right\|$ | $\varphi = -arctg\left\|\frac{b}{a}\right\| + 2k\pi$ | $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $\begin{cases} r = 1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ |

<table>
<tr><th colspan="2">Дії над комплексними числами, заданими у тригонометричній формі</th></tr>
<tr><td colspan="2">Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для інших алгебраїчних дій зручніша тригонометрична форма.</td></tr>
<tr><td>Множення. Добутком двох комплексних чисел $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ і $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент - сумі аргументів співмножників:<br>$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$</td><td>$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$<br>$= 6 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$<br><br>Завдання. Знайдіть добуток комплексних чисел та представте в алгебраїчній формі, якщо:<br>$z_1 = 5 \cdot (\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)$ та<br>$z_2 = 2 \cdot (\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$.<br>Розв’язання. Модуль добутку дорівнює<br>$|z| = 5 \cdot 2 = 10$, аргумент $\varphi = 10^\circ + 50^\circ = 60^\circ$.<br>Тоді число у тригонометричній формі має вигляд:<br>$z_1 z_2 = 10 \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.<br>Дане число запишемо в алгебраїчній формі:<br>$z_1 z_2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{3}i$.</td></tr>
<tr><td>Ділення. Частка двох комплексних чисел z<sub>1</sub> і z<sub>2</sub>, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника:<br>$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$</td><td>$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$<br>$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$</td></tr>
<tr><td>При піднесенні в $n$-й степінь, де $n -$ ціле число, використовується формула Муавра:<br>$$z^n = [r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n =$$<br>$$= r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i\sin n \cdot \varphi),\ n \in Z$$</td><td>Приклад<br>1. $z^6 = 2^6(\cos 6 \cdot 10^\circ + i\sin 6 \cdot 10^\circ) = 32(1 + i\sqrt{3})$<br>Приклад 2. $z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) =$<br>$= 4^{20}(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3 \cdot 2\pi + 120^0)) =$<br>$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$</td></tr>
<tr><td>Добування кореня n -го степеня<br>Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n -й степінь якого дорівнює z: $w^n = z$.<br>$$w = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$<br>$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$ де<br>$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$</td><td>Приклад. Добути корінь із $\sqrt{i}$.<br>Представимо $i$ у тригонометричній формі:<br>$i = 0 + 1 \cdot i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$.<br>За формулою<br>$$\boxed{\sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$$<br>маємо: $z = \sqrt{i} = \sqrt{\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)} =$<br>$= \cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} =$<br>$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right),\quad k = 0,\ 1.$<br>$k = 0,\ mo\ z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + (\sqrt{2}/2)$<br>$k = 1,\ mo\ z_1 = \cos(\pi/4 + \pi) + i\sin(\pi/4 + \pi) =$<br>$= -\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)$</td></tr>
</table>

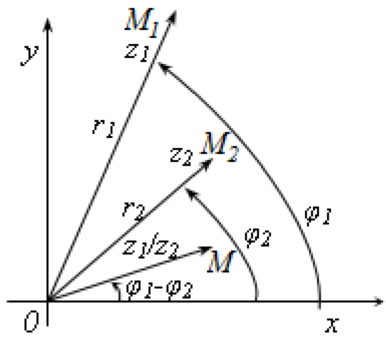
**Геометричний зміст множення комплексних чисел**

Якщо комплексному числу $z_1 = |r_1| \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ відповідає вектор $OM_1$, а комплексному числу $z_2 = |r_2| \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ відповідає вектор $OM_2$ то добутку $z_1 \cdot z_2 = |r_1| \cdot |r_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ відповідає вектор $OM$, який отримаємо з вектора $OM_1$ поворотом на кут $\varphi_2$ та розтягом його в $r_2$ рази при $r_2 \ge 1$, або його стисканням у $1/r_2$ рази при $0 < r_2 < 1$.




**Геометричний зміст частки комплексних чисел**

Якщо комплексному числу $z_1 = |r_1| \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ відповідає вектор $OM_1$, а комплексному числу $z_2 = |r_2| \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ відповідає вектор $OM_2$ то діленню $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|r_1|}{|r_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ відповідає вектор $OM$, який отримаємо з вектора $OM_1$ поворотом на кут $\varphi_2$ у <u>від'ємному напрямку</u> та стисканням його в $r_2$ рази при $r_2 \ge 1$, або розтягом його у $1/r_2$ рази при $0 < r_2 < 1$.




**Геометричний зміст кореня $n$ -го степеня з комплексного числа**

Всі корені $n$ -го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнює $2\pi / n$. Точки кола, які є вершинами правильного n-кутника. Кількість вершин многокутника залежить від степеня кореня.

**Завдання.** Знайти $\sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$.

Розв'язання. Знайдемо модуль комплексного числа.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Знайдемо аргумент комплексного числа.

$$tg\varphi = \frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \varphi = arctg\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \Rightarrow$$

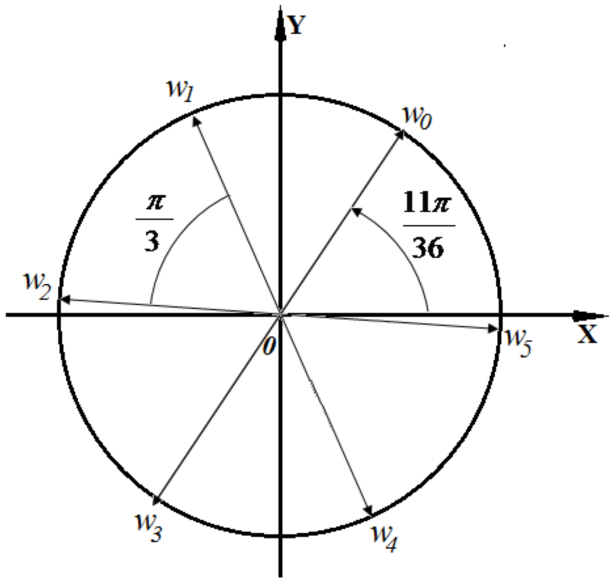
$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Знайдемо корені за формулою:

$$w = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right):$$

$$w_k = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[6]{2 \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{6}\right), \partial e\, k = 0,1,2,3,4,5.$$




Геометрична інтерпретація коренів $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ така, що ці числа є вершинами правильного шестикутника, вписаного в коло радіусом $r = \sqrt[6]{2}$ з центром в початку координат.

Отже, точками комплексної площини, які є вершинами шестикутника, є:

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}\right);$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}\right);$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}\right)$$

$$w_4 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}\right);$$

$$w_5 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{71\pi}{36} + i\sin\frac{71\pi}{36}\right)$$

**Завдання.** Знайти корінь п'ятого степеня із числа

$$z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt[5]{2}e^{i\cdot\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}\right)} = \omega_k, \text{ де}$$

$$k = \overline{0,4} = 0,1,2,3,4$$

$w_0,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ – *вершини правильного п'ятикутника*

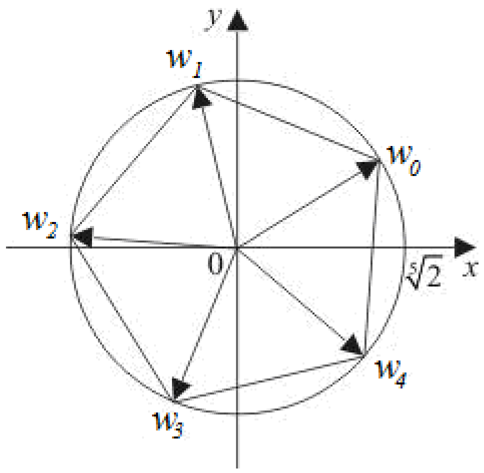
$$w_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$$

$$w_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 102^\circ + i\sin 102^\circ\right)$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 174^\circ + i\sin 174^\circ\right)$$

$$w_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 246^\circ + i\sin 246^\circ\right)$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 318^\circ + i\sin 318^\circ\right)$$




Геометрична інтерпретація коренів $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4$ така, що ці числа є вершинами правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіусом $r = \sqrt[5]{2}$ з центром в початку координат.

**Завдання.** Знайти корінь четвертого степеня з числа 1.

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)} =$$

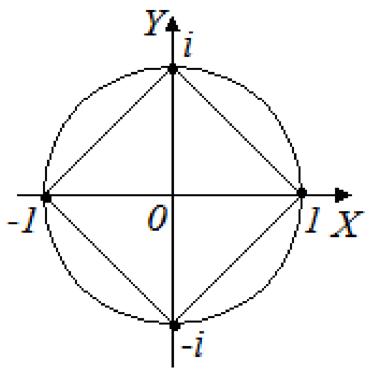
$$= \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right) = \cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}.$$

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

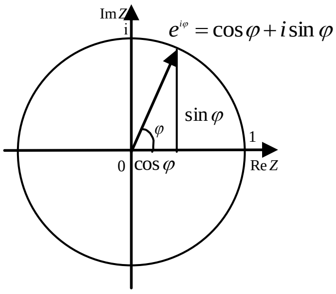
$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$w_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$



**Показникова форма комплексного числа** $z = re^{i\varphi}$,




*Формула Ейлера:* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

Ейлер дав означення показникової функції з основою $e$:

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos b + i\sin b) \text{ звідки}$$

$$\boxed{\cos b + i\sin b = e^{bi}, \quad \cos b - i\sin b = e^{-bi}}$$, маємо

$$\cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}, \quad \sin b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2}.$$

Безпосереднім наслідком формул Ейлера є **показникова форма** запису комплексного числа. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, де $\varphi$ - аргумент та $r$ -модуль.

Звідки $z = re^{i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi} \Rightarrow \ln a = \ln r + i\varphi$.

**До числа** $z = re^{i\varphi}$ існує спряжене число $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

**Дії над комплексними числами, заданими у показниковій формі**

| | |
|---|---|
| **Добуток**. При множенні комплексних чисел, заданих у показниковій формі, їх модулі перемножують, а аргументи додають: $r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$.. | **Приклади:** 1). $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot 2 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\cdot\frac{5\pi}{12}}$<br>2). $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ |
| **Ділення.** При діленні комплексних чисел, які задані у показниковій формі, їх модулі ділять, а аргументи віднімають: $\frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} \cdot = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$. | Приклади: 1). $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\cdot\pi/4}}{2e^{i\cdot\pi/6}} = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}$.<br>2). $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{-i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$ |
| **Піднесення до степеня** підносять до степеня кожний множник<br>$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$. | **Приклад.** $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12^\circ - i\sin 12^\circ) \approx$<br>$\approx 16(0{,}8438 + 0{,}5366i)$<br>Значення $\cos 12^\circ$ *та* $\sin 12^\circ$ знаходять за таблицями Брадиса. |
| **Добування кореня цілого додатного степеня**<br>$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ *де*, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$<br>При більших значеннях лічильника $k = n$ корені просто будуть повторюватися $z_n = z_0$, $z_{n+1} = z_1$,<br>тому параметр змінюється в діапазоні<br>$k = 0, ..., n-1.$<br>Самі ж корені, а вірніше їх аргументи лежать на колі одиничного радіусу. Достатньо тільки знайти перший, а всі інші отримаємо додаванням кута $\frac{2\pi}{n}$. | А) $\sqrt[5]{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}\right)} = w_k$, $k = \overline{0,4} = 0, 1, 2, 3, 4$<br>де<br>$w_0, w_1, w_2, w_3, w_4$ *– вершини правильного п'ятикутника*<br>$w_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$<br>$w_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 102^\circ + i\sin 102^\circ\right)$<br>$w_2 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 174^\circ + i\sin 174^\circ\right)$<br>$w_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 246^\circ + i\sin 246^\circ\right)$<br>$w_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos 318^\circ + i\sin 318^\circ\right)$<br>Б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$<br>$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0{,}95 - 0{,}65i$,<br>$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0{,}91 + 0{,}70i$, $u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0{,}39 + 1{,}08i$,<br>$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1{,}15 - 0{,}03i$,<br>$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0{,}33 - 1{,}10i.$ |

## Правило перетворення однієї форми комплексного числа в іншу

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Алгебраїчна** $z = a + bi$ | $\rightarrow$ $\leftarrow$ | **Тригонометрична** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ | $\rightarrow$ $\leftarrow$ | **Показникова** $z = r \cdot e^{i\varphi}$ |

- Перехід від алгебраїчної форми до показникової, а також перехід від показникової форми до алгебраїчної може відбуватись через представлення комплексного числа у тригонометричній формі.
- Перехід від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної відбувається підстановкою у вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ числових значений $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$, тоді розкривають дужки та виконують спрощення, враховуючи, що $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

**Правило переходу від алгебраїчної до тригонометричної, а потім до показникової форми комплексного числа**

**1.** Находять модуль $r$ комплексного числа за формулою: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**2.** Для знаходження кута $\varphi$ спочатку визначають геометрично, в якій чверті знаходиться точка $z$.

**3.** Знайти найменший невід'ємний кут $\varphi$, розв'язуючи рівняння:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r};\ tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a}$$

де $\varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right|$.

**4.** Записують комплексне число у тригонометричній формі.

**5.** Знаючи модуль та аргумент, записують комплексне число у показниковій формі.

**Приклад**. Записати число $z = 3 - 3i\sqrt{3}$ у тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання. 1. Так як $a = 3;\ b = -3\sqrt{3}$, то $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 9\cdot 3} = 6$.

2. Геометрично визначаємо, що кут належить IV чверті.

3. Складаємо співвідношення: $tg\,\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$

$$\varphi = arctg|b/a| \Rightarrow \varphi = arctg\left|\left(-3\sqrt{3}\right)/3\right| \Rightarrow \varphi = arctg\sqrt{3}$$

$$\varphi \in IV\ чверті,\ \ то\ \ \varphi = -arctg\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

4. Запишемо тригонометричну форму комплексного числа та перевіремо правильність:

$$6\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 6\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - 3i\sqrt{3}$$

5. Показникова форма буде такою: $z = 6\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

**Правило переходу від показникової до тригонометричної, а потім до алгебраїчної форми комплексного числа**

1. Зафіксувати модуль та аргумент.
2. Записати число у тригонометричній формі.
3. Надати числових значень тригонометричним функціям $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$.
4. Підставити числові значення тригонометричних функцій у тригонометричну форму запису числа.
5. Записати комплексне число в алгебраїчному вигляді.

**Приклад**. Записати число $z = 5\cdot e^{\frac{7\pi}{6}}$ у тригонометричній та алгебраїчній формах.

**Розв'язання.**

**1.** Модуль дорівнює 5, аргумент $\frac{7\pi}{6}$. Шуканому числу $z$ відповідає точка, яка розташована у III чверті.

**2.** Тригонометрична форма числа: $z = 5\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

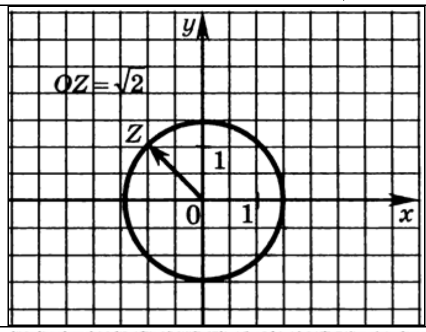
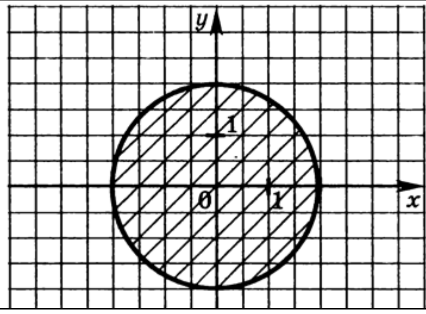
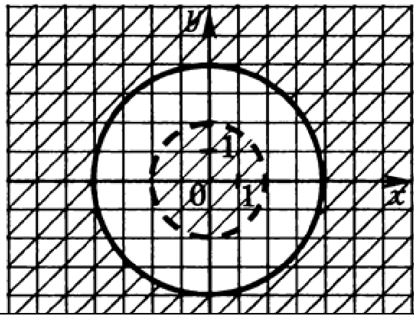
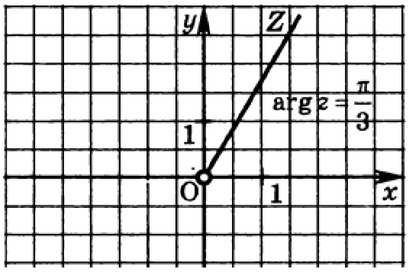
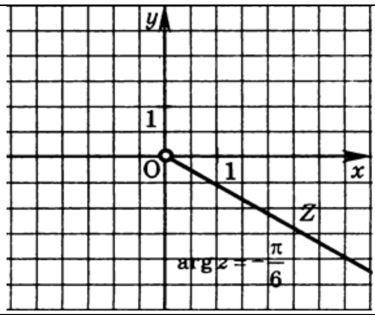
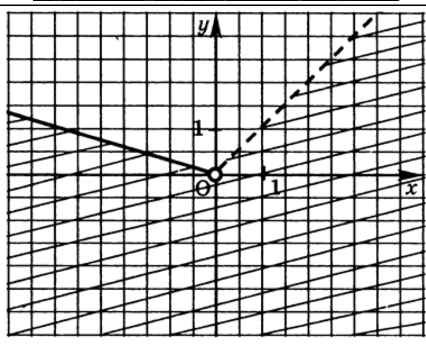
**3. Використовуючи формули зведення, знаходимо:**

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},\ \text{отже}$$

**4. Алгебраїчна форма числа буде такою:**

$$z = 5\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -2{,}5\sqrt{3} - 2{,}5i.$$

| **Зображення множини комплексних чисел з модулем $r \neq 0$ на комплексній площині** | |
|---|---|
| **Приклад.** Покажіть на комплексній площині всі комплексні числа з модулем, що дорівнює $\sqrt{2}$.<br>Розв'язання. Всі комплексні числа з модулем, що дорівнює $\sqrt{2}$, зображуються точками комплексної площини, які є кінцями радіус – векторів довжини $\sqrt{2}$. Множиною таких точок є коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{2}$. |  |
| **Приклад.** Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа з модулем, меншим або рівним 2.<br>Розв'язання. Всі комплексні числа з модулем, меншим або рівним 2, зображуються точками комплексної площині, які є кінцями радіус-векторів довжиною, менше або дорівнює 2. Безліч таких точок є коло з центром на початку координат і радіусом 2. |  |
| **Приклад.** Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа, що задовольняють умові: $\frac{\lvert z\rvert-4}{\lvert z\rvert-2} \geq 0$.<br>Розв'язання. У цьому завданні розглядаються всі точки площини, крім точок, розташованих між концентричними колами і на меншому колі. Центром кіл є початок координат, а їх радіуси дорівнюють 2 і 4. |  |
| **Приклад.** Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа з аргументом $\pi/3$.<br>Розв'язання. Усі комплексні числа з аргументом $\pi/3$ зображуються точками комплексної площини, які є кінцями ненульових радіус – векторів, утворюють з додатним направленням вісі абсцис кут. Множиною таких точок буде промінь $OZ$, який утворює з додатним направленням вісі абсцис кут. Зауважимо, що при цьому мається на увазі промінь без початкової точки. |  |
| **Приклад.** Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа з аргументом $(-\pi/6)+2\pi k, k \in Z$<br>Розв'язання. Всі комплексні числа з аргументом $(-\pi/6)+2\pi k, k \in Z$ зображуються точками комплексної площини, які є кінцями ненульових радіус – векторів, утворюють з додатним направленням вісі абсцис кут $-\pi/6$. Множиною таких точок являється промінь , який утворює з додатним направленням вісі абсцис кут . |  |
| **Приклад**. Зобразіть на комплексній площині всі комплексні числа з аргументами такими, що $\frac{11\pi}{12} \leq \varphi < \frac{9\pi}{4}$.<br>Розв'язання. Всі комплексні числа з вказаними аргументами зображується точками комплексної площини, розташованими нижче променів $y=\left(tg\,\frac{11\pi}{12}\right); x<0$ і $y=x, x>0$. Це кут без однієї з сторін та вершини. |  |

| Контрольні питання |
|---|
| 1. Як геометрично зображуються комплексне число?<br>2. Що називається модулем комплексного числа?<br>3. Що називається аргументом комплексного числа?<br>4. Як знайти модуль та аргумент комплексного числа, записаного в алгебраїчній формі?<br>5. Нехай $z = a + bi$, тоді $\cos\varphi = \ldots,\ \sin\varphi = \ldots,\ tg\varphi = \ldots$ .<br>6. Як записати комплексне число у тригонометричній формі?<br>7. Сформулюйте умови рівності комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі.<br>8. Які дії над комплексними числами у тригонометричній формі можна виконати?<br>9. Як перемножити два комплексні числа у тригонометричній формі?<br>10. Як поділити два комплексні числа у тригонометричній формі?<br>11. Поясніть геометричну суть множення та ділення комплексних чисел.<br>12. Як записується число $1$ у тригонометричній формі?<br>13. Як записується число $-1$ у тригонометричній формі?<br>14. Як записується число $i$ у тригонометричній формі?<br>15. Як записується число $-i$ у тригонометричній формі?<br>16. Запишіть формулу Муавра.<br>17. Що називається коренем $n-$го степеня $(n \in N)$ з комплексного числа $z$ ?<br>18. Скільки коренів $n-$го степеня має кожне комплексне число, відмінне від нуля?<br>19. Запишіть формули для добування кореня $n-$го степеня з 1.<br>20. Що утворює множина коренів $n-$го степеня з 1?<br>21. Три комплексних числа мають однакові аргументи. Як розміститься відповідні точки в комплексній площині?<br>22. Як розмістяться на комплексній площині точки, що відповідають комплексним числа з однаковими модулями?<br>23. Розв'яжіть рівняння $x^6 = 1$. Знайдіть точки координатної площини, що відповідають його розв'язкам. Якому геометричному місцю точок належить 6 коренів? Яку геометричну фігуру дістанемо, з'єднавши ці точки? |
| **Завдання для самостійного розв'язування** |
| 1. Знайти модулі даних комплексних чисел:<br>1) $-5-7i$; 2) $2+3i$; 3) $7+0i$; 4) $5i$; 5) $1+i$; 6) $-2+2\sqrt{3}i$; 7) $-1-i$; 8) $1-\sqrt{3}i$.<br>2. Представити у тригонометричній формі наступні числа:<br>1) 1; 2) $-1$; 3) $i$; 4) $-i$; 5) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $4+3i$; 9) $4-3i$;<br>3. Знайти геометричне місце точок, яку зображують комплексні числа:<br>1) $\|z\|<1$; 2) $\|z\|\le 1$; 3) $\|z\|>1$; 4) $\|z\|\ge 1$; 5) $1<\|z\|<2$; 6) $\|z\|\ge 3$; 7) $\|z-3i\|\le 5$.<br>4. Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:<br>1) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; 2) $(1-i)^4+(1+i)^4$; 3) $\frac{12+5i}{(2+3i)^2}$;<br>4) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 5) $\sqrt{5}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 6) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$;<br>5. Дано: $z_1=1+i$; $z_2=-2+2i\sqrt{3}$. Запишіть їх у тригонометричній формі та обчисліть добуток і частку.<br>6. Знайти значення коренів і побудувати їх геометричне зображення:<br>1) $\sqrt[4]{-4}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$; 5) $\sqrt[4]{-1+i}$; 6) $\sqrt[3]{8}$; 7) $\sqrt[3]{-27}$; 8) $\sqrt[3]{2-2i}$.<br>7. Піднести до степеня: 1) $\left(-0,5+i0,5\sqrt{3}\right)^{10}$; 2) $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$; 4) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 5) $(-2+2i)^5$. |

**Застосування комплексних чисел при розв'язанні квадратних рівнянь**

**Розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом.**

Квадратне рівняння–це алгебраїчне рівняння 2-го ступеня. Квадратне рівняння з одним невідомим має загальний вид: $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c-дані числа або літерні вирази, що містять відомі величини (причому коефіцієнт a не може дорівнювати нулю, інакше рівняння буде не квадратним, а 1-го ступеня). Якщо поділити обидві його частини на a, ми отримаємо рівняння виду

$$x^2+px+q=0,\quad \left(p=\frac{b}{a},\;\; q=\frac{c}{a}\right).$$

Квадратне рівняння такого виду називається *наведеним*; а рівняння $ax^2+bx+c=0$ (де a$\neq 1$) називається *ненаведеним*.

Якщо одна з величин *b, c* або обидві разом дорівнюють нулю, то квадратне рівняння називається *неповним*; якщо й *b* і *c* не дорівнюють нулю, квадратнt рівняння називається *повним*.

**Приклади квадратних рівнянь.**

$3x^2+8x-5=0$ – повне ненаведенне;

$3x^2-5=0$ – неповне ненаведенне;

$x^2-ax=0$ – неповне наведене;

$x^2-12x+7=0$ – повне наведене.

Корені наведеного квадратного рівняння, у випадку, коли $b^2-4ac>0$, можна знайти за формулою коренів та за теоремою Вієта. У випадку, коли $b^2-4ac<0$ використовують формулу коренів.

Неповне квадратне рівняння виду $x^2=m,\ де\ \ m-відома\ величина$, є найпростішим типом квадратного рівняння,

**Приклад 1.** Корені є цілими числами.

$$2x^2+13x-24=0$$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169-4\cdot 2\cdot(-24)}}{2\cdot 2}=\frac{-13\pm\sqrt{361}}{4}=$$

$$=\frac{-13\pm 19}{4};\ x_1=1{,}5;\quad x_2=-8$$

*Відповідь* :1,5; – 8.

**Приклад 2.** Корені є ірраціональними числами.

$$0{,}5x^2+3x-5=0\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 0{,}5\cdot(-5)}}{2\cdot 0{,}5}=$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{19}}{1};\ x_1=-3+\sqrt{19};\quad x_2=-3-\sqrt{19}.$$

*Відповідь* : $-3-\sqrt{19};\ -3+\sqrt{19}.$

**Приклад 3.** Корені є комплексними числами:

$$2x^2+4x+7=0$$

$$D=b^2-4ac=16-4\cdot 2\cdot 7=-40<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{-40}}{2\cdot 2}=\frac{-2\pm i\sqrt{10}}{2}=$$

$$=-1\pm\frac{i\sqrt{10}}{2}$$

*Відповідь* : $1+\frac{i\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{i\sqrt{10}}{2}$

Рівняння не має розв'язків на полі дійсних чисел, але у полі комплексних, використовуючи означення уявної одиниці має два корені, які є комплексно - спряженими числами.

| | |
|---|---|
| корені якого дорівнюють: $x = \pm\sqrt{m}$.<br>Можливі три випадки:<br>1) Якщо $m = 0,\ то\ x = 0$.<br>2) Якщо $m$ – додатне число, то його квадратний корінь $\sqrt{m}$ може мати два значення: одне додатне, інше від'ємне. Абсолютні величини цих значень однакові.<br>Наприклад, $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.<br>3) Якщо $m$ – від'ємне число, то рівняння $x^2 = m$. Наприклад, $x^2 = -9$ не може мати ніякого додатного і ніякого від'ємного кореня, оскільки і додатне, і від'ємне число при піднесенні до квадрату дає не від'ємне число. Таким чином, можна сказати, що рівняння $x^2 = -9$ не має рішень, тобто число $\sqrt{-9}$ не існує.<br>Після введення уявних чисел, можна сказати, що неповне квадратне рівняння $x^2 = m$ завжди має два кореня. **Корені не наведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна знайти за формулою: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.**<br>Вираз $b^2 - 4ac$, величина якого дозволяє відрізнити один з цих трьох випадків від інших, називається *дискримінантом* («*дискримінант*» - «розрізняючий»).<br>При розв'язанні квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можуть бути наступні три випадки:<br>1) $b^2 - 4ac > 0$ – два кореня дійсні і різні.<br>2) $b^2 - 4ac = 0$ –два кореня дійсні і рівні між собою (обидва рівні $(-b/2a)$.<br>3) $b^2 - 4ac < 0$ – обидва корені уявні числа. | **Приклад 4.**<br>$4x^4 + 12x^2 - 16 = 0$ Для розв'язання біквадратного рівняння зробимо заміну: $x^2 = y$, отримаємо:<br>$4x^4 + 12x^2 - 16 = 0$<br>*Заміна. Нехай* $x^2 = y$<br>$4y^2 + 12y - 16 = 0$<br>$y_1 = 1$ $y_2 = -4$<br>*Зробимо зворотню заміну*: *оскільки* $x^2 = y$, *то*<br>$x^2 = 1$ *або* $x^2 = -4$<br>*Звідки* :<br>$x_1 = 1$ $x_3 = 2\sqrt{-1} = 2i$<br>$x_2 = -1$ $x_4 = -2\sqrt{-1} = -2i$<br>Відповідь: -1; 1; 2i; -2i.<br><br>**Приклад 5.** Розв'язати квадратне рівняння $z^2 + 2z + 5 = 0$; $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$, а отже, це рівняння не має дійсних розв'язків.<br>Знаходимо комплексні розв'язки:<br>$z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$. Ці розв'язки – комплексно-спряжені числа.<br>Відповідь: $-1 - 2i$, $-1 + 2i$. |

**Застосування комплексних чисел при розв’язанні задач з електротехніки**

Оскільки комплексні числа геометрично представляються векторами на площині, то всі векторні фізичні величини, які мають довжину та напрям, можуть бути охарактеризовані за допомогою комплексних чисел. Представлення векторних фізичних величин комплексними числами полегшує виконання розрахунків цих величин, оскільки дії над векторами, які виконуються графічно, замінюються відповідними діями над комплексними числами, які виконуються аналітично, що значно простіше. При цьому комплексні числа можуть бути взяті у різних формах (алгебраїчній, тригонометричній, показниковій) в залежності від конкретного випадку.

Особливо широке застосування комплексні числа набувають в електротехніці при розрахунку електричних ланцюгів. Такі величини як: напруга і струм, опір і провідність, потужність – виражаються комплексними числами.

**Зауваження.** В електротехніці уявна одиниця $i$ позначається буквою $j$, оскільки буквою $i$ традиційно позначається струм в ланцюгу.

Для розрахунку ланцюгів постійного струму ще наприкінці XIX століття існували зручні і прості способи, які спиралися на закон Ома і закони Кірхгофа. Це дозволяло за допомогою елементарної алгебри розв’язувати різноманітні електротехнічні задачі. Багато таких задач вже тоді входили і зараз входять у підручники фізики та електротехніки.

Основними законами електротехніки є:

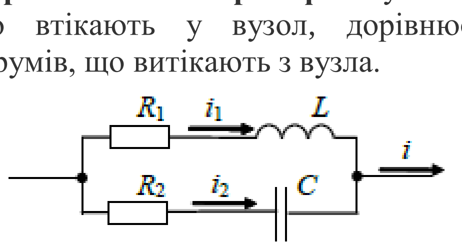
$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I * R}}$$

**Закон Ома.** $U = I \cdot R$. Сила струму прямо пропорційна напрузі та обернено пропорційна опору.

Для легшого запам’ятовування існує правило VIR-трикутника:

**Закон Ома для ділянки ланцюга**. Сила струму на ділянці ланцюга прямо пропорційна напрузі на кінцях ділянки й обернено пропорційна опору цієї ділянки.

**Перший закон Кірхгофа.** Сума струмів, що втікають у вузол, дорівнює сумі струмів, що витікають з вузла.




За першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струму: $i = i_1 + i_2$ .

Загальний струм $i$ зображується на комплексній площині як сума векторів, якими зображуються струми $i_1$, $i_2$ .

**Задача 1**. На малюнку приведена схема розгалуженого електричного кола з наступними параметрами елементів: $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $R_3 = 6$ Ом; $X_1 = 3$ Ом; $X_2 = 5$ Ом; $X_3 = 8\ \text{І}i$; $X_4 = 4\ \text{І}i$.

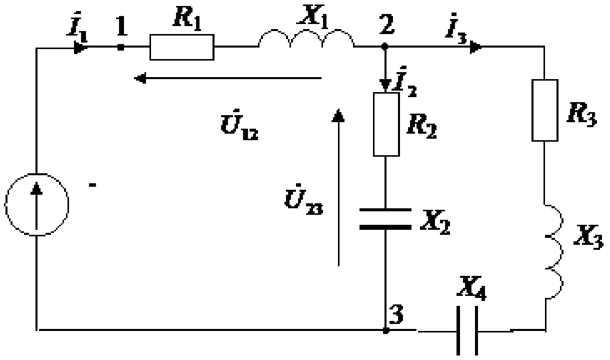



Рисунок 1 – Схема розгалуженого електричного кола.

Розв’язання.

1. Знайдемо комплексні опори віток:

А) За законом Кірхгофа опір першої вітки дорівнює сумі опорів активного та індуктивного опорів:

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 5 + j3\ (Ом\ )$ $\left(5{,}83e^{j31^\circ}\right)$Ом,

Б) Опір другої вітки дорівнює сумі опорів активного та ємнісного опорів:

$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 4 - j5\ (Ом)$ $\left(6{,}4e^{-j51^\circ 20'}\right)$Ом,

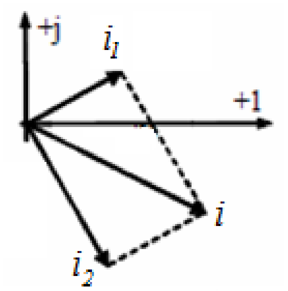
В) Опір третьої вітки дорівнює сумі опорів активного індуктивного та ємнісного опорів:

$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 - jX_4 = 6 + j8 - j4 = 6 + j4\,(Ом)$ $\left(7{,}21e^{j33^\circ 40'}\right)$Ом.

2. Знайдемо комплексний опір паралельно з’єднаних віток:

При паралельному з’єднанні комплексний опір дорівнює $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3} \Rightarrow \dfrac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$.

Запишемо його в алгебраїчній формі:




Оскільки струм і напруга зображуються векторами, то у ланцюгу постійного струму струм і напруга на активному опорі збігаються за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$. Тобто вектори співпадають.

Для активно-індуктивного опору струм відстає від напруги, а кут $\varphi > 0$.

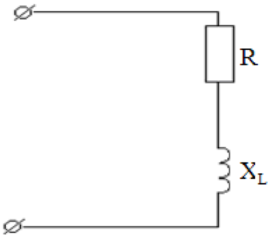
Для активно-ємнісного характеру опору струм випереджає напругу, а кут $\varphi < 0$.

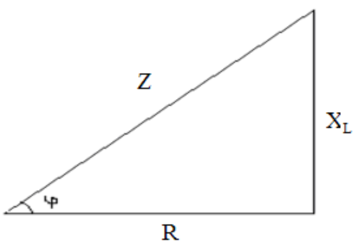
Активний опір виражається дійсним числом, індуктивний (котушка) - додатним уявним числом та ємнісний (конденсатор) - від'ємним уявним числом. Комплексний опір позначається $\underline{Z}$.

**Зауваження 1**. При розв'язанні задач може бути використана як алгебраїчна, так і показникова форма числа.

**Зауваження 2**. При розв'язанні задач з електротехніки знаходять комплексні опори як окремих, паралельних віток, так і опори всього електричного кола. Також знаходять струм та напругу, використовуючи закони Ома та Кірхгофа.

**Опір та провідність.** Мається ланцюг: $R$ активний опір (лампа накалювання); $L -$ індуктивний опір (котушка); $Z -$ загальний опір ланцюга, який називається повним опором.




$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(4-5j)\cdot(6+j4)}{4-j5+6+j4} =$$

$$= \frac{24-30j+16j-20j^2}{10-j} = \frac{44-14j}{10-j} =$$

$$= \frac{(44-14j)(10+j)}{(10-j)(10+j)} = \frac{440-140j+44j+14}{100+1} =$$

$$= \frac{454-96j}{101} \approx 4{,}5 - j0{,}96 Ii$$

3. Знайдемо комплексний опір всього кола

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 5 + j3 + 4{,}5 - j0{,}96 =$$

$$= 9{,}5 + j2{,}04 (Ом) \qquad \left(9{,}67e^{j12^\circ 15}\right) Ом$$

**Задача 2.** Для електричного кола, схема якого представлена на рисунку а), визначити миттєві значення струмів у вітках і напругу на паралельній ділянці, обчислити активну $P$, реактивну $Q$ і комплексну потужності $\underline{S}$, якщо $U = 220$В; $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $R_3 = 8$Ом; $X_{L1} = 6$ Ом; $X_{L2} = 4$ Ом; $X_{C3} = 6$ Ом.

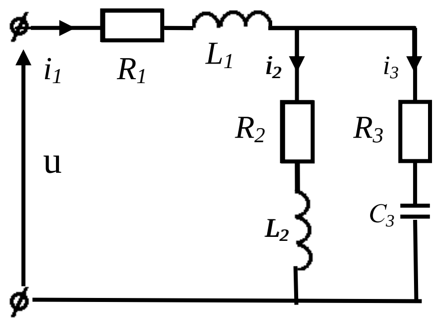



Рис. а)

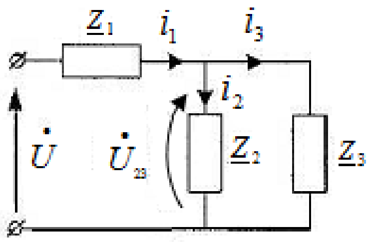



Рис. б)

**Розв'язання.**

1. Знайдемо комплексні опори всіх трьох віток:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 2 + j6 \quad Ом \qquad \left(6{,}324e^{j71{,}67^\circ}\right) Ом$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 3 + j4 \quad Ом \qquad \left(5e^{j53^\circ}\right) Ом$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 8 - j6 \quad Ом \qquad \left(10e^{-j37^\circ}\right) Ом$$

2. Обчислимо комплексний опір паралельних віток (Рисунок б):

Опори $R, X_L, Z$ утворюють прямокутний трикутник опору. Кут $\varphi -$кут зсуву фаз. Опори не є синусоїдальними величинами, однак відрізок Z може бути виражений комплексним числом, враховуючи, що $R$- відкладається за віссю дійсних чисел, а відрізок $X_L$- за віссю уявних чисел.

Для ланцюга на рисунку, комплексний опір записується: в алгебраїчній формі: $Z = R + jX_L$;

тригонометричній формі:

$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

показниковій формі: $z = re^{i\varphi}$. Таким чином, в комплексі опору модуль дорівнює повному опору, а аргумент дорівнює зсуву фаз.

**Комплексним опором, напругою, струмом** називають опір, напругу, струм, які записують за допомогою комплексних чисел.

**Позначення.**

$Z$ **- комплексний опір;**

$\dot{U}$ **- комплексна напруга**

$\dot{I}$ **- комплексний струм**

**Потужність.** Комплекс потужності отримаємо, якщо комплекс напруги помножити на спряжений комплекс струму:

$$\underline{\tilde{S}} = \dot{U}\cdot \dot{I}_1 \ \ BA \ \text{(вольтампер = ватт)}$$

Після множення отримаємо комплексне число, у якого дійсна частина дорівнює активній потужності $P$, а уявна-реактивній потужності $Q$:

$$\underline{\tilde{S}} = P + iQ$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(3+4j)\cdot(8-j6)}{3+j4+8-j6} =$$

$$= \frac{24+32j-18j-24j^2}{11-2j} = \frac{48+14j}{11-2j} =$$

$$= \frac{(48+14j)(11+2j)}{(11-2j)(11+2j)} = \frac{528+154j+96j-28}{121+4} =$$

$$= \frac{500+250j}{125} = (4+j2)\text{Ом}$$

3. Визначимо вхідний комплексний опір усього кола:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 2 + j6 + 4 + j2 = 6 + j8 \ \ Ом$$

$$\left(10e^{j53^\circ}\ \text{Ом}\right)$$

4. Тоді струм на вході кола дорівнює:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{220}{(6+j8)} = \frac{220\cdot(6-j8)}{(6+j8)\cdot(6-j8)} =$$

$$\frac{1320-1760j}{36+64} = \frac{1320-1760j}{100} = 13{,}2 - j17{,}6 \ \ A$$

5. Визначимо напругу на паралельних вітках:

$$\dot{U}_{23} = \underline{Z}_{23}\cdot\dot{I}_1 = (4+j2)\cdot(13{,}2-j17{,}6) =$$

$$= 52{,}8 + j26{,}4 - j70{,}4 - 35{,}2j^2 = 88 - j44 \ \ B$$

6. Струми $\dot{I}_2$ та $\dot{I}_3$ знаходимо за законом Ома:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{88-j44}{(3+j4)} = \frac{(88-j44)(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)} =$$

$$= \frac{264-132j-352j-176}{9+16} = \frac{88-j484}{25} = 3{,}5 - j19{,}3 \ \ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{88-j44}{(8-j6)} = \frac{(88-j44)(8+j6)}{(8-j6)(8+j6)} =$$

$$\frac{704+528j-352j+264}{64+36} = \frac{970+j176}{100} = 9{,}7 + j1{,}7 \ \ A$$

7. Здійснимо перевірку за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 3{,}5 - j19{,}3 + 9{,}7 + j1{,}7 =$$

$$= 13{,}2 - j17{,}6 \ \ A$$

8. Комплексна потужність:

$$\underline{\tilde{S}} = \dot{U}\cdot\dot{I}_1 = 220\cdot(13{,}2 - j17{,}6) =$$

$$= (2904 + j3872) \ \ BA \ \text{(вольтампер = ватт)}$$

9. Отже активна потужність:

$P = 2904\,B\text{т}$ (ватт)

Реактивна потужність:

$Q = 3872$ вар (*вольт ампер* реактивній).

| Розв'язання квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами |
|---|
| За допомогою подібних прикладів можна перевірити знання студентів з теорії комплексної змінної. Основна задача в тому, що при розв'язуванні отримуємо дискримінант, який є комплексним числом. Без формули Муавра знайти корінь з нього неможливо. При розв'язуванні таких прикладів студентами викладачі мають можливість перевірити знання правил множення та ділення комплексних чисел. <br> **Приклад 1**. **Знайти розв'язок квадратного рівняння з комплексними коефіцієнтами** <br> $(-1+i)\cdot x^2+(3+2i)\cdot x+2-i=0$ <br> Розв'язок. Знаходимо дискримінант за стандартною формулою <br> $D=(3+2i)^2-4(-1+i)(2-i)$ <br> Обчислюємо доданки дискримінанта множенням комплексних чисел <br> $(3+2i)^2=9+2\cdot 6i-4=5+12i$ <br> $-4(-1+i)(2-i)=-4(-2+i+2i-i^2)=-4(-1+3i)=4-12i$ <br> Підставляємо у формулу <br> $D=5+12i+4-12i=9$ <br> В даному випадку маємо додатний дискримінант, з якого можемо взяти дійсний корінь <br> $\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$ <br> Це дуже спрощує обчислення, оскільки при від'ємному дискримінанті потрібно визначати корені за формулою Муавра. <br> Знаходимо розв'язок рівняння за формулою <br> $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ <br> Після підстановки отримаємо корені <br> $x_{1,2}=\dfrac{-3-2i\pm 3}{2(-1+i)}$ або $x_1=\dfrac{-3-2i+3}{2(-1+i)}=\dfrac{-i}{1+i}$ $x_2=\dfrac{-3-2i-3}{2(-1+i)}=\dfrac{-3-i}{1+i}$ <br> Для спрощення (ділення комплексних чисел) множимо чисельник і знаменник на спряжене число до знаменника <br> $x_1=\dfrac{-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{i^2-i}{1-i^2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$ $x_2=\dfrac{-3-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{-3+3i-i+i^2}{2}=2-i$ . <br> Таким чином, наступні значення розв'язків задовольняють вихідне квадратне рівняння. <br> **Приклад 2. Знайти розв'язок квадратного рівняння з комплексними коефіцієнтами** <br> $$(2-3i)\cdot x^2-2\sqrt{5}x+1+i=0$$ <br> Розв'язок. Дискримінант до квадратичної залежності матиме вигляд <br> $D=(-2\sqrt{5})^2-4\cdot(2-3i)\cdot(1+i)$ |

Піднесемо до квадрата $\left(-2\sqrt{5}\right)^2 = 4\cdot 5 = 20$.

та перемножимо $-4\cdot(2-3i)\cdot(1+i) = -4\left(2+2i-3i-3i^2\right) = -4(5-i) = -20+4i$.

Значення дискримінанту після підстановки буде комплексним числом

$D = 20-20+4i = 4i$

Для знаходження кореня з дискримінанту застосовуємо формулу Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k\in Z$$

Запишемо отриманий дискримінант у тригонометричній формі

$$D = 4i = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Звідси виписуємо значення модуля та аргументу D $r = 4,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

та підставляємо у формулу коренів

$$\sqrt{D} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right), k = 0;1.$$

При $k=0$ матимемо $D_1 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

При наступному значенні $k=1$ отримаємо

$$D_2 = \sqrt{4}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

Дані значення відповідають точкам перетину кола з радіусом $r=2$ та прямої $y=x$.

Розв’язки квадратного рівняння обчислимо за формулами:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2(2-3i)};\ x_2 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2(2-3i)}.$$

Отримали частки комплексних чисел. Помножимо на спряжене до знаменника і спростимо перший корінь

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2(2-3i)}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+6\sqrt{5}i+3\sqrt{2}i-3\sqrt{2}}{2\left(2^2+3^2\right)} = \frac{4\sqrt{5}-\sqrt{2}+\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{5}\right)i}{26};$$

та наступний

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2(2-3i)}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{4\sqrt{5}-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i+6\sqrt{5}i-3\sqrt{2}i+3\sqrt{2}}{2\left(2^2+3^2\right)} = \frac{4\sqrt{5}+\sqrt{2}+\left(-5\sqrt{2}+6\sqrt{5}\right)i}{26}.$$

Отримали складні на вигляд розв’язки квадратного рівняння з комплексними коефіцієнтами, однак при розв’язуванні такого сорту прикладів цього не уникнути. При підготовці в домашніх умовах Ви зможете скористуватись математичними пакетами Maple, Math Cad.

**Індивідуальні завдання №1.1**

**Завдання 1.1** Виконайте дії в алгебраїчній формі та результат проілюструйте геометрично.

| В | Завдання | В | Завдання |
|---|---|---|---|
| **1.** | $(1+i)^2+\frac{5i}{2-i}$ | **16.** | $\frac{7-3i}{1+3i}-(5-2i)^2$ |
| **2.** | $\frac{3+2i}{1-i}+(3-4i)^2$ | **17.** | $\frac{2-3i}{1-2i}\cdot 5i^9$ |
| **3.** | $\frac{7-i}{7+i}+\left(2i^3+i^{88}\right)$ | **18.** | $\frac{(5-3i)\cdot i^{12}}{6-i}$ |
| **4.** | $8i^7+\frac{(4+i)+(-1+7i)}{1+5i}$ | **19.** | $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2-\left(7+4\sqrt{5}i\right)$ |
| **5.** | $(3+7i)(2+i)-\left(2+i^{17}\right)$ | **20.** | $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}+\frac{5-\sqrt{5}i+i^7}{3}$ |
| **6.** | $(3-i)^2+\frac{1+i}{1-i}$ | **21.** | $\frac{2-3i}{4+5i}\cdot 41i^{13}$ |
| **7.** | $\frac{(1+2i)(2+i)}{(3-2i)}$ | **22.** | $\frac{5}{1+2i}+(1-i)^2$ |
| **8.** | $\left(2+i\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{3}i+2i^{17}\right)$ | **23.** | $\frac{4+3i}{4-3i}-14i^3$ |
| **9.** | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2+8i^{16}$ | **24.** | $\frac{1-3i}{i-2}\cdot 5i^2$ |
| **10.** | $\frac{4}{1-2i}+(1-2i)^2$ | **25.** | $\frac{5-5i}{2-i}+\frac{(1-i)^6}{2i}$ |
| **11.** | $\frac{1+2i}{1-2i}-7i^{24}$ | **26.** | $\frac{3}{1+i}-\frac{5}{4-2i}+\frac{4}{1-i}$ |
| **12.** | $\frac{1}{1+i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)^2$ | **27.** | $\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$ |
| **13.** | $\left(1+i^5\right)^3-(6-i)$ | **28.** | $\left(3+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-i\sqrt{3}\right)$ |
| **14.** | $(3+2i)(3-2i)-\left(\sqrt{2}i\right)^2$ | **29.** | $\frac{-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}}$ |
| **15.** | $\frac{7-4i}{2i}-\left(9+8i^2-i^{41}\right)$ | **30.** | $\frac{5}{4-i\sqrt{14}}-\frac{3}{2-i\sqrt{14}}$ |

### Індивідуальні завдання №1.2

**Завдання 1.2.1** Розв'яжіть квадратне рівняння.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $x^2-4x+5=0$ | **16.** | $3x^2-2x+3=0$ |
| **2.** | $x^2-6x+16=0$ | **17.** | $3x^2-2x+1=0$ |
| **3.** | $x^2+2x+3=0$ | **18.** | $x^2-8x+80=0$ |
| **4.** | $3x^2-2x+4=0$ | **19.** | $2x^2-6x+7=0$ |
| **5.** | $x^2+4x+12=0$ | **20.** | $x^2+6x+18=0$ |
| **6.** | $x^2-4x+8=0$ | **21.** | $3x^2-2x+8=0$ |
| **7.** | $x^2-2x+5=0$ | **22.** | $5x^2+2x+2=0$ |
| **8.** | $2x^2-x+1=0$ | **23.** | $5x^2-4x+2=0$ |
| **9.** | $3x^2-2x+6=0$ | **24.** | $4x^2-2x+5=0$ |
| **10.** | $x^2+8x+17=0$ | **25.** | $5x^2-4x+8=0$ |
| **11.** | $x^2+x+1=0$ | **26.** | $3x^2-6x+4=0$ |
| **12.** | $3x^2+x+1=0$ | **27.** | $2x^2-2x+6=0$ |
| **13.** | $x^2-x+1=0$ | **28.** | $4x^2+4x+4=0$ |
| **14.** | $3x^2-8x+9=0$ | **29.** | $-3x^2+12x-16=0$ |
| **15.** | $3x^2+2x+1=0$ | **30.** | $-2x^2+4x-12=0$ |

**Завдання 1.2.2** Складіть та розв'яжіть квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, якщо коефіцієнти $a, b, c$ задані таблицею.

| **В** | **a** | **b** | **c** | **В** | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 25 | 20 | 53 | **16.** | 18 | 30 | 17 |
| **2.** | 4 | -4 | 17 | **17.** | 4 | -16 | 25 |
| **3.** | 5 | 4 | 1 | **18.** | 8 | -20 | 17 |
| **4.** | 2 | -14 | 25 | **19.** | 36 | -48 | 25 |
| **5.** | 4 | 2 | 3 | **20.** | 9 | 18 | 58 |
| **6.** | 5 | 16 | 13 | **21.** | 16 | -24 | 34 |
| **7.** | 2 | -4 | 7 | **22.** | -18 | 12 | -4 |
| **8.** | 9 | 48 | 89 | **23.** | 16 | -40 | 29 |
| **9.** | 8 | 4 | 5 | **24.** | 4 | -24 | 45 |
| **10.** | 5 | 6 | 2 | **25.** | 5 | 14 | 10 |
| **11.** | 2 | -2 | 3 | **26.** | 4 | -12 | 13 |
| **12.** | 4 | -4 | 5 | **27.** | 6 | -8 | 3 |
| **13.** | 16 | -40 | 29 | **28.** | 9 | 12 | 12 |
| **14.** | 9 | 30 | 74 | **29.** | 8 | -28 | 65 |
| **15.** | 2 | -4 | 3 | **30.** | 25 | 20 | 29 |

## Індивідуальні завдання №2.1

2.1.1 Виконайте дії над комплексними числами, заданими у тригонометричній формі.
2.1.2 Результат запишіть у показниковій формі.
2.1.3 Запишіть задане число в алгебраїчній формі.

| **В** | **Завдання** | **В** | **Завдання** |
|---|---|---|---|
| **1** | $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ | **16** | $6\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ |
| **2** | $\left(0{,}5\cdot\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)\right)^2$ | **17** | $2\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)\cdot 3\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)$ |
| **3** | $\left(2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$ | **18** | $\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right):\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)$ |
| **4** | $10\cdot\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | **19** | $\left(2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$ |
| **5** | $\left(3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$ | **20** | $\sqrt{2}\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)$ |
| **6** | $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | **21** | $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$ |
| **7** | $6\left(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ\right):2\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)$ | **22** | $3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0{,}6\cdot\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ |
| **8** | $3\cdot\left(\cos 83^\circ+i\sin 83^\circ\right):2\left(\cos 23^\circ+i\sin 23^\circ\right)$ | **23** | $\left(\cos 27^\circ+i\sin 27^\circ\right)^{10}$ |
| **9** | $2\sqrt{2}\cdot\left(\cos 120^\circ-i\sin 120^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ\right)$ | **24** | $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)$ |
| **10** | $\left(\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$ | **25** | $2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ |
| **11** | $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | **26** | $\left(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ\right):\left(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ\right)$ |
| **12** | $2\cdot\left(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ\right)$ | **27** | $\left(2\cdot\left(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ\right)\right)^5$ |
| **13** | $4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ | **28** | $\left(\sqrt{3}\cdot\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)\right)^2$ |
| **14** | $\sqrt{5}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)\cdot 3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$ | **29** | $4\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right):2\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)$ |
| **15** | $\left(\sqrt{3}\cdot\left(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ\right)\right)^2$ | **30** | $3\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\cdot 5\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ |

**Індивідуальні завдання №2.2**

2.2.1. Представте комплексне число у тригонометричній та показниковій формах.
2.2.2. Визначте алгебраїчну форму комплексного числа, записаного у показниковій формі.

| В | №2.1 | №2.2 | В | №2.1 | №2.2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $3+3i$ | $3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ | **16.** | $\sqrt{3}-i$ | $2e^{i(-\pi/3)}$ |
| **2.** | $2-2i$ | $2\sqrt{2}e^{i(-\pi/4)}$ | **17.** | $-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ | $\sqrt{6}e^{i(3\pi/4)}$ |
| **3.** | $-1+i$ | $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ | **18.** | $-3-3i$ | $3\sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)}$ |
| **4.** | $-1+i\sqrt{3}$ | $2e^{i(2\pi/3)}$ | **19.** | $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ | $2e^{i(3\pi/4)}$ |
| **5.** | $1-\sqrt{3}i$ | $2e^{i(-\pi/3)}$ | **20.** | $1+i$ | $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ |
| **6.** | $\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $e^{i(\pi/3)}$ | **21.** | $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ | $2e^{i(\pi/4)}$ |
| **7.** | $-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ | $2\sqrt{6}e^{i(3\pi/4)}$ | **22.** | $-\frac{1}{2}-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $e^{i(-2\pi/3)}$ |
| **8.** | $-2-2i$ | $2\sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)}$ | **23.** | $-\sqrt{2}(1+i)$ | $2e^{i(-3\pi/4)}$ |
| **9.** | $2(-1+i\sqrt{3})$ | $4e^{i(2\pi/3)}$ | **24.** | $-\sqrt{3}+i$ | $2e^{i(5\pi/6)}$ |
| **10.** | $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$ | $e^{i(-\pi/6)}$ | **25.** | $-\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $e^{i(2\pi/3)}$ |
| **11.** | $-\sqrt{3}-i$ | $2e^{i(-5\pi/6)}$ | **26.** | $-2(1+i\sqrt{3})$ | $4e^{i(-2\pi/3)}$ |
| **12.** | $5(1+i)$ | $5\sqrt{2}e^{i(\pi/4)}$ | **27.** | $\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}e^{i(-\pi/6)}$ |
| **13.** | $3(1+i\sqrt{3})$ | $6e^{i\pi/6}$ | **28.** | $3(1-i)$ | $3\sqrt{2}e^{i(-\pi/4)}$ |
| **14.** | $6+2i\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}e^{i(\pi/6)}$ | **29.** | $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ | $4e^{i(3\pi/4)}$ |
| **15.** | $3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$ | $6e^{i(-\pi/4)}$ | **30.** | $\sqrt{3}-i^3\sqrt{3}$ | $\sqrt{6}e^{i\pi/4}$ |

**Рекомендована література**


1. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики/ Богомолов М.В. Навчальний посібник для технікумів. – К., 2000 – 447 *с.*
2. Боровик В. Н. Математика / Боровик В. Н. Л. Н. Вивальнюк, М. М. Мурач та ін./ посібник для факультативних занять у 10 класі / упоряд.: – К.: Радянська школа, 1985. – 208 с., 81
3. Валуце І.І. Математика для технікумів / Валуце І.І., Дилигул Г.Д. Підручник для студентів технікуму: - М., 2001, 576с.
4. Зайчик М.Ю. Збірник задач та вправ по теоретичній електротехніці/ М.Ю. Зайчик Навчальний посібник для електротехнічних спеціальностей технікумів. 5-е вид., перероб. – М.: Енергія, 2000.
5. Лейфура В.М. Математика. Підручник для студентів екон. спеціальностей вищ. навч.закладів I-II рівнев акредитації /Лейфура В.М., Голодницький Г.І., Файст Й.І.; за ред.. В.М. Лейфури.–К.: Техніка,2003.–640с
6. Монахов В.М. Методичні рекомендації з математики / Монахов В.М., Колягін Ю.М., Савицька Є.М. та ін.//Позакласна робота з математики: –М.: «Вища школа», 2002–78 с.
7. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. Для 11 кл.загальноосвіт. навч. закладів.–2–ге вид., і доп.–Х.Світ дитинства, 2006.–416с.
8. Хмара Т. М. Застосування комплексних чисел до розв’язування геометричних задач / Т. М. Хмара, О. В. Шаран // Математика в школі. – 2004. – № 7. – С. 41-45; № 8. – С. 32-40. (Особистий внесок полягає у розробці методики використання комплексних чисел до розв’язування геометричних задач)
9. Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування (10-11 класи) / О. В. Шаран // Математика в школі. – 2004. – №6. – С. 46-49.
10. Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування / Олександра Василівна Шаран. – Дрогобич: НВЦ “Каменяр”, 2004. – 192 с.
11. Шмідт Н. М. Додаток комплексних чисел в електротехніці [Текст] / Н. М. Шмідт// Молодий вчений. - 2012. - №2. - С. 320-323.

## Відповіді до індивідуальних завдань

| | Індивідуальні завдання | | |
|---|---|---|---|
| №ІЗ / В | ***1.1*** | ***1.2.1*** | ***1.2.2*** |
| **1.** | $-2-4i$ | $2\pm i$ | $-0{,}4\pm 1{,}4i$ |
| **2.** | $(-13/2)-(43/2)i$ | $3\pm\sqrt{7}\,i$ | $-0{,}5\pm 2i$ |
| **3.** | $-\frac{2}{5}-2\frac{4}{5}i$ | $-1\pm\sqrt{2}i$ | $-0{,}4\pm 0{,}2i$ |
| **4.** | $-8\frac{7}{26}+\frac{43}{26}i$ | $(1/3)\pm(\sqrt{11}/3)i$ | $-3{,}5\pm 0{,}5i$ |
| **5.** | $-3+16i$ | $-2\pm 2\sqrt{2}\,i$ | $-0{,}25\pm 0{,}25i\sqrt{11}$ |
| **6.** | $8-5i$ | $2\pm 2i$ | $-1{,}6\pm 0{,}2i$ |
| **7.** | $-\frac{10}{13}+\frac{15}{13}i$ | $1\pm 2i$ | $1\pm 0{,}5\sqrt{10}i$ |
| **8.** | $1+2i$ | $(1/4)\pm(\sqrt{7}/4)\,i$ | $(-8/3)\pm(5/3)i$ |
| **9.** | $8\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ | $(1/3)\pm(\sqrt{17}/3)\,i$ | $-0{,}25\pm 0{,}75i$ |
| **10.** | $-0{,}2-2{,}4i$ | $-4\pm i$ | $-0{,}6\pm 0{,}2i$ |
| **11.** | $-7\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ | $(-1/2)\pm(\sqrt{3}/2)i$ | $0{,}5\pm 0{,}5\sqrt{5}i$ |
| **12.** | $(-1/2)i$ | $(-1/6)\pm(\sqrt{11}/6)i$ | $-0{,}5\pm i$ |
| **13.** | $-8-i$ | $(1/2)\pm(\sqrt{3}/2)i$ | $1{,}25\pm 0{,}5i$ |
| **14.** | $15$ | $(4/3)\pm(\sqrt{11}/3)i$ | $(-5/3)\pm(7/3)i$ |
| **15.** | $-3-(5/2)i$ | $(-1/3)\pm(\sqrt{2}/3)i$ | $1\pm 0{,}5\sqrt{2}i$ |
| **16.** | $-\frac{106}{5}+\frac{88}{5}i$ | $1\pm\sqrt{2}i$ | $(-5/6)\pm(1/2)i$ |
| **17.** | $8i-1$ | $(1/3)\pm(\sqrt{2}/3)i$ | $2\pm 1{,}5i$ |
| **18.** | $\frac{33}{37}-\frac{13}{37}i$ | $4\pm 8i$ | $1{,}25\pm 0{,}75i$ |
| **19.** | $-6$ | $(3/2)\pm\sqrt{5}\,i$ | $(2/3)\pm(1/2)i$ |
| **20.** | $2-(1/3)i$ | $-3\pm 3i$ | $-1\pm(7/3)i$ |
| **21.** | $-7i+22$ | $(1/3)\pm(\sqrt{23}/3)i$ | $(3/4)\pm(5/4)i$ |
| **22.** | $1-4i$ | $-0{,}2\pm 0{,}6i$ | $(1/3)\pm(1/3)i$ |
| **23.** | $\frac{7}{25}+14\frac{24}{25}i$ | $(2/5)\pm(\sqrt{6}/5)i$ | $(5/4)\pm(1/2)\,i$ |
| **24.** | $5-5i$ | $(1/4)\pm(\sqrt{19}/2)i$ | $3\pm(3/2)i$ |
| **25.** | $7-i$ | $0{,}4\pm 1{,}2i$ | $-1{,}4\pm 0{,}2\,i$ |
| **26.** | $2{,}5$ | $1\pm(\sqrt{3}/3)i$ | $1{,}5\pm i$ |
| **27.** | $1-2\sqrt{2}i$ | $6\pm 3i$ | $(2/3)\pm(\sqrt{2}/6)\,i$ |
| **28.** | $12$ | $(-1/2)\pm(\sqrt{3}/2)i$ | $(-2/3)\pm(2\sqrt{2}/3)\,i$ |
| **29.** | $(4/5)i$ | $2\pm(2\sqrt{3}/3)i$ | $(7/4)\pm(9/4)i$ |
| **30.** | $1/3$ | $1\pm\sqrt{5}i$ | $-0{,}4\pm i$ |

ДЛЯ НОТАТОК